

I mezzi trasmissivi

Obiettivi

- ✓ Conoscere le modalità realizzative e i principali parametri dei diversi mezzi trasmissivi.
- ✓ Conoscere le modalità di propagazione delle onde elettromagnetiche nei diversi mezzi trasmissivi e in particolare nei conduttori metallici, nell'aria e nelle fibre ottiche.
- ✓ Conoscere il fenomeno delle onde stazionarie e le tecniche di adattamento di impedenza.
- ✓ Conoscere i principi base su cui funzionano le antenne.

1 Introduzione

La trasmissione dell'informazione a distanza può essere attuata attraverso un canale che sia in grado di ospitare una o più grandezze fisiche le quali sono, a loro volta, le vettrici di tale informazione. Gli attuali canali di trasmissione utilizzano due grandezze fisiche elettriche, il **campo elettrico** e il **campo magnetico** *tra loro interagenti* (**campo elettromagnetico**), a diverse frequenze di lavoro e, in conseguenza di ciò, con propagazione su mezzi trasmissivi diversi. Tali mezzi trasmissivi sono:

Possibili mezzi trasmissivi

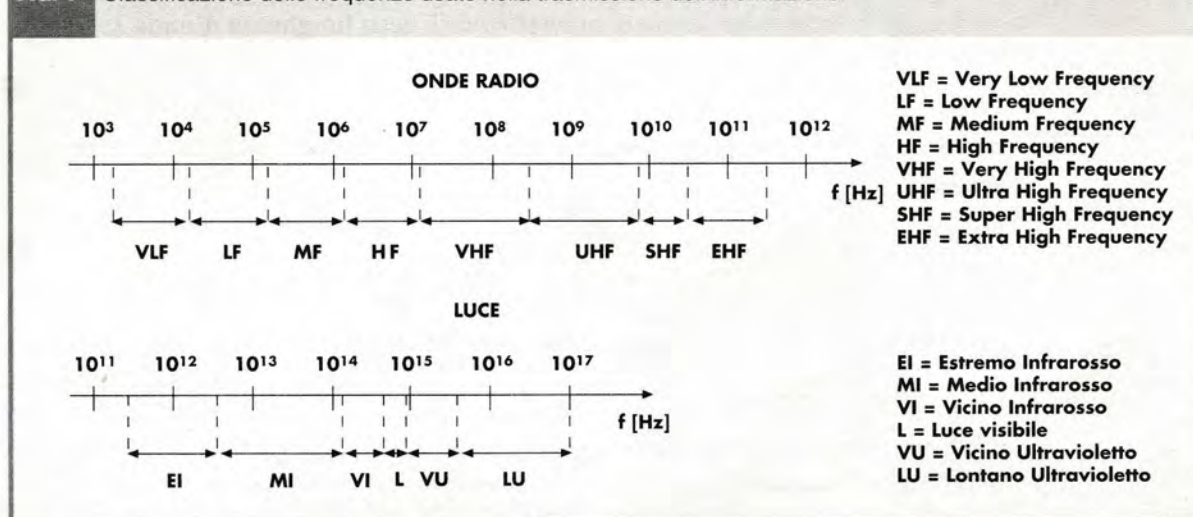
- **supporti metallici a elemento doppio** (cavo coassiale, linea bifilare, doppioli telefonici ecc.) e **a elemento singolo** (guide d'onda);
- **supporti non metallici** (fibre ottiche);
- **spazio vuoto o aria** (onde radio terrestri o satellitari).

Se esiste un supporto materiale che fa da sostegno al campo elettromagnetico (i primi due casi) spesso si parla anche di **onde guidate**.

Frequenze utilizzate

Le frequenze utilizzate nella trasmissione sono estremamente variabili e coprono il campo compreso tra poche migliaia di Hz e 10^{15} Hz secondo la classificazione di figura 1.

FIG. 1 Classificazione delle frequenze usate nella trasmissione dell'informazione.



La distinzione tra onde radio e luce è del tutto formale trattandosi di un diverso aspetto della stessa realtà elettromagnetica. Per frequenze superiori a 10^{17} Hz si entra nel campo delle **radiazioni ionizzanti** che vengono indicate con i termini: **raggi X** e **raggi γ** . La zona delle frequenze comprese tra 1 GHz e 40 GHz (zona UHF e SHF) è stata divisa ulteriormente in diverse bande dall'IEEE (*Institute of Electrical and Electronic Engineering*) secondo quanto indicato in figura 2.

FIG. 2 Suddivisione delle frequenze tra 1 e 40 GHz secondo l'IEEE.

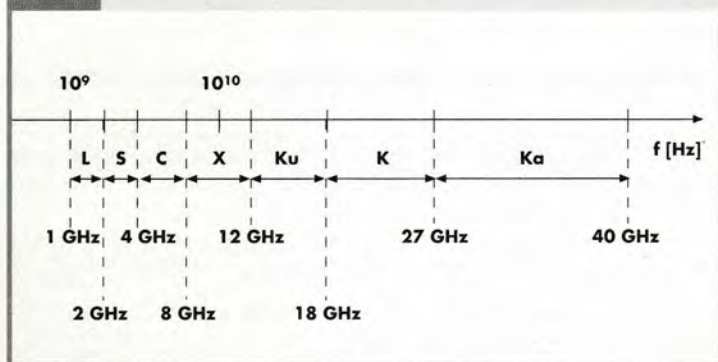
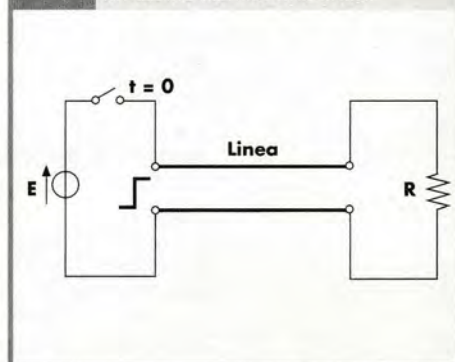


FIG. 3 Collegamento di un generatore a un carico tramite una linea.



Esistono anche altre denominazioni che tendono a suddividere in altre bande di frequenza a seconda della loro utilizzazione.

Quando le cariche elettriche vengono accelerate in qualsiasi modo da un opportuno dispositivo, sia per inviare energia in un utilizzatore a distanza sia per imporre una situazione elettromagnetica che trasmetta informazione a una stazione ricevente, il campo elettrico dovuto alla presenza di cariche e il campo magnetico dovuto al loro movimento non si stabiliscono istantaneamente nel mezzo trasmissivo ma si propagano a una velocità finita: la velocità c dell'onda elettromagnetica (della luce) che nello spazio vuoto è di circa $3 \cdot 10^8$ m/s. Si immagini, per esempio una linea che colleghi un generatore a un carico come in figura 3. La tensione E imposta all'istante $t = 0$ dalla chiusura dell'interruttore non può raggiungere istantaneamente il carico R ma potrà "camminare" sulla linea a una velocità finita e raggiungerà il carico con un certo ritardo. Questo può essere spiegato in termini di campo elettrico e campo magnetico che sono guidati dai conduttori dal generatore al carico, ma può anche essere più facilmente spiegato in termini di induttanza e capacità distribuita dei due conduttori. La velocità di propagazione dipende dal mezzo che circonda i conduttori e nel quale si forma il campo elettromagnetico. Per linee in aria la velocità di propagazione è molto prossima alla velocità della luce nello spazio vuoto mentre è più bassa per dielettrici solidi. Se il generatore impone una tensione che varia nel tempo con legge sinusoidale, la distanza che tale tensione percorre in un periodo è detta **lunghezza d'onda λ** :

Lunghezza
d'onda

$$\lambda = u \cdot T$$

1

con u = velocità di propagazione e T = periodo della tensione sinusoidale. Sarà allora anche:

$$\lambda = \frac{u}{f}$$

2

Ammissa $u = c = 3 \cdot 10^8$ m/s, si ottengono le lunghezze d'onda: $\lambda = 6000$ km per $f = 50$ Hz, $\lambda = 100$ m per $f = 3$ MHz, $\lambda = 10$ cm per $f = 3$ GHz. Come si vede, il ritardo tra generatore e carico diventa importante per linee tanto lunghe (oppure per frequenze così elevate) per cui vi sia una parte apprezzabile del periodo presente sulla linea di collegamento. In questi casi il ritardo può essere espresso più convenientemente in termini di lunghezza d'onda.

Lo studio dei canali di trasmissione deve essere affrontato con le teorie delle onde elettromagnetiche *se la lunghezza del mezzo trasmissivo è confrontabile con $1/4$ di lunghezza d'onda*. Negli altri casi esistono metodi di studio più semplici come, in particolare, la teoria usata nel capitolo 2 per i circuiti a regime sinusoidale. In tali circostanze si parla di tensioni e correnti e dei loro angoli di fase, mentre *se la dimensione della linea diventa confrontabile con $1/4$ di lunghezza d'onda occorre operare in termini di campo elettrico e campo magnetico*. Nei prossimi paragrafi sarà affrontato lo studio della propagazione del campo elettromagnetico in canali su supporto metallico, su fibre ottiche e nello spazio vuoto.

2 Canali di trasmissione su mezzi metallici

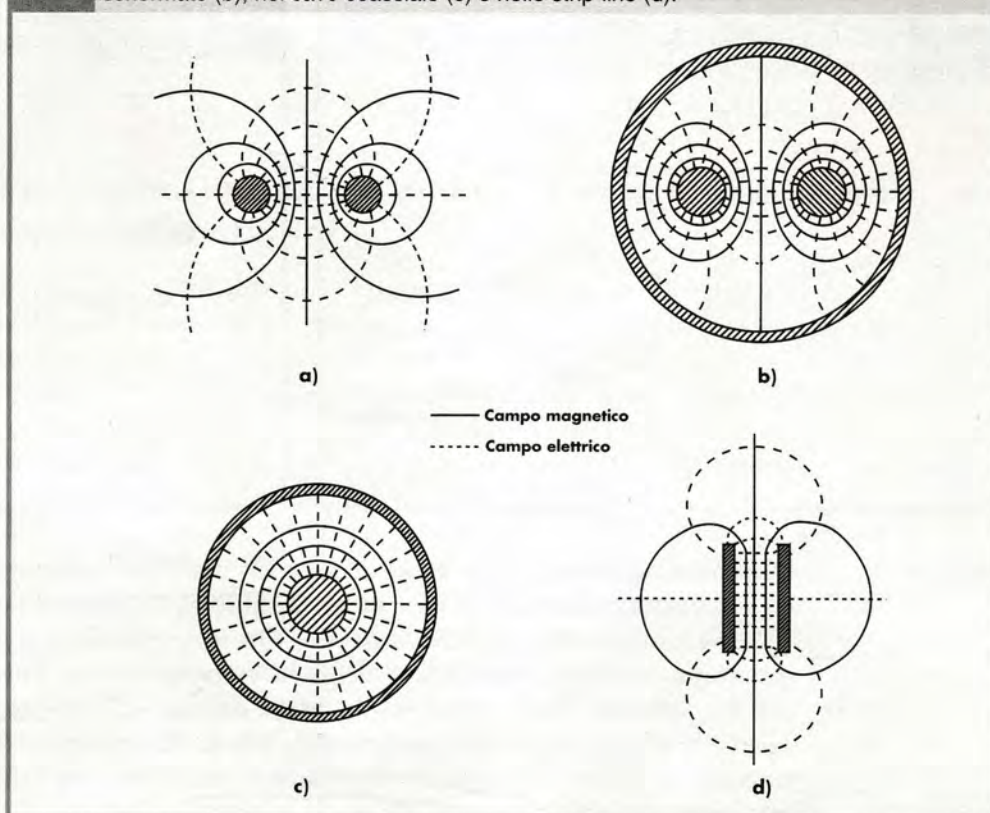
L'uso di una linea per la trasmissione di potenza in corrente alternata è lo scopo principale quando la distanza tra generatore e carico è piccola nei confronti del quarto di lunghezza d'onda (è il caso classico delle linee di distribuzione dell'energia elettrica alla frequenza di rete di 50 Hz). A lunghezze d'onda più piccole lo scopo principale non è più legato alla trasmissione di potenza (anche se questo è un aspetto sempre presente), ma *l'informazione da inviare assume la veste predominante*.

Tipi di linee

I supporti metallici più frequentemente utilizzati sono la **linea bifilare**, le **coppie schermate**, il **cavo coassiale** e le **strip-line**.

La figura 4 mostra la configurazione delle linee di forza del campo elettrico (linea tratteggiata) e del campo magnetico (linea continua) nelle diverse disposizioni. La **linea bifilare** è facile da costruire ma, se la distanza tra i due conduttori diventa confrontabile con il quarto di lunghezza d'onda, *il campo elettromagnetico non viene più guidato tra essi ma viene irraggiato nello spazio circostante*. Il campo elettromagnetico irraggiato diviene importante sopra le **decine di MHz** e quindi tale è il limite d'uso delle linee bifilari per la trasmissione dell'informazione. In certi casi si introduce uno schermo intorno ai due conduttori per contenere i campi, come mostrato nella figura 4b.

FIG. 4 Andamento del campo elettrico e di quello magnetico nella linea bifilare (a), nelle coppie schermate (b), nel cavo coassiale (c) e nelle strip-line (d).



La disposizione a *strip-line* è importante nei circuiti stampati dove, per problemi di compatibilità elettromagnetica derivanti dalle normative europee (marchio CE), sono spesso adottate soluzioni di linee di collegamento affacciate su piani di massa. Per la trattazione di tali linee si rimanda comunque a test specializzati.

→ Una *linea coassiale* consiste di un conduttore centrale e di un conduttore esterno a esso concentrico: i due conduttori sono mantenuti separati mediante un materiale dielettrico che riempie lo spazio anulare interno. Se il dielettrico è l'aria, sono utilizzati dischi distanziatori di materiale isolante, posti a passo costante (di solito 0,5 m), per mantenere in posizione i due conduttori. I cavi coassiali vengono classificati in base al diametro in millimetri dei due conduttori utilizzati:

- coassiale standard 2,6/9,5;
- coassialino 1,2/4,4;
- microcoassiale 0,7/2,9.

Spesso il conduttore esterno è realizzato mediante una **calza metallica** e quindi il cavo risulta essere flessibile.

Il cavo coassiale è *autoschermante* e non produce campo elettromagnetico al suo esterno, se ben realizzato e non in prossimità delle terminazioni. Per questa ragione viene utilizzato in buona parte dello spettro elettromagnetico fino a frequenze di circa 3 GHz. Il cavo coassiale, al contrario della linea bifilare, ha una disposizione asimmetrica dei conduttori rispetto alla terra e per questa ragione viene detto **cavo sbilanciato** (*bilanciata* la linea bifilare).

La disposizione di campo evidenziata nella figura 4 è caratteristica nel meccanismo di propagazione della perturbazione elettromagnetica a frequenze relativamente basse. Individuato il *campo elettrico* mediante un vettore \vec{E} e il *campo magnetico* con un vettore \vec{H} entrambi tangenti alle rispettive linee di forza, essi risultano tra loro perpendicolari in ogni punto dello spazio. Inoltre essi sono anche perpendicolari all'asse del mezzo metallico di trasmissione. In altre parole *campo \vec{E} , campo \vec{H} e direzione di propagazione formano tra loro una terna destra di vettori perpendicolari*, come indicato in figura 5 in riferimento al caso coassiale.

FIG. 5 Nel modo principale di propagazione il campo elettrico, quello magnetico e la direzione di propagazione formano una terna di vettori tra loro perpendicolari.

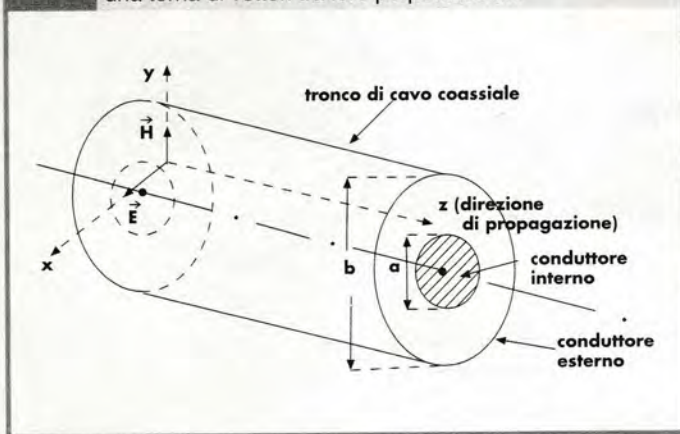
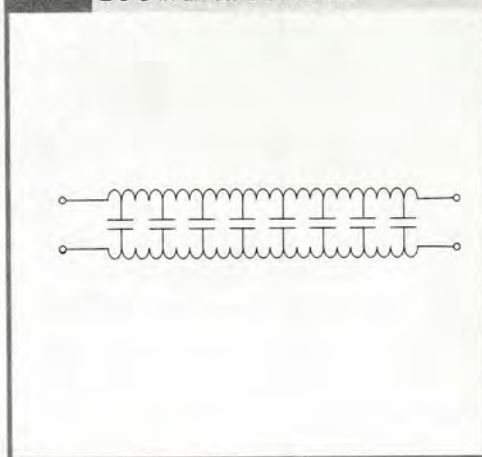


FIG. 6 Evidenziazione dei parametri distribuiti L e C in un cavo coassiale.



Onda TEM

Questo tipo di propagazione viene detto **modo principale** mentre l'onda elettromagnetica confinata in prossimità del mezzo trasmissivo viene anche indicata con la sigla **TEM** (*Transverse Electric and Magnetic*). Questo è il modo tipico di propagazione del campo elettromagnetico che si desidera instaurare in una linea di trasmissione alle frequenze più basse. Non è il solo modo: quando la frequenza diventa tanto alta per cui la lunghezza d'onda è paragonabile con le dimensioni trasversali del mezzo trasmissivo, sono possibili altri modi di propagazione che sono utilizzati nelle cosiddette *guide d'onda*.

Per le normali linee di trasmissione questi "modi alti" sono indesiderati e pertanto la distanza tra i due conduttori che costituiscono il mezzo trasmissivo viene mantenuta inferiore a un quarto della lunghezza d'onda λ . Un'altra ragione per cui la distanza tra i conduttori viene mantenuta inferiore al quarto di lunghezza d'onda è dovuta al fatto che sopra tale valore la linea di trasmissione agisce come un'antenna che irradia una parte notevole del campo elettromagnetico al di fuori del mezzo trasmissivo.

L'analisi della figura 4 mostra che il campo elettrico \vec{E} risulta perpendicolare alle superfici metalliche e il campo magnetico \vec{H} è tangenziale rispetto a tali superfici. Questa è una conseguenza dell'onda TEM che viene imposta volontariamente nel mezzo trasmissivo per rendere minime le perdite di potenza lungo il mezzo stesso. Il risultato viene raggiunto, per ogni tipo di materiale conduttore (rame, oro, argento ecc.) solo per opportuni rapporti tra le dimensioni dei conduttori che realizzano la linea di trasmissione. Se l'onda non è più trasversale le perdite aumentano e questo contribuisce a una attenuazione del campo elettromagnetico che si sta propagando. Lo studio delle linee di trasmissione sarà sempre condotto nell'ipotesi di onda TEM salvo i casi che verranno esplicitamente indicati.

In sintesi (paragrafi 1 e 2)

- 1) La trasmissione dell'informazione a distanza avviene utilizzando il campo elettrico e il campo magnetico.
- 2) Come mezzi trasmissivi di questi campi si usano i conduttori metallici, le fibre ottiche e lo spazio vuoto o in aria.
- 3) Lo studio dei canali di trasmissione deve essere effettuato attraverso l'analisi della propagazione delle onde elettromagnetiche, in quanto si opera a frequenze sufficientemente elevate da far sì che la lunghezza del mezzo trasmissivo sia confrontabile con $1/4$ della lunghezza d'onda.
- 4) I canali di trasmissione con supporto metallico possono essere a due elementi (cavo coassiale, linea bifilare, strip-line ecc.) oppure con supporto singolo (guide d'onda).
- 5) Nel caso di canale di trasmissione con supporto metallico a due elementi il modo di propagazione tipico è il TEM.

193

3 Le costanti primarie di una linea di trasmissione su mezzi metallici

Le linee di trasmissione possono essere analizzate per estensione dei metodi adottati nello studio dei circuiti a **parametri concentrati** (sono così chiamati tutti i circuiti fin qui studiati dove, risultando trascurabile la lunghezza d'onda per i valori bassi delle frequenze in gioco, i parametri circuitale R , L e C si potevano ritenere "concentrati" in ben definiti punti del circuito). Occorre però osservare che ora le grandezze elettriche tipiche R , L e C sono influenzate dalla lunghezza della linea e quindi è necessario considerare grandezze specifiche riferite all'unità di lunghezza, sostituendo quindi ai parametri concentrati i **parametri distribuiti**.

Quando una corrente fluisce nei conduttori di una linea di trasmissione essi si comportano di un flusso di campo magnetico. Se il flusso varia nel tempo, per la legge di Farady-Neumann, sarà indotta una forza elettromotrice (la solita $L \cdot di/dt$ dei circuiti a costanti concentrate) che sarà distribuita in modo uniforme su tutta la linea. L'effetto potrà essere tenuto in debito conto introducendo appunto l'**induttanza L per unità di lunghezza**, uniformemente distribuita lungo la linea di trasmissione. Tra i due conduttori della linea esiste una tensione che dà origine a un accumulo di cariche (la solita $Q = C \cdot V$ che in forma differenziale fornisce $i = C \cdot dv/dt$) distribuito

I parametri distribuiti

lungo la linea di trasmissione: anche in questo caso si tiene conto dell'effetto tramite la **capacità C per unità di lunghezza**. Il comportamento "distribuito" dei parametri L e C è evidenziato in figura 6. L'induttanza distribuita si misura in H/m, mentre la capacità distribuita in F/m.

Oltre ai parametri L e C esiste anche una **resistenza per unità di lunghezza** il cui valore non è, come potrebbe sembrare ovvio, dovuto solamente alla seconda legge di Ohm ma dipende anche dalla frequenza a causa del fenomeno dell'**effetto pelle** (così chiamato per il fatto che al crescere della frequenza la distribuzione della corrente nel conduttore tende ad addensarsi sulla superficie dello stesso, comportando così un aumento della resistenza).

- **Cavo coassiale.** I parametri distribuiti R , L e C sono espressi dalle relazioni:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \ln \frac{b}{a} \quad C = \frac{C_T}{h} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho f \mu_C}{\pi}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad \text{3}$$

dove μ è la **permeabilità magnetica del dielettrico** (nel caso del vuoto $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m), ϵ la **costante dielettrica del dielettrico** (nel caso di spazio vuoto $\epsilon_0 = [1/(36 \cdot \pi)] \cdot 10^{-9}$ F/m), μ_C la **permeabilità magnetica del conduttore** espressa in H/m, ρ è la **resistività in corrente continua del materiale** in $\Omega \cdot m$, f è la frequenza di funzionamento del singolo conduttore cilindrico espressa in Hz, b il diametro del conduttore esterno e a quello del conduttore interno (vedere la figura 5). Nel caso in cui il conduttore sia il rame ($\rho = 0,017 \mu\Omega \cdot m$ e $\mu_C = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m) esprimendo a e b in mm si ha:

$$R = 4,12 \cdot 10^{-5} \sqrt{f} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad [\Omega/m] \quad \text{4}$$

Per i cavi coassiali con dielettrico solido (polietilene o polistirene) diventa importante la **conduttanza trasversale G dovuta alle perdite del dielettrico**. Queste perdite sono determinate dall'isteresi delle molecole del dielettrico le quali vengono polarizzate da una tensione alternata. Analiticamente si potrebbe dimostrare che risulta:

$$G = \text{tg} \delta \cdot \frac{4\pi^2 \cdot \epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \cdot f \quad \text{5}$$

dove $\text{tg} \delta$ è un parametro caratteristico del dielettrico che ne evidenzia le perdite.

Linea bifilare.

$$L = \frac{\mu}{\pi} \cdot \ln \frac{2D}{a} \quad C = \frac{\pi \cdot \epsilon}{\ln \frac{2D}{a}} \quad R = \frac{2}{b} \sqrt{\frac{\rho \cdot f \cdot \mu_C}{\pi}} \quad \text{6}$$

dove a è il diametro dei due conduttori che costituiscono la linea bifilare e D è la distanza tra i conduttori misurata sui loro assi.

Strip-line.

$$L = \mu \frac{b}{a} \quad C = \epsilon \frac{b}{a} \quad R = \frac{2}{b} \sqrt{\rho \cdot f \cdot \mu_C} \quad \text{7}$$

dove a è la distanza tra i conduttori della strip-line e b è la dimensione trasversale della strip-line stessa.

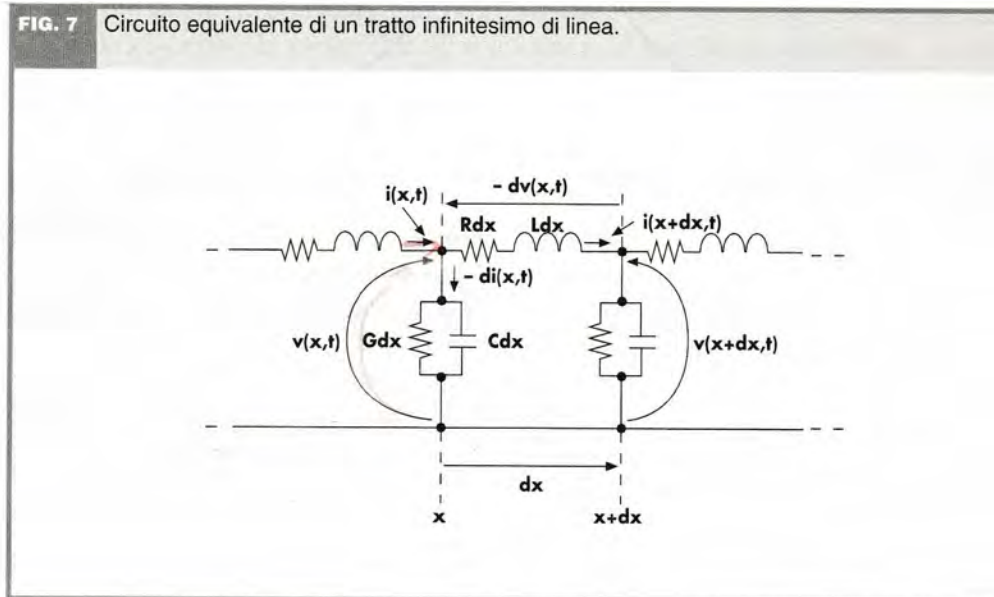
4 La propagazione nelle linee uniformi

Una linea di trasmissione di tipo metallico è caratterizzata dalle sue costanti primarie che sono uniformemente distribuite sulla lunghezza della linea stessa. Si consideri ora un tratto infinitesimo di linea dx : per esso è possibile concentrare in elementi ben definiti i vari contributi delle costanti primarie. In particolare, se L è l'induttanza per unità di lunghezza, l'induttanza del tratto infinitesimo di linea risulta Ldx . In modo analogo la resistenza del tratto infinitesimo è Rdx , la capacità Cdx e la conduttanza trasversale Gdx . Il tutto porta all'interpretazione di figura 7. In particolare, sebbene la resistenza Rdx e l'induttanza Ldx siano concentrate in un unico elemento, esse rappresentano il contributo di entrambi i conduttori del tratto infinitesimo di linea dx . Dalla sezione di ascissa x a quella di ascissa $x + dx$ cambiano la tensione e la corrente di quantità infinitesime a causa delle costanti principali della linea. Per la caduta di tensione lungo il tratto dx si può scrivere:

$$-dv(x, t) = v(x, t) - v(x + dx, t) = Rdx \cdot i(x, t) + Ldx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad \mathbf{8}$$

Nel calcolare la **8** si sono trascurati i contributi infinitesimi di ordine più elevato: visto che il tratto dx considerato è infinitesimo, si può approssimare al valore $i(x, t)$ la corrente pari, invece, a $i(x + dx, t)$. Il segno negativo è necessario perché la variazione infinitesima è definita in matematica come $v(x + dx, t) - v(x, t)$. La derivazione parziale è necessaria perché la tensione dipende sia dall'ascissa x sia dal tempo t .

FIG. 7 Circuito equivalente di un tratto infinitesimo di linea.



Per quanto riguarda la corrente nelle due sezioni si può scrivere:

$$-di(x, t) = i(x, t) - i(x + dx, t) = Gdx \cdot v(x, t) + Cdx \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad \mathbf{9}$$

Dividendo ora la **8** e la **9** per dx si ottiene:

$$-\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = Ri(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad \mathbf{10} \quad -\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = Gv(x, t) + C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad \mathbf{11}$$

Queste sono due equazioni differenziali alle derivate parziali la cui trattazione matematica è alquanto complessa e quindi conviene, per semplificare il problema, considerare una linea priva di perdite ($R = 0, G = 0$).

■ ■ La linea priva di perdite

Supposta la linea priva di perdite, le relazioni **10** e **11** si riducono, a conti fatti alla relazione:

$$\frac{1}{LC} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \mathbf{12}$$

Equazione delle corde vibranti

Questa equazione differenziale del secondo ordine alle derivate parziali è detta **equazione delle corde vibranti** e nel caso specifico si riferisce alla tensione ma può essere ottenuta anche per la corrente.

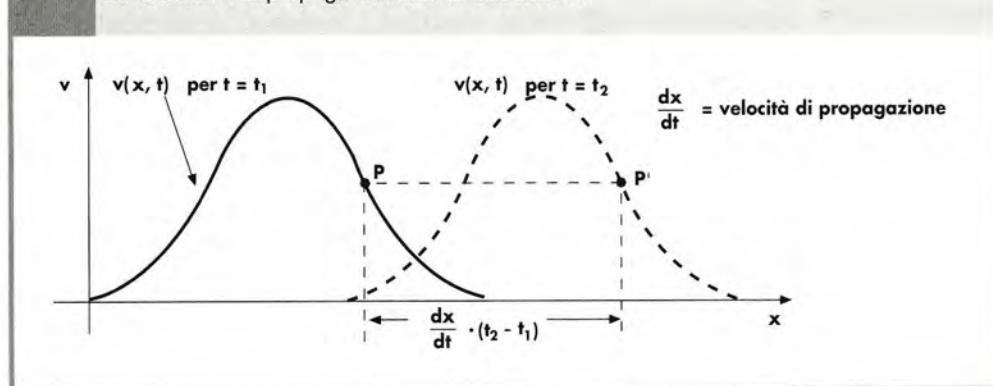
La velocità di propagazione

La risoluzione di questa equazione non è agevole; comunque, a conti fatti, è possibile ricavare la velocità di propagazione della tensione (o corrente) lungo la linea (fig. 8):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \mathbf{13}$$

(l'andamento dell'onda di tensione di figura 8 è puramente indicativo).

FIG. 8 La funzione v si propaga secondo la direzione x .



Potrebbe apparire strano il fatto che il termine $1/\sqrt{LC}$ sia una velocità perché sembra essere la pulsazione di risonanza di un elemento del secondo ordine. In effetti si ricordi che in questo caso L e C sono grandezze specifiche riferite all'unità di lunghezza. Con ciò l'analisi dimensionale mostra:

$$\left[\frac{dx}{dt} \right] = \left[\frac{1}{\sqrt{LC}} \right] = \frac{1}{\sqrt{[L][C]}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{H}{m} \cdot \frac{F}{m}}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega \cdot s \cdot \frac{A \cdot s}{V}}} = \frac{m}{s} \quad \mathbf{14}$$

come deve essere per una velocità.

Per un cavo coassiale si ottiene:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{2\pi} \cdot \ln \frac{b}{a} \cdot \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \mathbf{15}$$

La velocità di propagazione della tensione nel cavo non dipende dalle dimensioni fisiche del cavo ma solo dalle proprietà elettromagnetiche del materiale dielettrico tra i conduttori. Questo è un aspetto generale della questione e può essere verificato anche per altre linee di trasmissione.

Nel caso in cui il dielettrico sia aria (assimilabile al vuoto) la permeabilità magnetica e la costante dielettrica sono μ_0 ed ϵ_0 e risulta $dx/dt \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = c$ (velocità della luce).

La velocità di propagazione della tensione in una linea con dielettrico aria è pari alla velocità della luce nello spazio vuoto. In ogni altro cavo con dielettrico solido, che ha la medesima permeabilità magnetica dell'aria ma costante dielettrica superiore, la velocità del campo elettromagnetico diminuisce.

Introducendo le costanti relative:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad 16$$

la 15 può essere scritta come:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\epsilon_r\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \quad 17$$

Poiché risulta $\mu_r = 1$ si avrà:

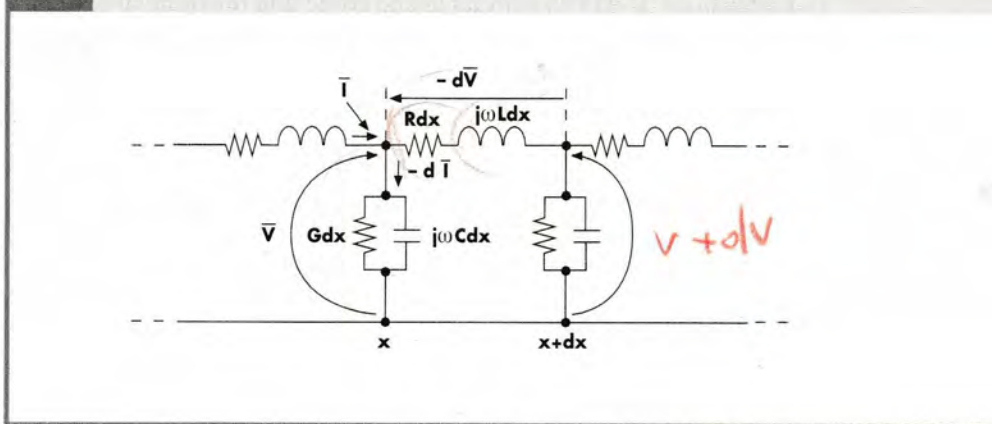
$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad 18$$

Quindi la velocità di propagazione risulta inversamente proporzionale alla radice quadrata della costante dielettrica relativa.

■ ■ Uso dei metodi trasformabili

I metodi trasformabili di Laplace e di Fourier, introdotti nel capitolo 1, consentono una visione più ampia del problema della propagazione e riducono la complessità matematica della soluzione. In particolare, se si interpreta in termini di trasformata e nel dominio di ω il circuito di figura 7 si ottiene quello di figura 9, dove si è evidenziata la natura complessa delle variabili.

FIG. 9 Rappresentazione nel dominio di ω del circuito di figura 7.



Sottintendendo la dipendenza delle variabili dal tempo, da questa figura si ricava subito (trascurando gli infinitesimi di ordine superiore):

$$-d\bar{V} = Rdx\bar{I} + j\omega Ldx\bar{I} \quad 19$$

$$-d\bar{I} = Gdx\bar{V} + j\omega Cdx\bar{V} \quad 20$$

e quindi:

$$\frac{d\bar{V}}{dx} = -(R + j\omega L)\bar{I} \quad 21$$

$$\frac{d\bar{I}}{dx} = -(G + j\omega C)\bar{V} \quad 22$$

Si possono ora introdurre le:

$$\bar{Z} = R + j\omega L \quad 23$$

$$\bar{Y} = G + j\omega C \quad 24$$

che esprimono, rispettivamente, l'impedenza e l'ammettenza per unità di lunghezza della linea. Con ciò si può scrivere:

$$\frac{d\bar{V}}{dx} = -\bar{Z} \cdot \bar{I} \quad 25$$

$$\frac{d\bar{I}}{dx} = -\bar{Y} \cdot \bar{V} \quad 26$$

Per eliminare una variabile si procede con la derivazione rispetto a x delle due relazioni 25 e 26:

$$\frac{d^2\bar{V}}{dx^2} = -\bar{Z} \frac{d\bar{I}}{dx} = -\bar{Z}(-\bar{Y} \cdot \bar{V}) = \bar{Z}\bar{Y}\bar{V} \quad 27 \quad \frac{d^2\bar{I}}{dx^2} = -\bar{Y} \frac{d\bar{V}}{dx} = -\bar{Y}(-\bar{Z} \cdot \bar{I}) = \bar{Y}\bar{Z}\bar{I} \quad 28$$

Equazioni dei telegrafisti

Le due relazioni ottenute governano il meccanismo di propagazione della tensione e della corrente in una linea di trasmissione e sono note come le **equazioni dei telegrafisti**. Sono equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti (rispetto a x ma variabili rispetto a ω) e omogenee. La soluzione può essere ottenuta col metodo di Eulero (per il dettaglio si rimanda la corso di matematica) adottando, per esempio per la tensione:

$$\bar{V}(x) = \bar{A}^+ \cdot e^{-\sqrt{\bar{Z} \cdot \bar{Y}} \cdot x} + \bar{A}^- \cdot e^{\sqrt{\bar{Z} \cdot \bar{Y}} \cdot x} \quad 29$$

dove \bar{A}^+ e \bar{A}^- sono costanti complesse (rispetto a x ma non, in generale, rispetto a ω) con le dimensioni di una tensione e da determinare in base alle condizioni al contorno. Si supponga ora che la costante \bar{A}^- sia nulla:

$$\bar{V}(x) = \bar{V}^+(x) = \bar{A}^+ \cdot e^{-\sqrt{\bar{Z} \cdot \bar{Y}} \cdot x} \quad 30$$

La tensione $\bar{V}^+(x)$ va pensata anche come una funzione di ω (è la trasformata di Fourier della tensione v) anche se ω viene sottintesa quando si opera per ricavare l'andamento in funzione dello spazio x . Passando dal dominio della trasformata a quello del tempo e nell'ipotesi di segnale sinusoidale e \bar{A}^+ reale si potrebbe dimostrare che risulta:

$$v(x, t) = A^+ \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x) = A^+ \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega}x\right)\right] \quad 31$$

dove α e β sono la parte reale e la parte immaginaria della **costante di propagazione** $\bar{\gamma}$:

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\bar{Z} \cdot \bar{Y}} = \alpha + j\beta \quad 32$$

Si è ottenuta una tensione, funzione di x e del tempo t . Quindi si è in presenza di una tensione che *si propaga nella direzione positiva dell'asse x* , con una certa fase in $x = 0$ e che *si attenua al crescere della coordinata x stessa* (l'ampiezza viene moltiplicata per $e^{-\alpha x}$). Nel dominio della trasformata tutto questo è tenuto in debito conto dall'eventuale ampiezza complessa \bar{A}^+ e dell'esponenziale complesso $e^{-\sqrt{\bar{Z} \cdot \bar{Y}} \cdot x}$, con una notevole semplificazione dell'aspetto matematico.

Se ora nella 29 si annulla la costante \bar{A}^+ e si considera la costante \bar{A}^- si ottiene:

$$\bar{V}(x) = \bar{V}^-(x) = \bar{A}^- \cdot e^{\sqrt{\bar{Z} \cdot \bar{Y}} \cdot x} \quad 33$$

che per analogia con i risultati appena ottenuti rappresenterà, nel dominio della trasformata, una tensione che *si propaga nella direzione negativa dell'asse x* .

Onde
progressive e
regressive

La soluzione generale **29** della **27** si compone allora di una tensione che si propaga nella direzione positiva dell'asse x e di una tensione che si propaga nella direzione negativa dell'asse x . Tali tensioni sono dette rispettivamente **onda progressiva di tensione** e **onda regressiva di tensione** e vengono indicate nel dominio del tempo con $v^+(x, t)$ e $v^-(x, t)$. L'interpretazione nel dominio del tempo della **29** porta allora alla:

$$v(x, t) = v^+(x, t) + v^-(x, t) \quad 34$$

Una volta note le onde di tensione date dalla **29**, è possibile ricavare le onde di corrente mediante la **25**:

$$\bar{I}(x) = -\frac{1}{\bar{Z}} \cdot \frac{d\bar{V}(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\bar{Z}/\bar{Y}}} \cdot (\bar{A}^+ \cdot e^{-\sqrt{\bar{Z}/\bar{Y}} \cdot x} - \bar{A}^- \cdot e^{\sqrt{\bar{Z}/\bar{Y}} \cdot x}) \quad 35$$

La rappresentazione nel dominio del tempo porta a una relazione del tipo:

$$i(x, t) = i^+(x, t) - i^-(x, t) \quad 36$$

I due termini individuano la *corrente totale in un punto x della linea a un certo istante di tempo t* e sono l'**onda progressiva di corrente** $i^+(x, t)$ e l'**onda regressiva di corrente** $i^-(x, t)$.

I legami espressi dalla **35** e dalla **29** permettono anche di scrivere:

$$\bar{I}^+(x) = \frac{1}{\sqrt{\bar{Z}/\bar{Y}}} \cdot \bar{V}^+(x) \quad \bar{I}^-(x) = -\frac{1}{\sqrt{\bar{Z}/\bar{Y}}} \cdot \bar{V}^-(x) \quad 37$$

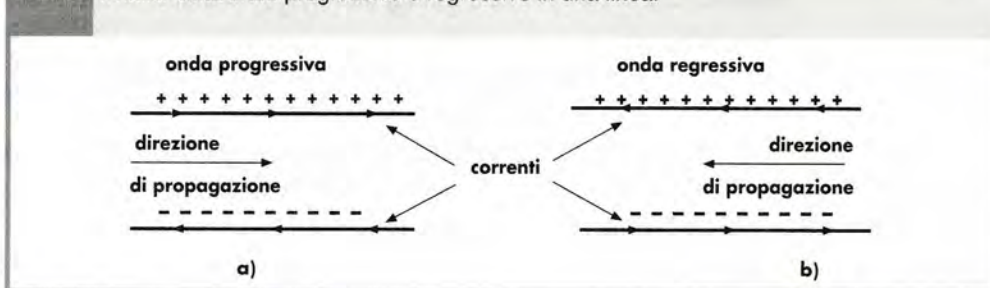
Da queste relazioni si può ricavare un legame tra le onde di tensione e quelle di corrente, il quale assume il significato più generale di impedenza e al quale si dà il nome di **impedenza caratteristica della linea**:

$$\bar{Z}_0 = \frac{\bar{V}^+(x)}{\bar{I}^+(x)} = -\frac{\bar{V}^-(x)}{\bar{I}^-(x)} = \sqrt{\frac{\bar{Z}}{\bar{Y}}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad 38$$

Si osservi che l'impedenza caratteristica della linea *non è l'impedenza posseduta dalla linea ma piuttosto il legame che viene imposto tra le onde di tensione e di corrente*, legame che non dipende dal valore scelto per la coordinata x .

È interessante indagare sul significato del segno negativo che compare nella **36** (onde di corrente) in relazione al segno positivo che compare nella **34** (onde di tensione). Al riguardo si supponga, per semplicità, che l'impedenza caratteristica della linea sia una pura resistenza e si osservino le onde progressive e regressive che si propagano tenendo presente la figura 10. Il "pacchetto" di cariche si sta muovendo nel caso a) nella direzione positiva mentre nel caso b) in direzione negativa. Le correnti sono nei due casi in direzione contraria mentre la tensione è in entrambi nella stessa direzione, ossia è positiva sul conduttore superiore. Quindi per l'onda progressiva tensione e corrente hanno lo stesso segno mentre per l'onda regressiva hanno segno opposto.

FIG. 10 Analisi delle onde progressive e regressive in una linea.



5 Le costanti secondarie di una linea di trasmissione

La costante di propagazione, l'impedenza caratteristica e la velocità di propagazione delle onde sono spesso dette le **costanti secondarie** di una linea (non perché meno importanti ma perché derivano dalla conoscenza delle **costanti primarie** R, G, L e C).

Costante di propagazione

La costante di propagazione è stata definita dalla **32**: se in essa si sostituiscono la **23** e la **24** si ottiene:

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad \text{39}$$

Innanzitutto si deve osservare che la *denominazione di costante di propagazione è impropria* in quanto tale parametro dipende dalla pulsazione ω e quindi *dovrebbe essere più correttamente chiamato col nome di funzione di propagazione*. Essa è comunque, come si è già osservato, un numero complesso la cui parte reale α è detta **costante di attenuazione** e la parte immaginaria β è detta **costante di fase**. Per comprendere le ragioni di queste ultime due definizioni si consideri la **31** e si ponga $t = 0$ e $x = 0$ (ossia l'osservatore si trovi all'inizio della linea al tempo iniziale). Si otterrà:

$$V_M(0, 0) = A^+ \cdot e^0 \cdot \cos 0 = A^+ \quad \text{40}$$

La scelta adottata di costante A^+ reale comporta che questa sia pari al valore massimo della cosinusoide mentre, per altre scelte complesse, si sarebbero ottenuti valori diversi (per $x = 0$ e $t = 0$) dal valore massimo. La sostituzione della **40** nella **31** porta a:

$$v(x, t) = V_M(0, 0) \cdot e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) \quad \text{41}$$

Il risultato è una cosinusoide variabile in fase col tempo t e con la distanza x mentre l'ampiezza massima varia con la distanza secondo:

$$V_M(x) = V_M(0, 0) \cdot e^{-\alpha x} \quad \text{42}$$

Significato di α

Per $\alpha > 0$ (come si ha nella realtà) l'ampiezza dell'onda di tensione decresce con la distanza e questo spiega il nome di costante di attenuazione assegnato al parametro. La **41** suggerisce come determinare α :

$$\alpha = -\frac{1}{x} \cdot \ln \frac{V_M(x)}{V_M(0, 0)} \quad \text{43}$$

Visto che sono utilizzati i logaritmi naturali, l'unità di misura è di Np/m (Np = neper; il valore in Np di un rapporto è pari al logaritmo naturale del rapporto stesso se questo si riferisce a tensioni o correnti oppure a 1/2 del logaritmo naturale del rapporto se questo si riferisce a potenze).

Si osservi ora che se $R = 0$ e $G = 0$ (linea priva di perdite) la **39** diviene, tenendo presente che la componente immaginaria della costante di attenuazione è β :

$$\bar{\gamma} = \sqrt{-\omega^2 LC} = j\omega \sqrt{LC} = j\beta \quad \text{44}$$

ovvero la parte reale α è nulla: la costante di propagazione è individuata solo dalla costante di fase. Questo significa che *se non esistono le componenti reali della impedenza Z e dell'ammettenza Y (linea priva di perdite) non si ha attenuazione nelle onde di tensione e di corrente*.

Costanti di attenuazione e di fase

Nel caso di $\alpha = 0$ ($R = 0$, $G = 0$, ovvero linea priva di perdite) dalla 33 si avrà anche:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad 45$$

Si noti come in queste condizioni ideali l'impedenza caratteristica risulti puramente reale e quindi resistiva.

Significato di β
.....

Per comprendere l'influenza della parte immaginaria β della costante di propagazione, si consideri ora $\alpha = 0$. La 41 diventa:

$$v(x, t) = V_M(0, 0) \cdot \cos(\omega t - \beta x) \quad 46$$

L'ampiezza della cosinusoide rimane costante mentre si propaga e nel caso in cui si fissi un certo istante si otterrà un "flash" della situazione della linea nell'istante considerato. La fase $(\omega t - \beta x)$ dipende sia dal tempo, sia dallo spostamento: la pulsazione ω è la costante che stabilisce il legame fase-tempo mentre β è la costante che stabilisce il legame fase-spazio. Per tale ragione β viene detta la costante di fase (spaziale). Un tempo crescente comporta un incremento dell'argomento del coseno; una coordinata crescente comporta una diminuzione dell'argomento del coseno. Una variazione di fase di 2π potrà essere ottenuta con cambiamento nel tempo pari al periodo:

$$2\pi = \omega \cdot T \quad 47a$$

oppure con una distanza tra due punti di pari fase. Tale distanza è detta appunto **lunghezza d'onda** (spazio percorso dall'onda quando trascorre un tempo pari al periodo):

$$2\pi = \beta \cdot \lambda \quad 47b$$

Per quanto riguarda le unità di misura, la costante di propagazione si misura in m^{-1} , ω si misura in rad/s (oppure $^\circ/s$) e β si misura in rad/m (oppure $^\circ/m$).

In una linea ideale (senza perdite) la 44 assicura che la costante di propagazione si riduce esclusivamente alla costante di fase poiché si ottiene un numero puramente immaginario.

ESEMPIO 1

Una linea telefonica tipica in aria è caratterizzata dalle seguenti costanti primarie:

$$R = 6,2 \, \Omega/\text{km}, \quad L = 2,3 \, \text{mH}/\text{km}, \quad C = 5,2 \, \text{nF}/\text{km}, \quad G = 0,25 \, \mu\text{S}/\text{km}$$

La costante di propagazione alla frequenza di 1 kHz risulta:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \\ &= \sqrt{(6,2 + j2\pi \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 2,3 \cdot 10^{-3})(0,25 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 5,2 \cdot 10^{-9})} \approx \\ &\approx 2,26 \cdot 10^{-2} \angle 78,2^\circ \approx (4,62 \cdot 10^{-3} + j22,1 \cdot 10^{-3}) \, \text{km}^{-1} \end{aligned}$$

Quindi: $\alpha = 4,62 \cdot 10^{-3} \, \text{Np}/\text{km}$ e $\beta = 22,1 \cdot 10^{-3} \, \text{rad}/\text{km}$. Questo significa che, ricordando la 43, la tensione sinusoidale si dimezza con una distanza di:

$$x = -\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{V_M(x)}{V_M(0, 0)} = \frac{1}{4,62 \cdot 10^{-3}} \cdot \ln 0,5 \approx \frac{1}{4,62 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,693 \approx 150 \, \text{km}$$

Una variazione di fase di 2π si avrà con una distanza x (che corrisponde alla lunghezza d'onda) pari a (dalla 47b):

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{22,1 \cdot 10^{-3}} \approx 284,3 \, \text{km}$$

Il lettore verifichi quanto accade, per esempio, per una frequenza di 10 kHz.

■ ■ Impedenza caratteristica

L'impedenza caratteristica di una linea è stata definita dalla **38** ed è, in generale, un numero complesso caratterizzato, in forma polare, da un modulo e da un argomento. Il modulo stabilisce il legame tra il valore della tensione e della corrente nelle onde progressiva e regressiva, l'argomento stabilisce il legame di fase temporale tra la tensione e la corrente. L'*impedenza caratteristica* è importante per la sua funzione di sfasamento temporale in un ben determinato punto della linea e quindi è un *parametro "temporale"*. Si è già visto che, nel caso di linea ideale, essa si riduce a un numero reale (tensione e corrente variano nel tempo con la medesima fase) indipendente dalla frequenza, mentre, in generale, essa dipende da ω . Si osservi che l'*impedenza caratteristica non dipende dalla lunghezza della linea di trasmissione* ma solo dalle sue proprietà elettromagnetiche. Per quanto riguarda l'unità di misura, essa è espressa in (si ricordi la **38**):

$$[\bar{Z}_0] = \sqrt{\frac{\Omega/m}{S/m}} = \Omega \quad \mathbf{48}$$

■ ■ Velocità di propagazione

Per quanto riguarda la velocità di propagazione, si immagini un osservatore che sia "a cavallo" dell'onda di tensione in propagazione. Per lui la fase del segnale di tensione è costante, ossia:

$$\varphi = \omega t - \beta x = \text{cost} \quad \mathbf{49}$$

Velocità di fase

Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u_f = \frac{\omega}{\beta} \quad \mathbf{50}$$

La dx/dt è la velocità con cui si sposta l'onda di tensione nella linea. La velocità ottenuta è detta **velocità di fase**. Si osservi che l'onda di tensione è di tipo sinusoidale e si intende instaurata sulla linea da tempo infinito perché si estende tra $-\infty$ e ∞ . In altre parole il transitorio deve essere esaurito e non ci devono essere altri segnali che interferiscano con il puro segnale trigonometrico considerato. Questo segnale non può sicuramente trasportare informazione perché non può generare nel ricevitore alcuna "sorpresa". Trasporta però energia tra un generatore che impone la tensione sulla linea e un carico che la può ricevere. L'energia trasportata non potrà propagarsi, qualunque sia il mezzo considerato, a una velocità superiore a quella della luce perché ciò andrebbe contro il postulato espresso da Einstein nella relatività ristretta (*gli oggetti che trasportano energia si muovono con una velocità massima pari alla velocità della luce*). Dalla **44**, e quindi nel caso di linea priva di perdite, si ricava:

$$\rightarrow u_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \mathbf{51}$$

come si era già ottenuto per altra via con la **13**. *Se ne deduce che la velocità di fase coincide con la velocità di propagazione dell'energia in una linea*. Alla velocità di fase il segnale in partenza dal generatore impiega, per arrivare a destinazione, un tempo chiamato **ritardo di fase** dovuto alla distanza l che separa il generatore dal carico:

Ritardo di fase

$$\tau_f = \frac{l}{u_f} = \frac{l \cdot \beta}{\omega} = l \sqrt{LC} \quad \mathbf{52}$$

Il termine $l \cdot \beta$ è la fase totale che esiste per il segnale in propagazione dal generatore alla destinazione e quindi:

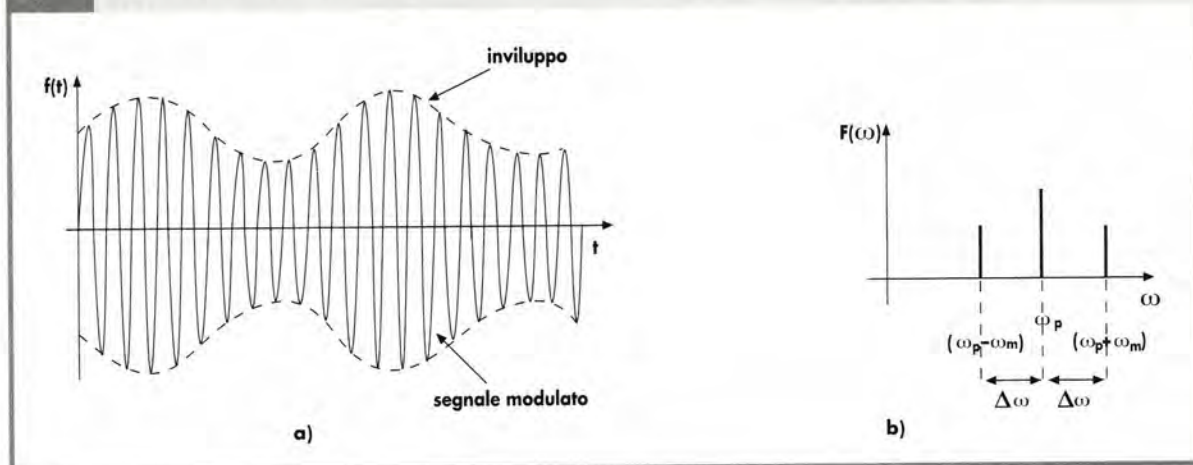
$$\tau_f = \frac{\varphi_{\text{tot}}}{\omega} \quad \mathbf{53}$$

Diverso è invece il caso in cui si desideri trasmettere informazione, cosa che non potrà essere ottenuta con la semplice onda sinusoidale pura fino a ora considerata. Una tra le tecniche adottate è la **modulazione di ampiezza** che consiste *nel modificare l'ampiezza del segnale sinusoidale di base (carrier: portante) con pulsazione ω_p , in relazione all'informazione da trasmettere* (si veda al riguardo il capitolo 10). Si immagini allora, per semplicità, che la variazione dell'ampiezza, dovuta alla modulazione, sia anch'essa di tipo sinusoidale con pulsazione ω_m : si otterrà la situazione indicata in figura 11a. Lo studio della modulazione, che verrà affrontato nel capitolo 10, porta a concludere che tale segnale ha uno spettro delle ampiezze che si compone di tre righe, come indicato in figura 11b. A questo spettro corrispondono tre segnali che sovrapposti danno quello di figura 11a.

In linea generale a ognuna di queste frequenze corrisponde una diversa velocità di fase e quindi si rende necessario introdurre la velocità del segnale composto ottenuto dalla modulazione. Questa nuova velocità *esprime la velocità dell'involuppo del segnale*, intendendosi per involuppo la linea immaginaria che unisce i picchi del segnale modulato (linee tratteggiate in figura 11a). Questa velocità deve tenere conto delle variazioni $\Delta\omega$ e $\Delta\beta$ che si verificano passando da ω_p a $(\omega_p - \omega_m)$ e da ω_p a $(\omega_p + \omega_m)$; pertanto tenendo presente la 50 si può scrivere:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta \beta} \quad 54$$

FIG. 11 Esempio di segnale modulato in ampiezza (a) e relativo spettro in rappresentazione unilatera (b).



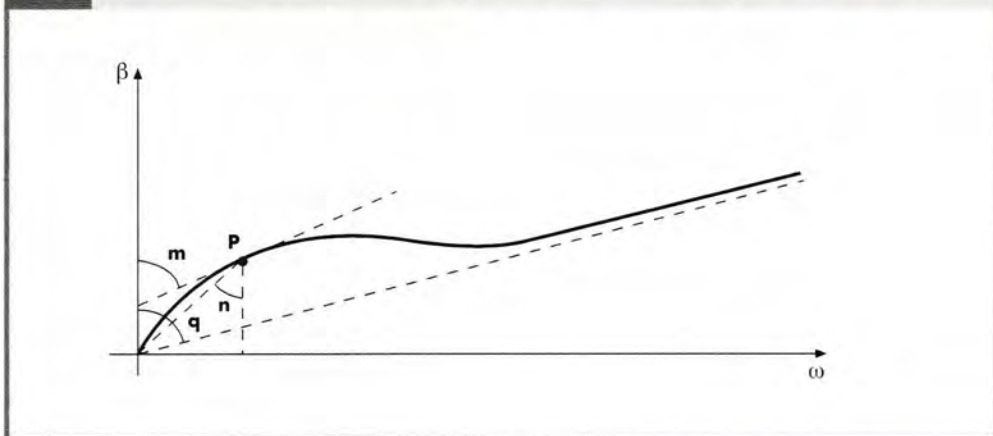
Velocità di gruppo

Se si considerano variazioni infinitesime si ottiene quella che viene indicata come **velocità di gruppo** poiché essa è la velocità con cui si propagano i segnali la cui pulsazione è compresa nell'intervallo $d\omega$:

$$\frac{dx}{dt} = u_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad 55$$

Interessante può essere un'analisi grafica del problema, facendo riferimento alla figura 12 di pagina seguente dove si suppone appunto β variabile rispetto a ω . Le velocità di fase e di gruppo nel punto P sono individuate, rispettivamente, dalla \tan e dalla \tan e quindi, in generale, non coincidono se non in particolari circostanze. Una di queste si verifica quando esiste tra ω e β un legame di proporzionalità diretta: è il caso del tratto finale del grafico di figura 12 dove i valori della velocità di fase e di gruppo coincidono col valore \tan . Per una piena comprensione di queste affermazioni si tengano presenti la 50 e la 55.

FIG. 12 Valutazione della velocità di fase, pari a $\text{tg} n$, e della velocità di gruppo, pari a $\text{tg} m$.



Ritardo di gruppo

Analogamente a quanto fatto per il ritardo di fase si può introdurre il **ritardo di gruppo** per una linea di lunghezza l :

$$\tau_g = \frac{l}{u_g} = \frac{l \cdot d\beta}{d\omega} = \frac{d\varphi}{d\omega} \quad 56$$

dove $d\varphi$ è la variazione di fase con la distanza che compete a una variazione $d\omega$ della pulsazione.

Se si impone che la velocità di gruppo sia rigorosamente costante (in teoria a tutte le frequenze, in pratica nell'ambito dello spettro del segnale modulante) tutte le armoniche hanno la stessa velocità, ovvero la velocità di gruppo coincide con la velocità di fase, e quindi arrivano con la stessa fase all'estremità ricevente. Se poi tali armoniche vengono attenuate tutte in modo uguale lungo la linea, la ricostruzione del segnale all'estremità ricevente fornisce la copia esatta (ridotta in ampiezza) del segnale originale. In altre parole *si ottiene una linea senza distorsione*. Sotto tali ipotesi integrando la 55, supposta $u_g = \text{cost}$, si ottiene:

$$\omega = u_g \cdot \beta \quad 57$$

ossia deve esserci *proporzionalità diretta tra pulsazione ω (costante di fase temporale) e β (costante di fase spaziale)*. Questa relazione è anche giustificabile ricordando quanto esposto a commento della figura 12: se le due velocità coincidono, tra ω e β esiste proporzionalità diretta.

Condizione di Heawiside

Una linea non distorcente può essere ottenuta se la costante di propagazione soddisfa alla seguente **condizione (di Heawiside)** che per semplicità non si giustifica:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \eta \quad 58$$

In tal caso dalla 39 per $\bar{\gamma}$ si potrà eseguire immediatamente la sua scomposizione in parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \sqrt{L\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)C\left(\frac{G}{C} + j\omega\right)} = \sqrt{LC(\eta + j\omega)^2} = (\eta + j\omega)\sqrt{LC} = \\ &= \eta\sqrt{LC} + j\omega\sqrt{LC} \end{aligned} \quad 59$$

L'identificazione dell'attenuazione e della costante di fase porta a:

$$\alpha = \eta\sqrt{LC} = \sqrt{RG} \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \quad 60$$

Le 60 sono note come **condizioni di non distorsione**:

- l'attenuazione α non dipende dalla frequenza e quindi tutte le armoniche dello spettro sono attenuate nello stesso modo;
- la costante di fase spaziale β è in proporzione alla costante di fase temporale ω .

Confrontando la 57 con la seconda delle 60 si scopre che:

$$u_g = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 61$$

Tenendo presente la 51 si vede che una linea priva di perdite presenta una velocità di fase coincidente con la velocità di gruppo di una linea non distorcente: ovvero una linea priva di perdite (ideale) è sempre non distorcente.

6 Le linee caricate

La soluzione 29 dell'equazione dei telegrafisti ha permesso di evidenziare le caratteristiche salienti delle linee, in relazione alle loro costanti primarie e secondarie. Occorre però definire i diversi risultati a cui si perviene tenendo conto delle cosiddette "condizioni al contorno", condizioni che per ogni equazione differenziale consentono l'eliminazione delle costanti arbitrarie e che, nel caso specifico delle linee di trasmissione, individuano in modo univoco la situazione elettrica che in esse si instaura. Si consideri allora la soluzione generale 29 dell'equazione dei telegrafisti e si immagini che la linea con cui deve essere messa in relazione sia di lunghezza infinita. Questa è un vincolo particolare al problema della propagazione in una linea (è una condizione al contorno) che imporrà la sua influenza sulla particolare soluzione ottenibile dalla soluzione generale 29. In tale relazione il termine legato alla costante \bar{A}^- tende all'infinito quando la distanza x diventa infinitamente grande. La tensione nella linea diventerebbe infinitamente grande e, in conseguenza, anche l'energia contenuta nella linea. Questo è impossibile dal punto di vista fisico e quindi, con una linea infinita, la costante \bar{A}^- deve essere nulla. In altri termini si può dire che l'onda progressiva si propaga lungo la linea a partire dal generatore, mentre l'onda regressiva è dovuta a quella quota di energia posseduta dall'onda progressiva che, arrivata al termine della linea, non viene assorbita e determina il "rimbalzo", che provoca l'onda regressiva. In una linea infinita, poiché l'onda progressiva non può mai raggiungere la fine della linea, il rimbalzo non c'è e quindi l'onda regressiva è nulla.

La 29 si riduce allora alla 30, che si riporta per comodità:

$$\bar{V}(x) = \bar{A}^+ \cdot e^{-\sqrt{Z \cdot Y} \cdot x} \quad 62$$

Si consideri ora la linea alimentata da un generatore come in figura 13 (nella pagina successiva): in $x = 0$ si avrà una tensione \bar{E}_S (nel dominio della trasformata). La \bar{E}_S può essere ricavata imponendo nella 62 $x = 0$:

$$\bar{E}_S = \bar{V}(0) = \bar{A}^+ \cdot e^{-\sqrt{Z \cdot Y} \cdot 0} = \bar{A}^+ \quad 63$$

Quindi:

$$\bar{V}(x) = \bar{E}_S \cdot e^{-\sqrt{Z \cdot Y} \cdot x} = \bar{E}_S \cdot e^{-\tilde{\gamma} \cdot x} \quad 64$$

Introducendo l'attenuazione α e la costante di fase β si ottiene:

$$\bar{V}(x) = \bar{E}_S \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{-j\beta \cdot x} \quad 65a$$

Se si ricorda la **35**, è possibile ricavare l'espressione per la corrente (imponendo $\bar{A}^- = 0$ e $\bar{A}^+ = \bar{E}_s$):

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{E}_s}{\bar{Z}_0} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{-j\beta \cdot x} \quad \text{65b}$$

La **65a** e la **65b** sono l'espressione analitica delle onde progressive di tensione e di corrente. Da un loro confronto si ricava:

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{V}(x)}{\bar{Z}_0} \quad \text{66}$$

relazione che si applica in ogni punto della linea.

La **66** si applica anche per $x = 0$ e quindi all'entrata di una linea di lunghezza infinita si vede un legame tra tensione e corrente pari a \bar{Z}_0 : l'impedenza assume ora il significato già noto di impedenza equivalente vista dai morsetti di ingresso della linea. Si supponga ora di tagliare la linea infinita in un punto intermedio qualsiasi $x = l$ come in figura 14. La linea alla destra del taglio possiede ancora lunghezza infinita e quindi presenta una impedenza d'entrata pari a \bar{Z}_0 . Quindi per la porzione di linea alla sinistra del taglio l'inserzione di una impedenza di carico \bar{Z}_R pari a \bar{Z}_0 non altera la situazione elettrica: le relazioni **65a** e **65b** sono ancora valide.

FIG. 13 Linea di lunghezza infinita alimentata da un generatore.

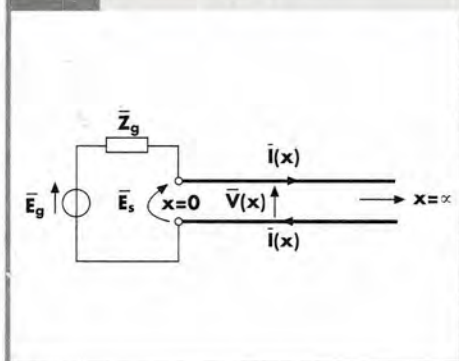
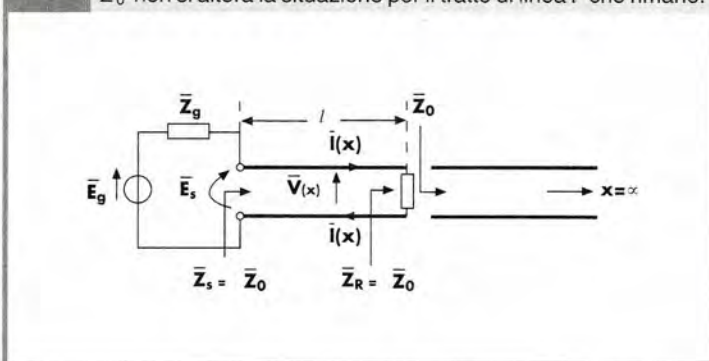


FIG. 14 Se in una linea di lunghezza infinita si effettua un taglio e si sostituisce il tratto di linea tolto con un carico di impedenza \bar{Z}_0 non si altera la situazione per il tratto di linea l che rimane.



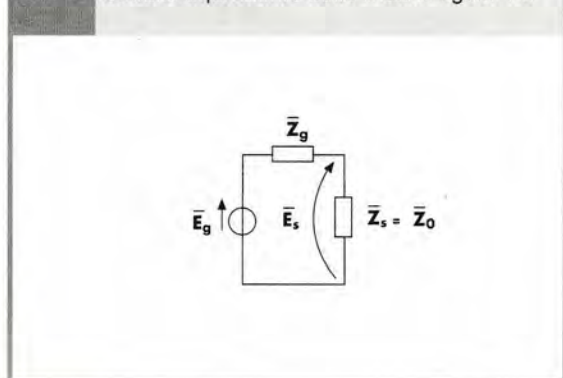
Linea di lunghezza finita chiusa su \bar{Z}_0

Linea adattata

L'impedenza d'entrata è ancora pari a \bar{Z}_0 qualunque sia la lunghezza l scelta: una linea di impedenza caratteristica \bar{Z}_0 quando è chiusa su una impedenza di carico pari a \bar{Z}_0 presenta una impedenza d'entrata pari a \bar{Z}_0 . Quando una linea di trasmissione è chiusa su una impedenza di carico pari alla sua impedenza caratteristica, la linea si dice **adattata**. In una linea adattata l'energia contenuta in pari entità nel campo elettrico e nel campo magnetico si trasmette dal generatore al carico e viene da quest'ultimo completamente assorbita (e quindi non esiste onda regressiva perché si comporta come una linea di lunghezza infinita).

Per ricavare la tensione \bar{E}_s in entrata basta considerare il circuito di figura 15 e si ottiene:

FIG. 15 Circuito equivalente della linea di figura 14.



$$\bar{E}_s = \bar{E}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \quad \text{67}$$

Nota la **67**, la **65a** e la **65b** consentono di calcolare la tensione e la corrente in ogni punto della linea.

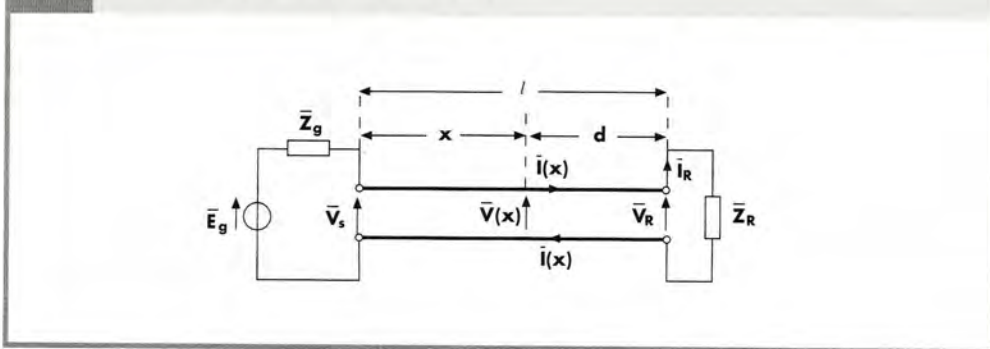
Una linea di lunghezza infinita ha evidentemente utilità solo a fini speculativi, nella realtà assume interesse il caso di una linea chiusa su un carico.

Linee di lunghezza finita

Linea chiusa su un carico

Si consideri ora una linea chiusa su un carico generico non necessariamente uguale all'impedenza caratteristica della linea, come in figura 16.

FIG. 16 Linea chiusa su un generico carico \bar{Z}_R .



Per quanto sin qui detto, saranno presenti sia l'onda progressiva che quella regressiva di tensione e di corrente, ovvero varranno in ogni punto della linea le relazioni **29** e **35**. Se le onde in questione vengono espresse in funzione della distanza $d = l - x$ dal carico e si eseguono i rapporti tra le onde regressive e quelle progressive, a conti fatti (che si omettono), si ottiene:

$$\bar{\Gamma}_V(d) = \frac{\bar{V}^-(d)}{\bar{V}^+(d)} = \frac{\bar{Z}_R - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_0} e^{-2\bar{\gamma}d} \quad \bar{\Gamma}_I(d) = \frac{\bar{I}^-(d)}{\bar{I}^+(d)} = -\frac{\bar{Z}_R - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_0} e^{-2\bar{\gamma}d} \quad \mathbf{68}$$

con:

$$\bar{V}(d) = \frac{\bar{I}_R}{2} \left[(\bar{Z}_R + \bar{Z}_0) \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot d} + (\bar{Z}_R - \bar{Z}_0) \cdot e^{-\bar{\gamma}d} \right] \quad \mathbf{69a}$$

$$\bar{I}(d) = \frac{\bar{I}_R}{2\bar{Z}_0} \left[(\bar{Z}_R + \bar{Z}_0) \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot d} - (\bar{Z}_R - \bar{Z}_0) \cdot e^{-\bar{\gamma}d} \right] \quad \mathbf{69b}$$

I due coefficienti sono numeri complessi *tra loro sfasati di 180°* e sono funzione della distanza d tra il carico e il punto preso in considerazione. Sul carico, alla fine della linea, la prima delle **68** dà:

$$\bar{\Gamma}_V(0) = \frac{\bar{V}^-(0)}{\bar{V}^+(0)} = \frac{\bar{Z}_R - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_0} = \bar{\Gamma}_R \quad \mathbf{70}$$

Il rapporto tra l'onda progressiva sul carico (**onda incidente**) e l'onda regressiva dal carico (**onda riflessa**) è dovuto esclusivamente alla differenza tra i valori della impedenza caratteristica della linea e l'impedenza del carico (in una linea di lunghezza finita e chiusa su un carico i nomi di onda diretta e riflessa meglio evidenziano il comportamento fisico della linea rispetto a quelli di onda progressiva e regressiva che, invece, meglio si adattano a una linea di lunghezza infinita). Tale rapporto, definita la linea, dipende solo dal carico e pertanto viene spesso indicato come **coefficiente di riflessione del carico**. Si osservi che, essendo $\bar{\Gamma}_I = -\bar{\Gamma}_V$, esiste uno sfasamento di 180° tra l'onda riflessa di corrente e l'onda riflessa di tensione.

Coefficienti di riflessione

In ogni punto della linea esiste un'onda regressiva che è conseguenza della riflessione che avviene sul carico a causa del disadattamento (differenza) che esiste tra l'impedenza del carico e l'impedenza caratteristica della linea. Nel caso di linea adattata ($\bar{Z}_R = \bar{Z}_0$) tale riflessione non si verifica, visto che i coefficienti $\bar{\Gamma}_V$ e $\bar{\Gamma}_I$ si annullano. Pertanto a questi coefficienti, espressi dalle 63, si dà il nome di **coefficienti di riflessione di tensione e di corrente**.

I coefficienti di riflessione sono numeri complessi e come tali possono essere espressi mediante il loro modulo e la relativa fase:

$$\bar{\Gamma} = |\bar{\Gamma}_R| \cdot e^{j\vartheta} \quad 71$$

Il modulo $|\bar{\Gamma}_R|$ esprime il rapporto tra il modulo della tensione riflessa e il modulo della tensione incidente, mentre ϑ individua lo sfasamento tra la tensione riflessa e quella incidente. Spesso si introduce anche quello che viene chiamato il **return loss** (attenuazione di riflessione) espresso in unità logaritmiche:

$$R_L = 20 \log \frac{|\bar{V}^+(0)|}{|\bar{V}^-(0)|} = -20 \log |\bar{\Gamma}_R| \quad 72$$

Il return loss esprime quanto si perde in riflessione rispetto al caso in cui essa sia massima: tutta la tensione incidente viene riflessa quando $R_L = 0$ (onda riflessa pari all'onda diretta). Sostituendo invece la 70 nelle 68:

$$\bar{\Gamma}_V(d) = \bar{\Gamma}_R \cdot e^{-2\bar{\gamma}d} \quad \bar{\Gamma}_I(d) = -\bar{\Gamma}_R \cdot e^{-2\bar{\gamma}d} \quad 73$$

Le relazioni precedenti consentono di individuare il coefficiente di riflessione in ogni punto della linea se è noto il coefficiente di riflessione sul carico. Si osservi come, a partire dal carico, una variazione della distanza d comporti un effetto doppio nell'attenuazione e nella fase tra l'onda riflessa e quella incidente: in effetti ci si allontana dalla zona di riflessione e si va incontro, contemporaneamente, all'onda che sta per incidere.

Si considerino ora le 69 che forniscono in ogni punto della linea, rispettivamente, il valore della tensione e della corrente totali in essa presenti. Se si esegue il rapporto della tensione e della corrente totali per ogni punto della linea, si ottiene il valore dell'**impedenza equivalente della linea**, vista appunto come legame tra la tensione e la corrente presenti nella linea stessa:

$$\bar{Z}(d) = \frac{\bar{V}(d)}{\bar{I}(d)} = \bar{Z}_0 \frac{(\bar{Z}_R + \bar{Z}_0) \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot d} + (\bar{Z}_R - \bar{Z}_0) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot d}}{(\bar{Z}_R + \bar{Z}_0) \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot d} - (\bar{Z}_R - \bar{Z}_0) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot d}} \quad 74a$$

Si osservi che l'impedenza $\bar{Z}(d)$ della linea differisce dalla sua impedenza caratteristica \bar{Z}_0 che esprime, come già osservato, un legame fisico di propagazione tra onda di tensione e onda di corrente. L'impedenza $\bar{Z}(d)$ della linea assume invece il solito significato circuitale di legame, in modulo e fase, tra corrente e tensione totali. In particolare, la fase dell'impedenza in ogni punto darà uno sfasamento temporale tra la tensione e la corrente nel punto considerato. Nel caso in cui $d = 0$ (sul carico) si ottiene, come deve essere, $\bar{Z}(d) = \bar{Z}_R$ e il legame di modulo e fase temporale è imposto dal carico; mentre per $d \rightarrow \infty$ si vede subito che $\bar{Z}(d) \rightarrow \bar{Z}_0$ (perché ci si riconduce al caso di linea infinita). Si noti anche che per $d \rightarrow \infty$ i coefficienti di riflessione espressi dalle 68 tendono a zero, come è giusto che sia, visto che in una linea di lunghezza infinita, alimentata da un generatore, le onde di tensione e di corrente, non raggiungendo mai il carico, non possono produrre le onde riflesse.

Return loss

Impedenza equivalente

Ritornando alla **74a** conviene introdurre il coefficiente di riflessione:

$$\begin{aligned}\bar{Z}(d) &= \bar{Z}_0 \frac{(\bar{Z}_R + \bar{Z}_0) \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot d} \cdot \left(1 + \frac{\bar{Z}_R - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_0} \cdot e^{-2\bar{\gamma} \cdot d}\right)}{(\bar{Z}_R + \bar{Z}_0) \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot d} \cdot \left(1 - \frac{\bar{Z}_R - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_0} \cdot e^{-2\bar{\gamma} \cdot d}\right)} = \\ &= \bar{Z}_0 \frac{1 + \bar{\Gamma}_R \cdot e^{-2\bar{\gamma} \cdot d}}{1 - \bar{\Gamma}_R \cdot e^{-2\bar{\gamma} \cdot d}} = \bar{Z}_0 \frac{1 + \bar{\Gamma}_V(d)}{1 - \bar{\Gamma}_V(d)}\end{aligned}\quad \text{74b}$$

Si è così messo in evidenza il *legame che esiste tra il coefficiente di riflessione e l'impedenza equivalente in ogni punto della linea*.

Nel caso di linea ideale (senza perdite: $\alpha = 0$) si potrebbe dimostrare che si ha:

$$\bar{Z}(d) = \bar{Z}_0 \frac{\bar{Z}_R + j\bar{Z}_0 \cdot \operatorname{tg}(\beta d)}{\bar{Z}_0 + j\bar{Z}_R \cdot \operatorname{tg}(\beta d)} \quad \text{74c}$$

Si osservi che la tangente è una funzione periodica con periodo pari a π e quindi l'impedenza di una linea si ripete con periodicità ogni qual volta l'argomento della tangente si incrementa di π :

$$\pi = \beta \cdot d \Rightarrow d = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{2} \quad \text{75}$$

ossia per ogni variazione della distanza dal carico pari a mezza lunghezza d'onda.

■ ESEMPIO 2

Una linea ideale con impedenza caratteristica $Z_0 = 55 \, \Omega$ è chiusa su un carico con impedenza $Z_R = (115 + j75) \, \Omega$. Determinare l'impedenza della linea a una distanza dal carico pari a $d = 1,183 \, \lambda$.

Si ricorre alla **74c**; a tal fine occorre individuare l'argomento della tangente:

$$\vartheta = \beta \cdot d = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 1,183 \cdot \lambda = 2,366 \cdot \pi \text{ rad}$$

La **74c** fornisce:

$$Z(d) = 55 \frac{(115 + j75) + j55 \cdot \operatorname{tg}(2,366 \cdot \pi)}{55 + j(115 + j75) \cdot \operatorname{tg}(2,366 \cdot \pi)} \approx 44,9 / 53,9 \approx 26,45 - j36,28$$

L'impedenza del carico è induttiva, quella vista alla distanza indicata è completamente diversa e addirittura capacitiva.

■ Interpretazione fisica del coefficiente di riflessione, dell'impedenza caratteristica e di quella di linea

- **Coefficiente di riflessione.** È un parametro che evidenzia il *legame, in modulo e fase spaziale*, che esiste tra l'onda progressiva e l'onda regressiva: allontanandosi dal carico esiste un diverso rapporto tra l'onda regressiva e l'onda progressiva.
- **Impedenza caratteristica.** Esprime il *legame in modulo e fase temporale* tra le onde progressive di tensione e di corrente, così come tra le onde regressive di tensione e di corrente: allontanandosi dal carico l'impedenza caratteristica rimane costante e quindi il legame temporale non muta.
- **Impedenza della linea.** Esprime il *legame in modulo e fase temporale* tra la tensione totale in ogni punto della linea e la corrente: tale legame temporale varia con la distanza d dal carico (in modo periodico). Il legame spaziale imposto dal coefficiente di riflessione non è indipendente dal legame temporale stabilito dall'impedenza caratteristica della linea, infatti la **74b** ne evidenzia la dipendenza. Se esiste propagazione, i due aspetti spaziali e temporali devono coesistere e sono essenziali al funzionamento della linea di trasmissione.

7 Onde stazionarie

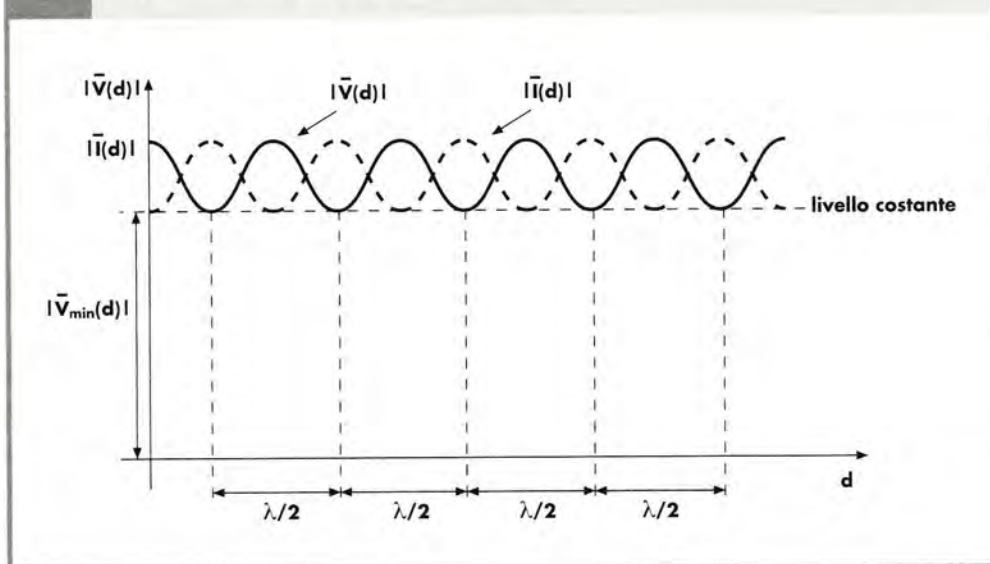
Onda stazionaria

Nodi e antinodi

Come ormai dovrebbe essere chiaro, in una linea adattata, ovvero chiusa su una impedenza pari alla sua impedenza caratteristica, esiste solo l'onda diretta mentre se il carico ha un valore diverso (linea **disadattata**) esiste anche l'onda riflessa. La presenza contemporanea, lungo la linea, di un'onda diretta e una riflessa provoca un'onda risultante detta **onda stazionaria**, così chiamata per il fatto di apparire ferma lungo la linea.

L'onda in questione assume ampiezza massima nelle posizioni della linea dove l'onda diretta e quella riflessa sono in fase, mentre assume ampiezza minima nelle posizioni in cui l'onda diretta e quella riflessa sono in opposizione di fase. I punti in cui si verificano i minimi sono detti **nodi**, i punti in cui si verificano i massimi **antinodi** o **ventri**. La figura 17 riporta una situazione tipica di onda stazionaria: la distanza tra due nodi successivi o tra due antinodi è pari a $\lambda/2$ mentre la distanza tra un nodo e l'antinodo successivo è $\lambda/4$: si ricordi che la periodicità dell'impedenza equivalente di linea $\bar{Z}(d)$ è $\lambda/2$ (relazione 75) e che quindi tale risulta anche la periodicità dell'onda stazionaria. La profondità di un nodo, rispetto a un antinodo, dipende dall'ampiezza dei vettori che caratterizzano le onde regressive, ossia, in ultima analisi, dal modulo del coefficiente di riflessione. *Con un coefficiente di riflessione basso l'andamento dell'onda stazionaria ha una piccola ondulazione rispetto a un livello costante.*

FIG. 17 Rappresentazione delle onde stazionarie.



Il livello costante è legato all'energia che sta transitando tra il generatore e il carico mentre le onde stazionarie sono la parte di energia che rimane confinata nella linea e continua a essere "palleggiata" tra il generatore e il carico. *Con un coefficiente di riflessione nullo* (linea adattata $\bar{Z}_R = \bar{Z}_0$) *spariscono i nodi e gli antinodi e tutta l'energia fluisce in modo continuo dal generatore al carico* (in assenza di riflessione l'ampiezza di $\bar{V}(d)$ si ridurrebbe a V^+ e quindi il grafico si ridurrebbe a una linea orizzontale). *Con un coefficiente di riflessione unitario* (riflessione totale) i nodi sono caratterizzati da una tensione totale nulla e quindi *il livello costante si annulla: non esiste più energia che fluisce dal generatore al carico e l'energia rimane confinata nella linea di trasmissione.*

II ROS

L'ampiezza relativa dell'onda riflessa in una linea a basse perdite è generalmente espressa in termini del cosiddetto **ROS** (*Rapporto d'Onda Stazionaria*) o in inglese **VSWR** (*Voltage Standing Wave Ratio*):

$$ROS = \frac{|\bar{V}_{MAX}(d)|}{|\bar{V}_{min}(d)|}$$

Questo parametro è largamente usato perché è facilmente misurabile su una linea di trasmissione. Quando la linea è completamente adattata il valore massimo e minimo della tensione nella linea sono uguali e pertanto $ROS = 1$. In presenza di onde stazionarie si ha differenza tra il valore massimo e il valore minimo della tensione e quindi il ROS diventa maggiore di 1.

Esiste anche un altro parametro, che viene indicato nella letteratura inglese come **PSWR** (*Power Standing Wave Ratio*), che si utilizza quando la misura viene eseguita con strumenti sensibili alla potenza da essi assorbita, proporzionale al quadrato della tensione presente in linea. Mentre nella nomenclatura inglese le due denominazioni $VSWR$ e $PSWR$ sono distinte, nella dizione italiana spesso i due paramenti vengono tra loro confusi. Il ROS non può essere definito quando gli andamenti d'onda stazionaria cambiano in modo marcato lungo la linea, ossia quando le perdite di una linea sono marcate.

Il ROS per le correnti $|\bar{I}_{MAX}(d)|/|\bar{I}_{min}(d)|$ è lo stesso di quello delle tensioni.

Tra il ROS e il modulo del coefficiente di riflessione esiste una semplice relazione che si ricava facilmente. Infatti il valore massimo della tensione si ha nei punti dove si esegue la somma aritmetica tra i moduli di $\bar{V}^+(d)$ e di $\bar{V}^-(d)$, mentre il minimo è presente nei punti dove viene eseguita la differenza aritmetica sempre tra i moduli di $\bar{V}^+(d)$ e di $\bar{V}^-(d)$:

$$|\bar{V}_{MAX}(d)| = |\bar{V}^+(d)| + |\bar{V}^-(d)| \quad |\bar{V}_{min}(d)| = |\bar{V}^+(d)| - |\bar{V}^-(d)| \quad 77$$

Ora il ROS risulta:

$$ROS = \frac{|\bar{V}_{MAX}(d)|}{|\bar{V}_{min}(d)|} = \frac{|\bar{V}^+(d)| + |\bar{V}^-(d)|}{|\bar{V}^+(d)| - |\bar{V}^-(d)|} = \frac{1 + \frac{|\bar{V}^-(d)|}{|\bar{V}^+(d)|}}{1 - \frac{|\bar{V}^-(d)|}{|\bar{V}^+(d)|}} \quad 78$$

Ma $|\bar{V}^-(d)|/|\bar{V}^+(d)| = |\bar{\Gamma}_V|$ (modulo del coefficiente di riflessione delle tensioni) e quindi:

$$ROS = \frac{1 + |\bar{\Gamma}_V|}{1 - |\bar{\Gamma}_V|} \quad 79$$

Si osservi che con una linea perfettamente adattata si ha $\bar{\Gamma}_V = 0$ e quindi $ROS = 1$, mentre nel caso di completa riflessione $\bar{\Gamma}_V = 1$ e, di conseguenza, il ROS tende all'infinito.

I casi di riflessione totale

La riflessione totale si verifica nei casi estremi di disadattamento ovvero quando $|\bar{\Gamma}_R| = 1$, in modo che l'onda riflessa risulti pari all'onda incidente, ovvero tutta l'energia incidente venga riflessa dal carico che quindi non assorbe energia. Questo può accadere solo quando la linea è chiusa su un cortocircuito, un circuito aperto oppure una pura reattanza.

Vedremo ora i primi due di questi tre casi nelle condizioni ideali di linea priva di perdite e quindi tale da garantire una propagazione delle onde senza attenuazione. Evidentemente il considerare il caso di linea ideale serve a rendere più semplice la trattazione; i risultati, particolarmente significativi, assumono comunque, con gli opportuni adattamenti, validità generale.

• **La linea chiusa in cortocircuito.** Si immagini che una linea ideale sia chiusa in cortocircuito all'estremità ricevente ($\bar{Z}_R = 0$); in tale posizione si avrà:

$$\bar{\Gamma}_V(0) = \bar{\Gamma}_R = \frac{\bar{Z}_R - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_0} = -\frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_0} = -1 \quad 80$$

Questo significa che la tensione riflessa dal cortocircuito è in opposizione di fase rispetto alla tensione incidente e di pari modulo. La corrente ha un coefficiente di riflessione che è uguale e opposto rispetto a quello della tensione:

$$\bar{\Gamma}_I(0) = -\bar{\Gamma}_R = 1 \quad 81$$

La corrente riflessa ha quindi modulo e fase uguali a quelli della corrente incidente. Di conseguenza la tensione complessiva nel cortocircuito è nulla mentre la corrente complessiva è massima e pari al doppio della corrente incidente.

Sul carico siamo in presenza di un nodo di tensione e un ventre di corrente; tornando indietro lungo la linea, per $d = \lambda/4$ si trova un ventre di tensione e un nodo di corrente; il tutto si ripete ciclicamente come indicato in figura 18. Più dettagliatamente, nel primo $\lambda/4$ a partire da $d = 0$ la tensione risulta in anticipo di 90° rispetto alla corrente e quindi l'impedenza equivalente della linea è una reattanza induttiva; in corrispondenza del ventre di tensione e nel nodo di corrente si verifica un circuito aperto e nel successivo $\lambda/4$ l'impedenza equivalente diviene una reattanza capacitiva; dopo una distanza $\lambda/2$ si trovano un ventre di corrente e un nodo di tensione e l'impedenza diviene nuovamente un cortocircuito.

È anche interessante osservare che ogni $\lambda/8$ l'impedenza equivalente assume in modulo il valore dell'impedenza caratteristica.

Si noti che se la linea non è ideale ma con basse perdite, il cortocircuito non si ripete dopo $\lambda/2$ ma si ha, invece, una resistenza molto bassa. Così il circuito-aperto non si manifesta ma si ottiene un valore elevato di resistenza.

L'andamento della impedenza in una linea priva di perdite, chiusa in cortocircuito, può essere individuato analiticamente se nella 74c si impone la condizione $\bar{Z}_R = 0$:

$$\bar{Z}(d) = jZ_0 \operatorname{tg}(\beta d) \quad 82$$

dove Z_0 è un valore reale visto che, come ipotizzato, la linea è ideale. L'impedenza è un valore puramente immaginario, come compete a una pura reattanza e il suo modulo segue l'andamento della tangente.

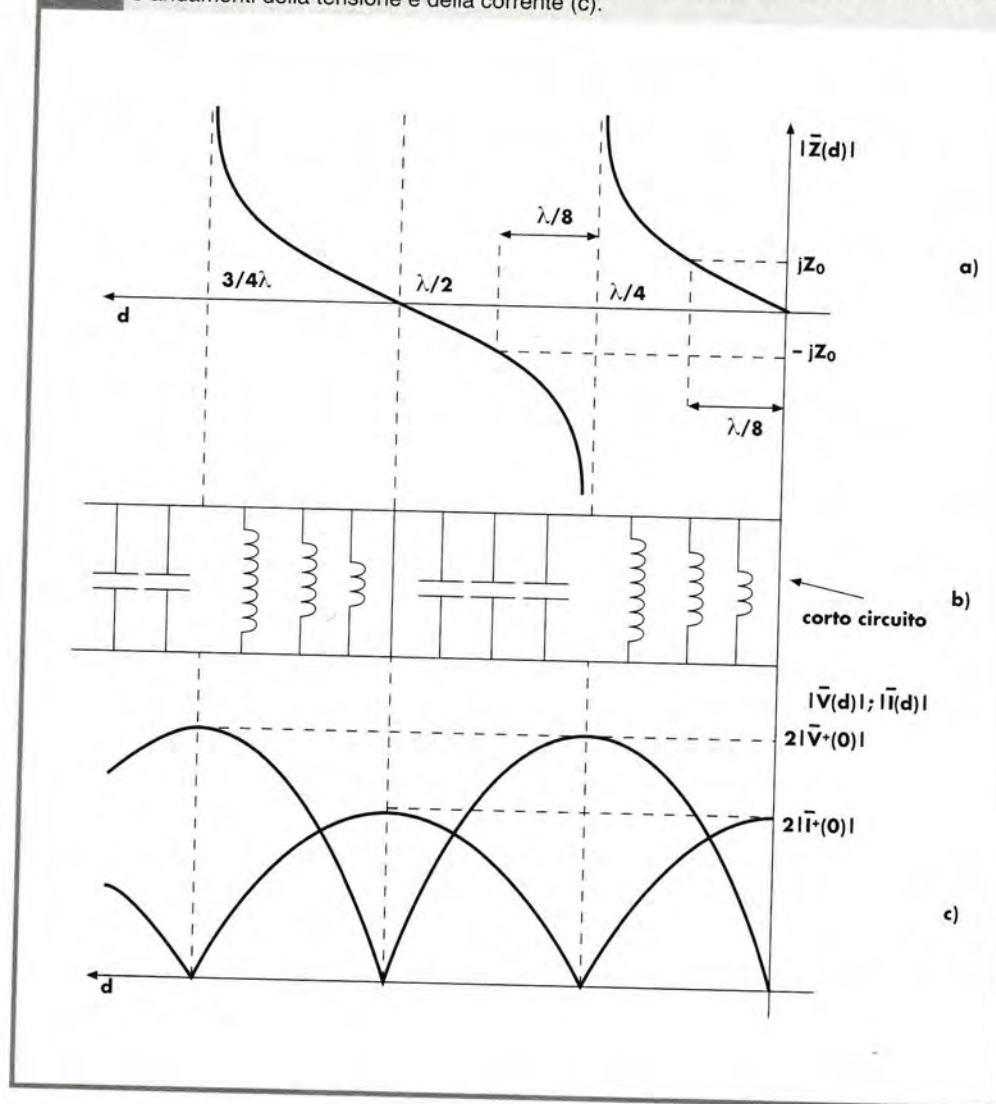
• **La linea aperta.** Se la linea viene lasciata aperta, il ruolo delle tensioni e delle correnti viene scambiato. Infatti per $d = 0$ sarà massima la tensione e nulla la corrente; l'impedenza nel primo $\lambda/4$ sarà una reattanza capacitiva e poi diverrà induttiva nel successivo $\lambda/4$.

Qui di seguito si considera l'espressione analitica dell'impedenza nei vari punti della linea ricavata dalla 74c per $\bar{Z}_R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\bar{Z}_R \rightarrow \infty} \bar{Z}(d) = \lim_{\bar{Z}_R \rightarrow \infty} Z_0 \frac{\bar{Z}_R + Z_0 \cdot j \operatorname{tg}(\beta d)}{Z_0 + \bar{Z}_R \cdot j \operatorname{tg}(\beta d)} = \frac{Z_0 \bar{Z}_R}{\bar{Z}_R j \operatorname{tg}(\beta d)} = -j \frac{Z_0}{\operatorname{tg}(\beta d)} \quad 83$$

Il lettore può verificare che si ottiene un andamento analogo a quello di figura 18 ma sfasato in anticipo di $\lambda/4$.

FIG. 18 Rappresentazione grafica dell'impedenza di linea in funzione della distanza d quando la linea è chiusa in cortocircuito ed è priva di perdite (a); sua schematizzazione simbolica (b) e andamenti della tensione e della corrente (c).



8 L'adattamento di impedenza

L'adattamento di impedenza

Si è già osservato nei paragrafi precedenti che, affinché la potenza proveniente dal generatore si trasferisca completamente al carico attraverso una linea ideale, è necessario che non nascano nella linea onde stazionarie ($\Gamma_V = 0$ oppure $ROS = 1$). Tale condizione è possibile solo in presenza di **linea adattata** ossia quando l'impedenza caratteristica della linea risulta uguale all'impedenza del carico. Questo non accade in generale e quindi spesso si richiede l'**adattamento di impedenza** ossia la modifica, con opportuni accorgimenti, dell'impedenza del carico in modo da renderla uguale all'impedenza caratteristica della linea.

Va peraltro ricordato che se la linea è chiusa, oltre che in uscita anche in ingresso sulla sua impedenza caratteristica e questa si può ritenere puramente resistiva, otterremo anche il massimo trasferimento energetico tra generatore e linea (vedere il capitolo 1).

Va anche osservato che una linea chiusa sulla sua impedenza caratteristica presenta un'impedenza di ingresso sempre pari all'impedenza caratteristica, indipendentemente dalla sua lunghezza, il che, supposta la linea priva di perdite, garantisce al generatore in ingresso alla linea un carico costante a tutte le frequenze (per la ⁴⁵ Z_0 è una costante).

■ ■ Adattamento con linea a quarto d'onda

Se tra un carico resistivo e una linea a basse perdite (che si suppone ideale) di diversa impedenza caratteristica si inserisce una linea a quarto d'onda, di impedenza opportuna, è possibile realizzare l'adattamento di impedenza nel modo molto semplice di figura 19.

FIG. 19 Adattamento con linea a $\lambda/4$ e carico resistivo.

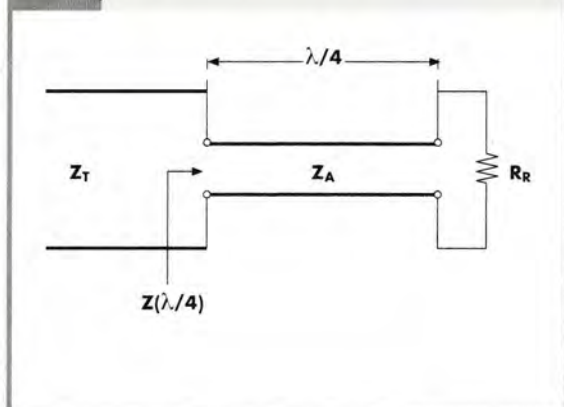
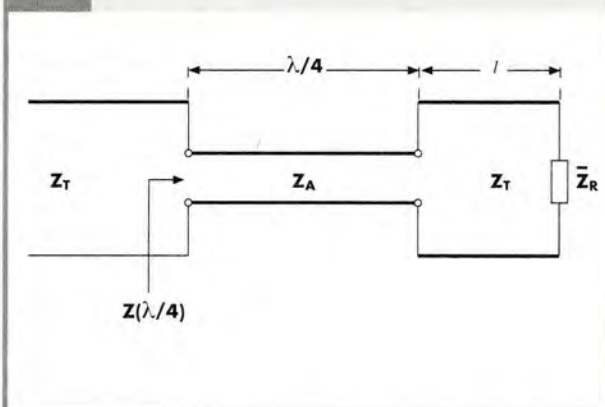


FIG. 20 Adattamento con linea a $\lambda/4$ e carico non puramente resistivo.



Ricordando la **74c** e ponendo $d = \lambda/4$, ovvero $\beta d = \pi/2$ e anche $\bar{Z}_R = R_R$ e $Z_0 = Z_A$ si ottiene subito:

$$Z(\lambda/4) = \frac{Z_A^2}{Z_R} \quad \text{84}$$

dove $Z(\lambda/4)$ (reale) deve essere ora pari all'impedenza caratteristica Z_T della linea da adattare al carico di impedenza $\bar{Z}_R = R_R$ supposta reale:

$$Z_T = Z(\lambda/4) = \frac{Z_A^2}{R_R} \Rightarrow Z_A = \sqrt{Z_T R_R} \quad \text{85}$$

Con una linea a quarto d'onda di impedenza caratteristica pari alla *media geometrica delle impedenze* è possibile eseguire l'adattamento.

Nel caso in cui il carico non sia puramente resistivo, si deve ricorrere alla disposizione di figura 20: si inserisce il tratto di linea a quarto d'onda a una opportuna distanza l dal carico in modo che l'impedenza vista alla distanza l risulti puramente resistiva. Per fare questo basta individuare un nodo o un antinodo di tensione dove l'impedenza assume, rispettivamente, il valore resistivo minimo R_m e massimo R_M (vedere la scheda integrativa n. 4):

$$R_m = \frac{|\bar{V}_m|}{|\bar{I}_M|} = \frac{Z_T}{ROS} \quad R_M = \frac{|\bar{V}_M|}{|\bar{I}_m|} = Z_T \cdot ROS \quad \text{86}$$

Siccome il ROS è maggiore di 1 ($Z_T \neq \bar{Z}_R$) nel primo caso si ha $R_m < Z_T$, nel secondo è $R_M > Z_T$; in conclusione per l'adattamento si può ancora usare la **85** ponendo:

$$Z_A = \sqrt{Z_T R_m} \quad \text{oppure} \quad Z_A = \sqrt{Z_T R_M} \quad \text{87}$$

Limiti del metodo

L'adattamento con una sola linea a quarto d'onda è possibile solo per segnali di una definita frequenza (evidentemente variando la frequenza varia il valore della lunghezza corrispondente a $\lambda/4$). Se lo spettro del segnale è molto ampio, sono necessari adattamenti con più tronchi a quarto d'onda in cascata oppure con linee a impedenza caratteristica variabile (si variano le distanze tra i conduttori che costituiscono la linea).

L'adattamento con linea a quarto d'onda richiede l'uso di linee di impedenza caratteristica Z_A definita dalla 85 e quindi di valori diversi a seconda delle esigenze di adattamento. Questo può risultare costoso perché richiede la costruzione di linee particolari.

Per ulteriori note su questo tipo di adattamento si veda la scheda integrativa n. 7.

■ ■ Adattamento con stub

Per i motivi precedentemente esposti anziché l'adattamento a $\lambda/4$ si preferisce l'adattamento con **stub** (*coda*) che è costituito da un tronco di linea in cortocircuito con impedenza caratteristica uguale a quella della linea di trasmissione, tronco che viene inserito a una adeguata distanza l dal carico (fig. 21).

Siccome lo stub è posto in parallelo alla linea, per il suo studio conviene ricorrere alle ammettenze anziché alle impedenze; in particolare si suppone che il tratto di linea l sia di lunghezza tale da presentare una ammettenza, valutata alla sezione M-M immediatamente a destra dello stub, la cui parte reale sia pari alla ammettenza caratteristica della linea (che si suppone, al solito, reale):

$$\bar{Y}_{M-M} = Y_T + jB \quad \text{con} \quad Y_T = 1/Z_T \quad 88$$

Per la 82 lo stub, essendo una linea chiusa in cortocircuito, presenta un'impedenza equivalente puramente reattiva e quindi è equivalente anche a una pura suscettanza. Il valore della sua lunghezza l_s va scelto in modo da presentare un'ammettenza:

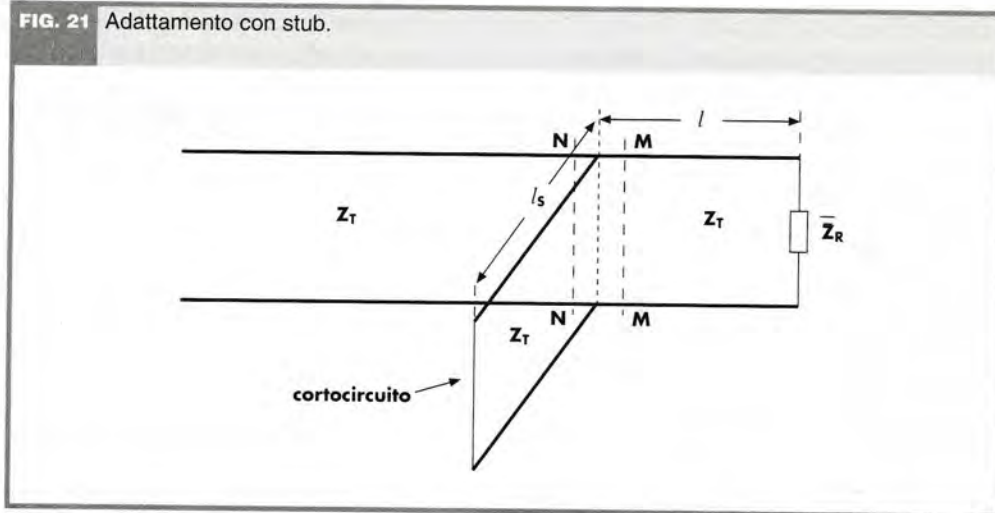
$$\bar{Y}_s = -jB \quad 89$$

Infatti in questo modo l'ammettenza vista dalla linea alla sezione N-N, immediatamente a sinistra dello stub, risulta:

$$\bar{Y}_{N-N} = \bar{Y}_{M-M} + \bar{Y}_s = Y_T + jB - jB = Y_T \quad 90$$

Il che garantisce il corretto adattamento d'impedenza.

FIG. 21 Adattamento con stub.



Limiti del metodo

Per il calcolo dei valori di l e di l_s è utile ricorrere alla carta di Smith (sch. int. n. 4). Se si deve procedere a un aggiustamento sperimentale della distanza l dal carico, l'adattamento di impedenza mediante stub è molto comodo per le linee bifilari ma piuttosto scomodo per i cavi coassiali. In tal caso si preferisce adottare l'adattamento mediante doppio stub in cui le posizioni degli stub sono fissi e l'aggiustamento viene

fatto regolando la lunghezza dei due stub. La trattazione di tale possibilità esula dai fini del presente testo e fa parte di argomenti specialistici di telecomunicazioni che il lettore interessato può ritrovare nei testi specifici.

In sintesi (paragrafi 3, 4, 5, 6, 7 e 8)

- 1) Nelle linee sono molto importanti i parametri distribuiti (costanti primarie) L , C , R e G ; i parametri R e G esprimono le perdite e idealmente si intendono trascurabili.
- 2) Un'onda elettromagnetica può essere intesa, in linea generale, come composta da una *componente progressiva* e una *regressiva*; operando con le linee si possono considerare onde di tensione e di corrente.
- 3) Le costanti secondarie di una linea sono la *costante di propagazione* (composta dalla costante di attenuazione e da quella di fase), l'*impedenza caratteristica* e la *velocità di propagazione* (di fase e di gruppo).
- 4) Una linea caricata per trasferire tutta l'energia al carico deve essere chiusa su un'impedenza uguale alla sua impedenza caratteristica.
- 5) La qualità dell'adattamento può essere valutata tramite il coefficiente di riflessione e tramite il *ROS*.
- 6) Per ottenere il corretto adattamento di impedenza si usano le tecniche della linea a $1/4$ d'onda e dello stub.

Propagazione lungo una linea

In figura 1.8. lab. è riportato il circuito proposto per lo studio dei fenomeni di propagazione lungo una linea con supporto metallico. Il tutto è proposto come simulazione (file linea1.ewb) ma è realizzabile anche sperimentalmente. Nel caso specifico ci si riferisce a una linea di 50 m di cavo coassiale RG58/U con impedenza caratteristica di 50Ω . Con il deviatore C posto in a è possibile visualizzare l'andamento nel tempo del segnale in ingresso alla linea; con il deviatore in b si può invece visualizzare il segnale in uscita alla linea. I deviatori A e B permettono di effettuare l'analisi in tre diverse situazioni: corretto adattamento di impedenza, quando il carico è inserito, e totale disadattamento con la linea aperta o chiusa in cortocircuito.

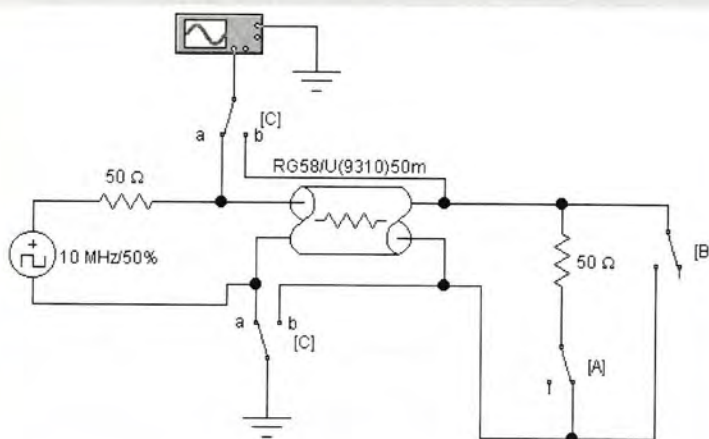


Fig. 1.8. lab. - Circuito proposto per la valutazione del comportamento di una linea adattata e totalmente disadattata.