Lezione VI: Trasformata di Laplace

- Traformata di Laplace: Definizione
- Segnali elementari
- Proprietà della Trasformata di Laplace
- Antitrasformata di Laplace
- Esempi

Trasformata di Laplace: Definizione

La *Trasformata di Laplace* di un segnale $f(t)$ è la funzione di variabile complessa $s \in \mathbf{C}$, $(s = \sigma + j\omega)$

$$f(t) \rightarrow F(s) \doteq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \doteq \mathcal{L}[f]$$

Trasformate di Laplace di alcuni segnali elementari:

- Funzione impulso (*Delta di Dirac*)

$$f(t) = \delta(t) \doteq \begin{cases} 0 & \text{se } \; t \neq 0 \\ +\infty & \text{se } \; t = 0 \end{cases} \qquad \text{tale che} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

si può considerare come il limite della successione di funzioni $f_\epsilon(t)$ per $\epsilon \rightarrow 0$, dove

$$f_\epsilon(t) \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon} & \text{se } \; 0 \leq t \leq \epsilon \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f] = F(s) = 1 \quad \forall \;\; s \in \mathbf{C}$$

Trasformata di Laplace: Segnali elementari

SEGNALE	$f(t)$	$F(s)$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Gradino unitario	$1(t)$	$1/s$
Rampa unitaria	$t\ 1(t)$	$1/s^2$
Parabola unitaria	$(t^2/2)1(t)$	$1/s^3$
Esponenziale	$e^{at}\ 1(t)$	$1/(s-a)$
Sinusoide	$\sin \omega t\ 1(t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
Cosinusoide	$\cos \omega t\ 1(t)$	$s/(s^2+\omega^2)$
Esponenziale+monomio	$t^n e^{at}\ 1(t)$	$n!/(s-a)^{n+1}$

Trasformata di Laplace: Proprietà

- Linearità: $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \rightarrow c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$,
  Esempio: $\delta(t) - 2 \cdot 1(t) \Longrightarrow F(s) = 1 - \frac{2}{s}$

- Teorema della traslazione nel tempo: $f(t-a)1(t-a) \rightarrow F(s)e^{-as}$
  Esempio: $3 \cdot 1(t-2) \Longrightarrow F(s) = \frac{3e^{-2s}}{s}$

- Teorema della traslazione nella frequenza: $e^{at}f(t) \rightarrow F(s-a)$
  Esempio: $e^{at}1(t) \Longrightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}$, $\cos(\omega t)1(t) \Longrightarrow F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

- Teorema della derivata nel tempo: $\frac{d}{dt}f(t) \rightarrow sF(s) - f(0^+)$
  Esempio: $\sin(\omega t)1(t) \Longrightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

- Teorema della derivata nella frequenza: $tf(t) \rightarrow -\frac{d}{ds}F(s)$
  Esempio: $t \cdot 1(t) \Longrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2}$

- Teorema dell'integrale nel tempo: $\int_0^t f(\tau)d\tau \rightarrow \frac{F(s)}{s}$

- Teorema di convoluzione: Si definisce convoluzione di due segnali $f(t)$ e $g(t)$

$$(f * g)(t) \doteq \int_0^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] = F(s)G(s)$$

- Teorema del valore finale: $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$ (se esistono entrambi)

  Esempio:

$$f(t) = (1-e^{-t})1(t) \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = 1$$

- Teorema del valore iniziale: $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to \infty} sF(s)$

  Esempio:

$$f(t) = (1-t)1(t) \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$$

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to \infty} sF(s) = 1$$

Anti-Trasformata di Laplace di Funzioni Razionali

- Espansione in fratti semplici di $F(s)$ (radici p_i semplici):

$$F(s) = \frac{Q(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i}, \qquad K_i = \lim_{s \to p_i}(s-p_i)F(s)$$

K_i è detto *residuo* di $F(s)$ in $p_i \in \mathbf{C}$. Antitrasformando

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i t} \cdot 1(t)$$

- Espansione in fratti semplici di $F(s)$ (radici p_i di generica molteplicità m_i):

$$F(s) = \frac{Q(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{K_{ij}}{(s-p_i)^j}\ , \quad K_{ij} = \frac{1}{(m_i-j)!} \lim_{s \to p_i} \frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}}(s-p_i)^{m_i} F(s)$$

Antitrasformando

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{K_{ij}\ t^{j-1} e^{p_i t}}{(j-1)!} \cdot 1(t)$$

- Se esiste una coppia di radici p_i, $\overline{p}_i$ complesse coniugate allora:

$$F'(s) = \frac{K_i}{s - p_i} + \frac{\overline{K}_i}{s - \overline{p}_i} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

  $\omega_n = |p_i|$ pulsazione naturale

  $\zeta = -Re[p_i]/|p_i|$ coefficiente di smorzamento

$$f'(t) = K_i e^{p_i t} + \overline{K}_i e^{\overline{p}_i t} = 2|K_i|\ e^{-\zeta\omega_n t} \cos\left(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2} + \angle K_i\right) \cdot 1(t)$$

- Possibili applicazioni: soluzione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

  Esempio:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 1 - 3e^{-t} \quad t \geq 0\ ,\ y(0) = 1\ ,\ \dot{y}(0) = 0\ .$$