



Lezione 8: Diagramma di Nyquist

- Regole per il tracciamento qualitativo
- Esercizi



Diagrammi polari o di Nyquist

- Diagramma polare fornisce, al variare di ω da $-\infty$ a ∞ , il valore di $G(j\omega)$ nel piano complesso.
 - Asse x : $\Re[G(j\omega)]$
 - Asse y : $\Im[G(j\omega)]$
- I diagrammi polari si possono facilmente dedurre dai diagrammi di Bode.



Regole per il tracciamento qualitativo dei diagrammi di Nyquist (DN)

1. L'andamento del DN per $\omega \in (-\infty, 0]$ può essere ottenuto da quello per $\omega \in [0, \infty)$ per simmetria rispetto all'asse reale:

- $\Re[G(j\omega)] = \Re[G(-j\omega)]$
- $\Im[G(j\omega)] = -\Im[G(-j\omega)]$

2. Comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$: $G(j\omega) \cong \frac{k_b}{(j\omega)^h}$

$$G(j\omega) = \begin{cases} k_b & (|k_b| < \infty), \quad h = 0 \\ \infty, & h > 0 \end{cases}$$

- DN parte dall'asse reale per sistemi senza poli nell'origine con fase:

$$0^\circ \quad k_b > 0$$

$$180^\circ \quad k_b < 0$$



- Parte dal punto all' ∞ per sistemi con $h > 0$ poli nell'origine; la fase di partenza è data da

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) = \angle k_b - h90^\circ = \begin{cases} -h90^\circ & k_b > 0 \\ -(h+2)90^\circ & k_b < 0 \end{cases}$$

- Caso $h = 1$: il DN parte all' ∞ parallelamente all'asse immaginario e $\Re[G(j\omega)]$ tende ad un valore costante per $\omega \rightarrow 0^+$

$$G(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^n + \dots + b_{n-1}(j\omega) + b_n}{(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-2}(j\omega)^2 + a_{n-1}(j\omega)}$$

per $\omega \rightarrow 0^+$

$$G(j\omega) \cong \frac{(b_{n-1}j\omega + b_n)(a_{n-2}j\omega + a_{n-1})}{j\omega(a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2\omega^2)} \cong \frac{j\omega(b_{n-1}a_{n-1} - b_na_{n-2})}{j\omega a_{n-1}^2}$$

$$\implies \Re[G(j\omega)] \cong \frac{b_{n-1}a_{n-1} - b_na_{n-2}}{a_{n-1}^2} < \infty$$



3. Comportamento alle alte frequenze

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{sistema strettamente proprio} \\ b_0 & \text{sistema biproprio} \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) = \angle k_b - 90^\circ (np - nz - np_+ + nz_+)$$

- np : n° di poli con $\Re e \leq 0$
- nz : n° di zeri on $\Re e \leq 0$
- np_+ : n° di poli con $\Re e > 0$
- nz_+ : n° di zeri on $\Re e > 0$



Esercizio 1

$$G(s) = \frac{k}{s(1 + s\tau)} \quad k > 0, \quad \tau > 0$$

Poli: $s = 0, s = -\frac{1}{\tau}$

$\omega \rightarrow 0$ si ha un asintoto

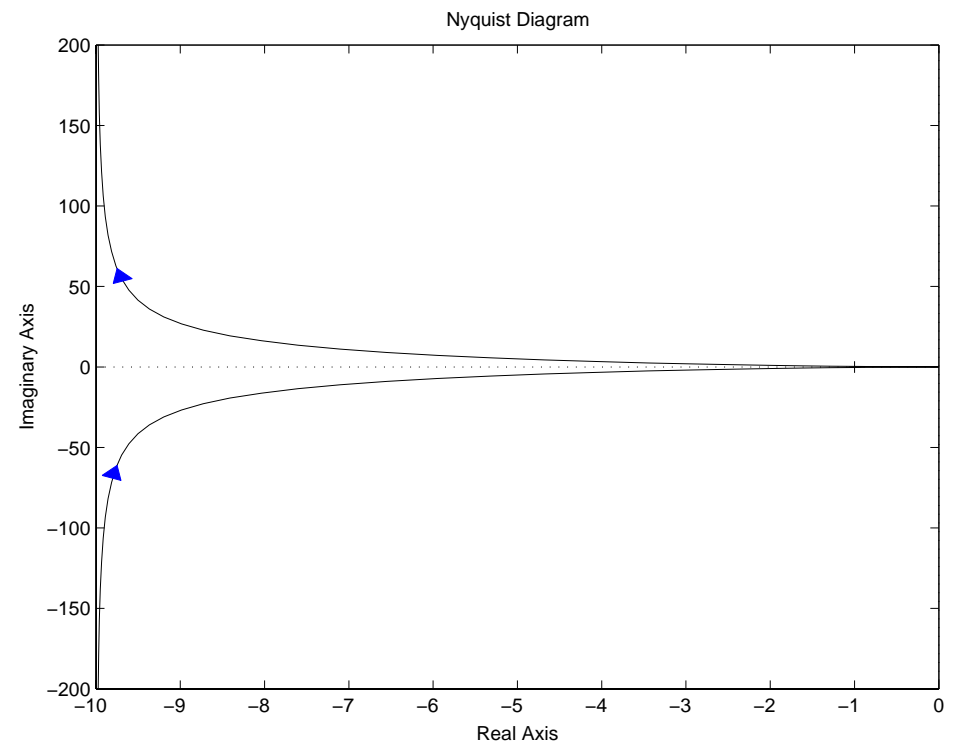
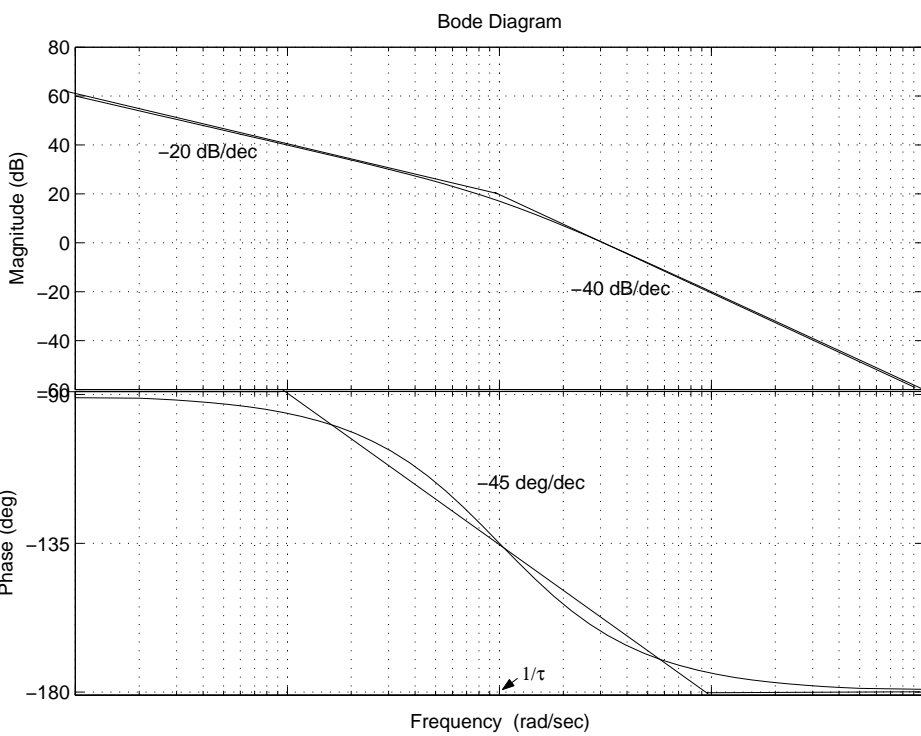
$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega\tau)} = \frac{-jk(1 - j\omega\tau)}{\omega(1 + j\omega\tau)(1 - j\omega\tau)}$$

$$\Re[G(j\omega)] = -\frac{k\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \longrightarrow_{\omega \rightarrow 0+} -k\tau$$

$$\Im[G(j\omega)] \longrightarrow_{\omega \rightarrow 0+} -\infty$$



Esercizio 1





Esercizio 2

$$G(s) = \frac{k}{s^2 (1 + s\tau)} \quad k > 0, \quad \tau > 0$$

Poli: $s = 0$ doppi, $s = -\frac{1}{\tau}$

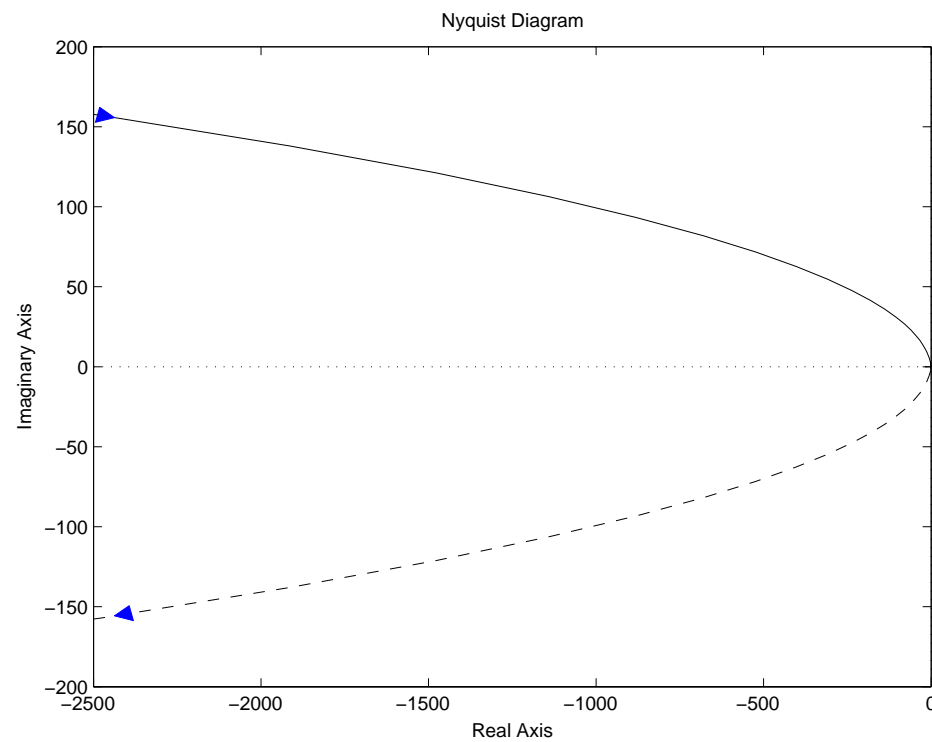
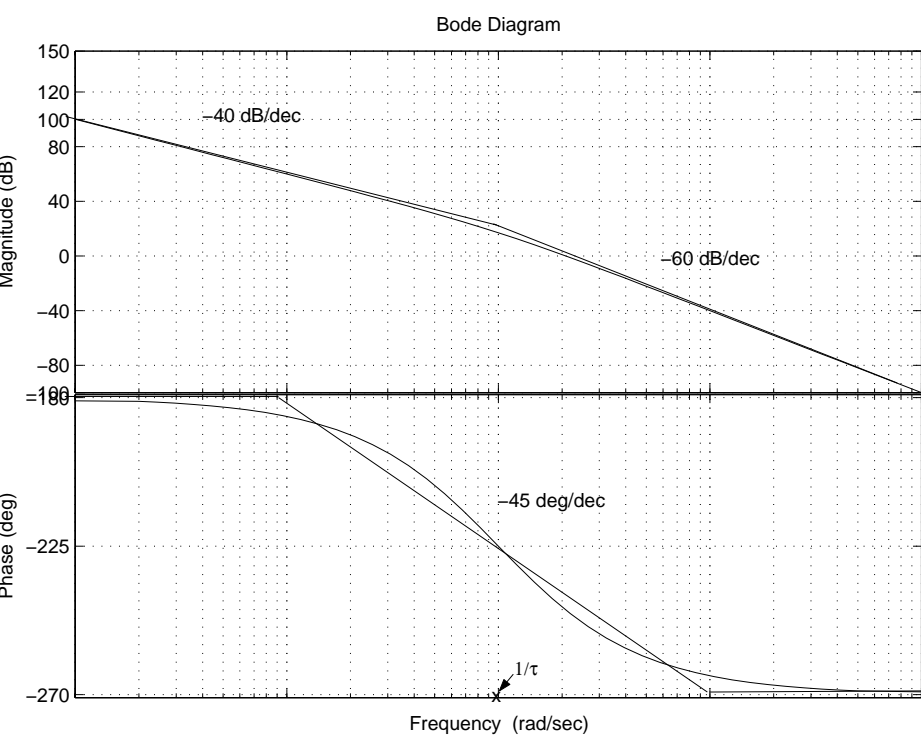
- $\omega \rightarrow \infty$ si ha $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ and $\angle G(j\omega) \rightarrow -270^\circ$
- $\omega \rightarrow 0^+$ si ha

$$\Re[G(j\omega)] \longrightarrow -\infty$$

$$\Im[G(j\omega)] \longrightarrow \infty$$



Esercizio 2





Esercizio 3

$$G(s) = \frac{k(1 + \tau_z s)}{s(1 + s\tau_p)} \quad k > 0, \quad \tau_z > \tau_p > 0$$

Poli: $s = 0, s = -\frac{1}{\tau_p}$

Zeri: $s = -\frac{1}{\tau_z}$

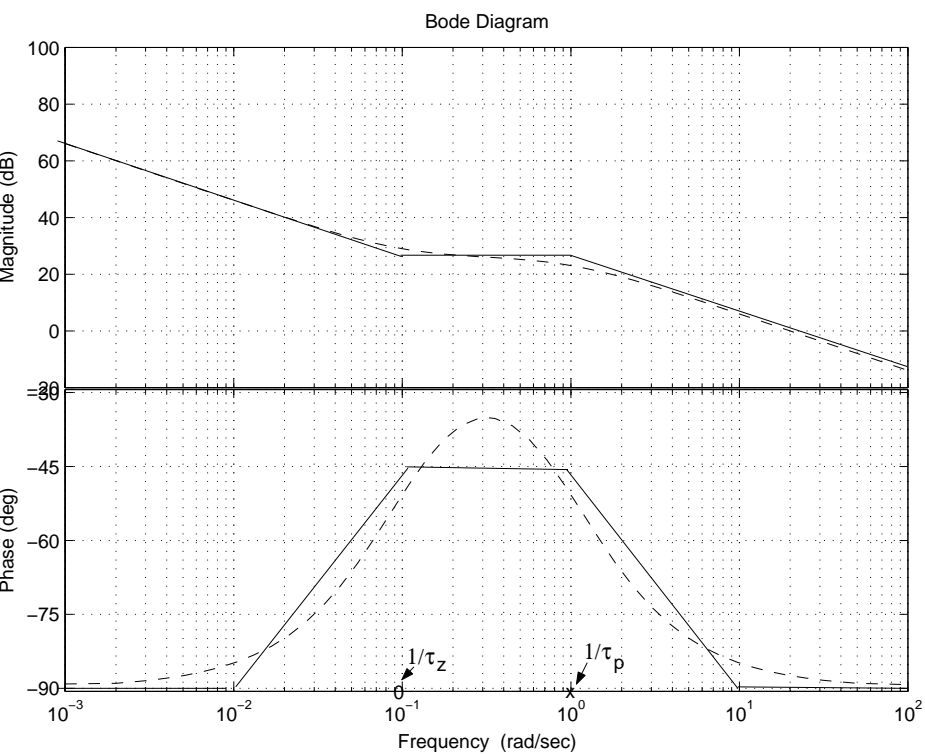
- $\omega \rightarrow \infty$ si ha $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ and $\angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ$
- $\omega \rightarrow 0^+$ si ha

$$\Re[G(j\omega)] \longrightarrow k(\tau_z - \tau_p)$$

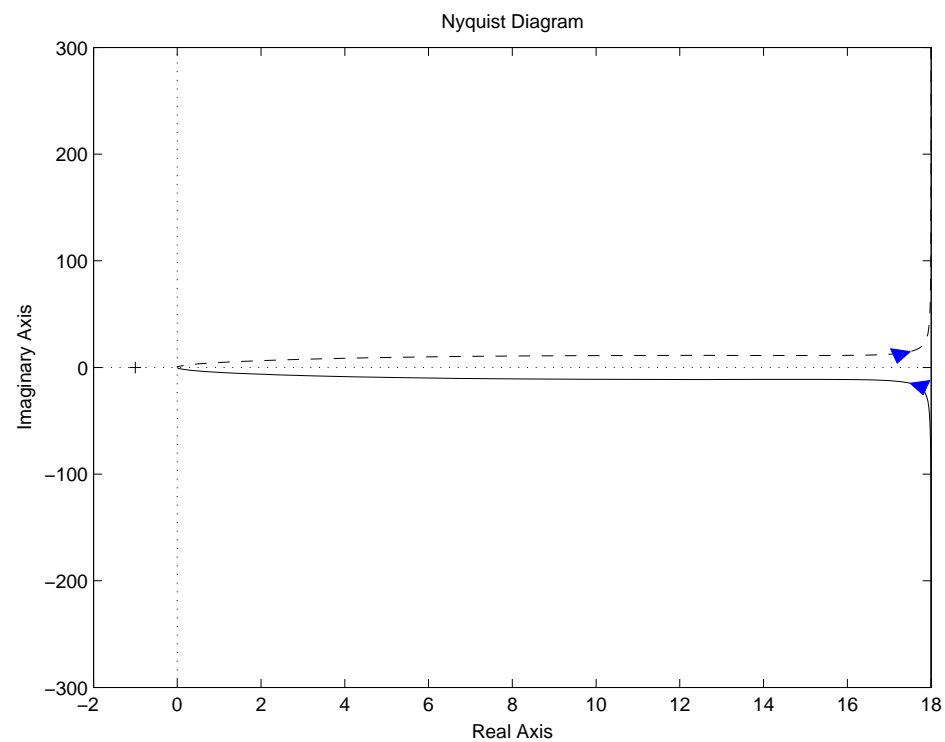
$$\Im[G(j\omega)] \longrightarrow -\infty$$



Esercizio 3



$$k = 2, \tau_z = 10, \tau_p = 1$$





Esercizio 4

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s^2+4s+5)} \stackrel{\text{Forma di bode}}{=} \frac{0.1(1+s)}{(1+0.5s)(1+0.8s+0.25s^2)}$$

$$k_b=0.1$$

Zero reale: $s = -1$ per $\tau_z = 1$

Polo reale: $s = -2$ per $\tau_p = 0.5$

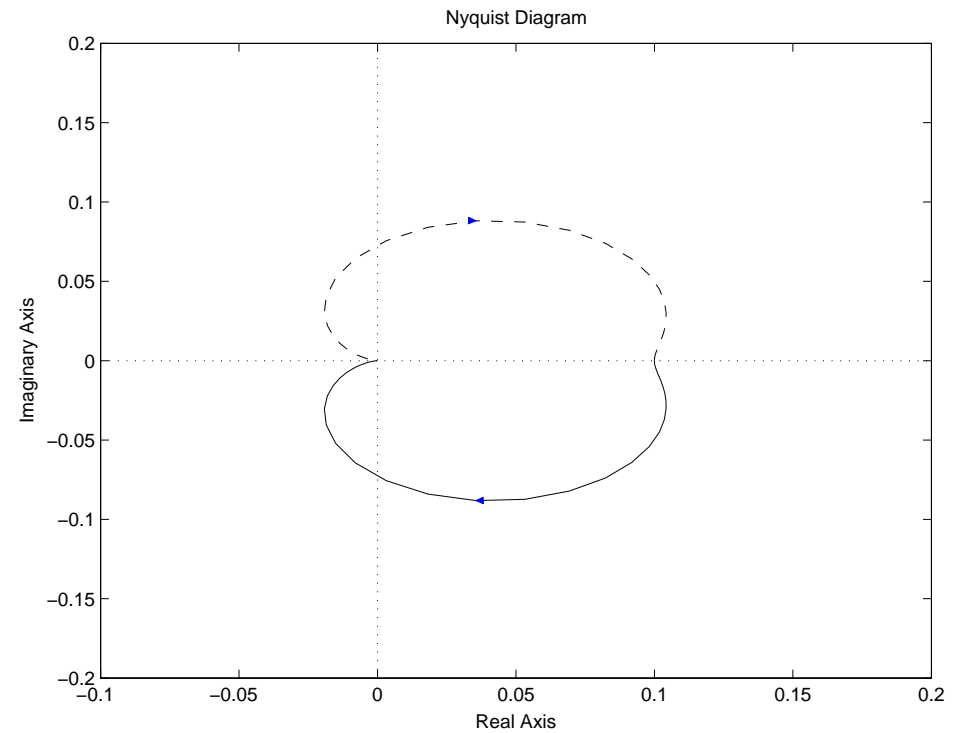
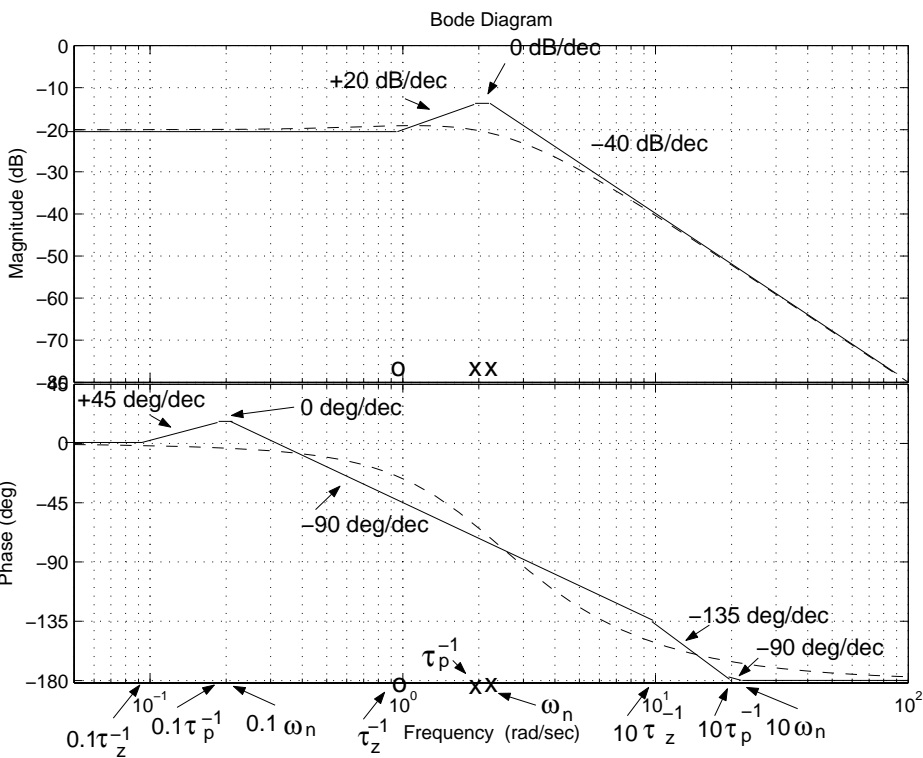
Poli complessi: $\omega_n = \sqrt{5}$, $\delta = 0.4\sqrt{5}$

- $\omega \rightarrow \infty$ si ha $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ and $\angle G(j\omega) \rightarrow -180^\circ$
- $\omega = 0$ si ha

$$|G(j0)|_{dB} = 20 \log_{10} 0.1$$

$$\angle G(j0) = 0^\circ$$

Esercizio 4





Esercizio 5

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{(s - 2)(s + 2)(s + 4)} \stackrel{\text{Forma di bode}}{=} \frac{-0.0625(1 + s^2)}{(1 + 0.25s)(1 + 0.5s)(1 - 0.5s)}$$

$$k_b = -0.0625$$

Zeri immaginari: $s = \pm j$, $\omega_{n_z} = 1$ e $\delta_{n_z} = 0$

Polo stabile $\tau_1 = 0.5$ per $1/\tau_1 = 2$

Polo stabile $\tau_2 = 0.25$ per $1/\tau_2 = 4$

Polo instabile: $\tau_3 = 0.5$ per $1/\tau_3 = 2$

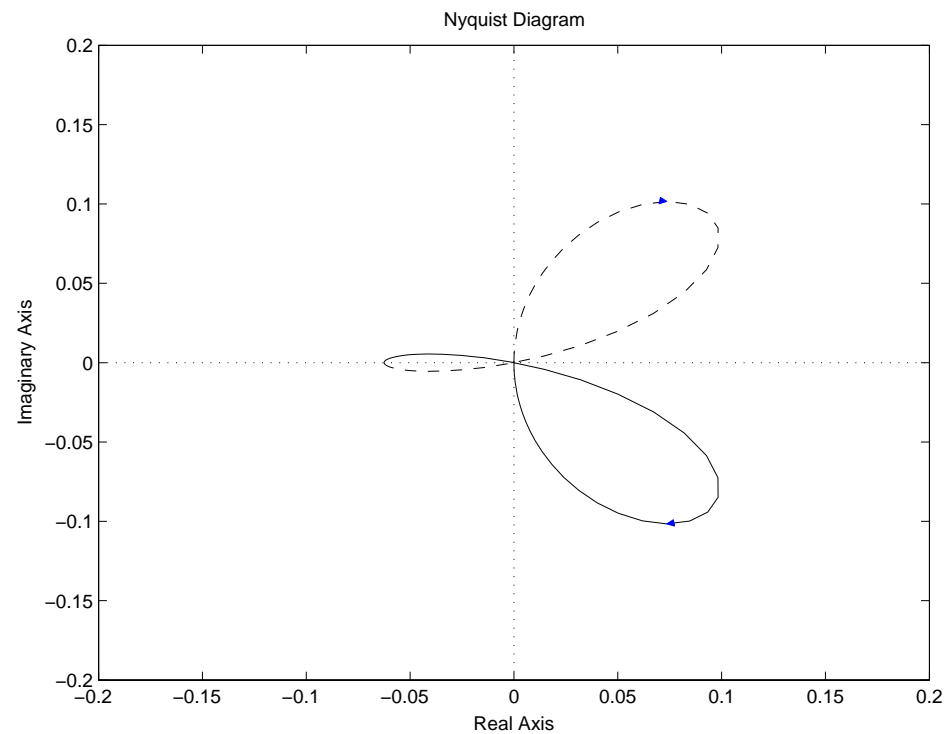
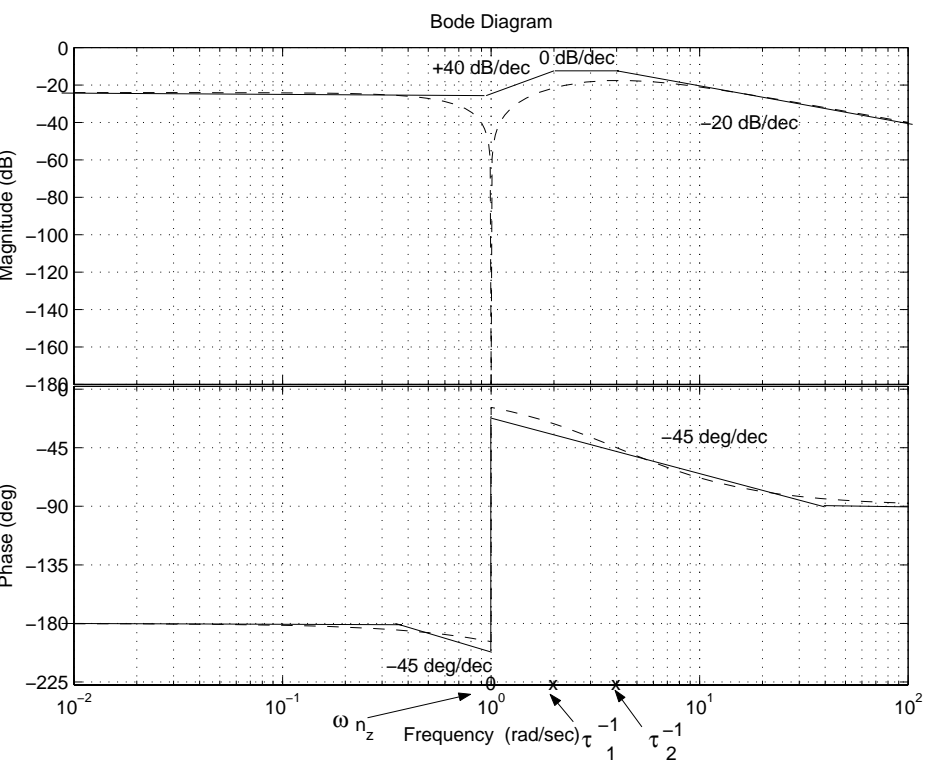
- $\omega \rightarrow \infty$ si ha $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ and $\angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ$
- $\omega = 0$ si ha

$$|G(j0)|_{dB} = 20 \log_{10} 0.0625$$

$$\angle G(j0) = -180^\circ$$



Esercizio 5





Esercizio 6

$$G(s) = \frac{8(s^2 + s + 15)}{s^3 + 9s^2 + 15s + 120} \quad \text{Forma di Bode} \quad \frac{1 + \frac{s}{15} + \frac{s^2}{15}}{\frac{s^3}{120} + \frac{3s^2}{40} + \frac{s}{8} + 1}$$

$$K_B = 1$$

Zeri complessi: $\omega_{n_z} \cong 3.873$ e $\delta_{n_z} \cong 0.129$

Polo stabile: $\tau_p \cong 0.113$ per $1/\tau_p \cong 8.839$

Poli complessi: $\omega_{n_p} \cong 3.685$ e $\delta_{n_p} \cong 0.022$

- $\omega \rightarrow \infty$ si ha $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ and $\angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ$
- $\omega = 0$ si ha

$$|G(j0)|_{dB} = 20 \log_{10} 1$$

$$\angle G(j0) = 0^\circ$$

Esercizio 6

