RICHIAMI ALLA TRASFORMATA DI LAPLACE

DEFINIZIONI E PROPRIETÀ FONDAMENTALI

Perchè una trasformazione funzionale?

- **Problema:** risoluzione di **equazioni differenziali ordinarie lineari** a coefficienti costanti

$$a_n \frac{d^n y}{d t^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d t^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{d t^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{d t^{m-1}} + \ldots + b_0 u$$

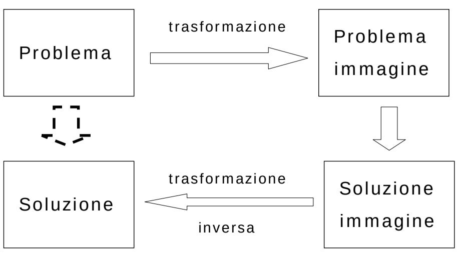
con condizioni iniziali assegnate

$$y\left(0^-\right), \quad \left.\frac{d y}{d t}\right|_{t=0^-} \quad \cdots \quad \left.\frac{d^{n-1} y}{d t^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$

e segnale d'ingresso $u(t)$ noto.

Perchè una trasformazione funzionale? (2)

- **Risoluzione:** attraverso una **trasformazione funzionale**



Definizione

Data una funzione $f(t)$ continua a tratti e limitata, si definisce

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt$$

dove $s = \sigma + j\,\omega \in C$

Se l'integrale esiste finito, F(s) si dice **trasformata di Laplace** di f(t) ed è una funzione della variabile complessa *s*.

Definizione (2)

- **Ascissa di convergenza:**

$$\alpha = inf \left\{ \Re\{s\}, s \in C : \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = K < \infty \right\}$$

- **Semipiano di convergenza:**

$$\Re\{s\} > \alpha$$

Proprietà della trasformata

- **Linearità:**

$$\mathcal{L}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + c_2 \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$$

- **Trasformata dell'integrale:**

$$G(t) = \int_{0^-}^{t} f(\tau)\, d\tau$$

$$\mathcal{L}\left[G(t)\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}\left[f(t)\right], \; s : \Re\{s\} > \alpha$$

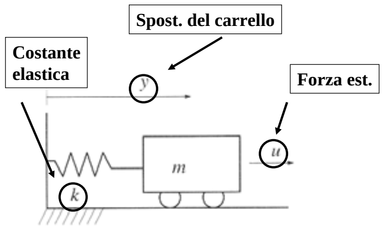
Proprietà della trasformata (2)

- **Trasformata della derivata:**

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = s\,\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0^-),\ s : \Re\{s\} > \alpha$$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0^-)$$

Un primo esempio d’utilizzo



$$m\ddot{y} + ky = u$$

$$Y(s) = \frac{m\left(sy(0^-) + \dot{y}(0^-)\right)}{m\,s^2 + k} + \frac{1}{m\,s^2 + k}U(s)$$

Un primo esempio d’utilizzo (2)

Analizziamo l’espressione della soluzione nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = \boxed{\frac{m\left(sy(0^-) + \dot{y}(0^-)\right)}{m\,s^2 + k}} + \boxed{\frac{1}{m\,s^2 + k}U(s)}$$

Dipende dalle condizioni iniziali: **soluzione libera**

Dipende dall’ingresso: **soluzione forzata**

Proprietà della trasformata (3)

- **Moltiplicazione per t^n**

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{d\,s^n} F(s)$$

- **Cambiamento di scala**

$$f\,(a\,t) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),\ a \in R,\ a > 0$$

Proprietà della trasformata (4)

- **Prodotto di convoluzione**

$$h(t) \triangleq f(t) \star g(t) \triangleq \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

$$\mathcal{L}\left[f(t) \star g(t)\right] = F(s)\,G(s),\ \alpha = \max\{\alpha_f,\ \alpha_g\}$$

Proprietà della trasformata (5)

- **Traslazione in frequenza**

$$\mathcal{L}\left[e^{k\,t} f(t)\right] = F\,(s-k)\,,\ \forall k \in C$$

- **Traslazione nel tempo**

$$\mathcal{L}\left[f\,(t-t_0)\cdot 1\,(t-t_0)\right] = e^{-st_0}F\,(s)$$

Trasformate notevoli

- **Segnale a gradino unitario** $$\mathcal{L}\left[1(t)\right] \;=\; \frac{1}{s}$$
- **Impulso unitario** $$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] \;=\; 1$$
- **Impulso generalizzato** $$\mathcal{L}\left[\delta^{(n)}(t)\right] \;=\; s^n$$
- **Segnale esponenziale** $$\mathcal{L}\left[e^{k\,t}\cdot 1(t)\right] \;=\; \frac{1}{s-k}$$

Trasformate notevoli (2)

- **Segnale polinomiale** $$\mathcal{L}\left[t^n\cdot 1(t)\right] \;=\; \frac{n!}{s^{n+1}}$$
- **Segnale sinusoidale** $$\mathcal{L}\left[\sin\left(\omega\, t\right)\cdot 1(t)\right] \;=\; \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
- **Segnale cosinusoidale** $$\mathcal{L}\left[\cos\left(\omega\, t\right)\cdot 1(t)\right] \;=\; \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

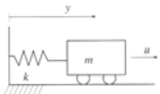
Trasformate notevoli (3)

- **Segnali compositi**

$$\mathcal{L}\left[t^n\, e^{k\,t}\cdot 1(t)\right] \;=\; \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{k\,t}\,\sin\left(\omega\, t\right)\cdot 1(t)\right] \;=\; \frac{\omega}{(s-k)^2+\omega^2}$$

Esempio (continua…)



$$Y(s) = \frac{m\left(sy(0^-)+\dot{y}(0^-)\right)}{m\,s^2+k} + \frac{1}{m\,s^2+k}\,U(s)$$

con condizioni iniziali $y(0^-) \;=\; 1;\; \dot{y}(0^-) \;=\; 0$

e con forza applicata data da $u(t) = A\,\sin(\omega\, t)$

si ottiene $$Y(s) = \frac{m\,s}{m\,s^2+k} + A\,\frac{\omega}{\left(m\,s^2+k\right)\left(s^2+\omega^2\right)}$$

Definizione di antitrasformata

- Se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ allora f(t) si dice **antitrasformata di Laplace** di F(s) e si scrive $$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$$f(t) \;=\; \frac{1}{2\pi\, j}\int_{\bar{\sigma}-j\,\infty}^{\bar{\sigma}+j\,\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

dove $\bar{\sigma} > \alpha$

Modalità di calcolo dell'antitrasformata

Consideriamo una classe particolare di funzioni F(s), le **funzioni razionali fratte**

$$F(s) \;=\; \frac{N(s)}{D(s)},$$

$$\text{con } \partial N(s) = m,\; \partial D(s) = n, \quad m < n$$

Modalità di calcolo dell'antitrasformata (2)

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \\
&= K\,\frac{(s-z_1)^{m_1}\,(s-z_2)^{m_2}\ldots(s-z_r)^{m_r}}{(s-p_1)^{n_1}\,(s-p_2)^{n_2}\ldots(s-p_q)^{n_q}}
\end{aligned}
$$

$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m,$
$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$
$z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ zeri ,
$p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{C}$ poli

Modalità di calcolo dell'antitrasformata (3)

Scomposizione in fratti semplici

$$
\begin{aligned}
F(s) = {} & \frac{C_{1\,1}}{(s-p_1)} + \ldots \frac{C_{1\,n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} + \\
& \frac{C_{2\,1}}{(s-p_2)} + \ldots \frac{C_{2\,n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} + \ldots \\
& \frac{C_{q\,1}}{(s-p_q)} + \ldots \frac{C_{q\,n_q}}{(s-p_q)^{n_q}}
\end{aligned}
$$

Modalità di calcolo dell'antitrasformata (4)

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_{i\,j}}{(s-p_i)^j}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_{i\,j}}{(s-p_i)^j}\right] = \frac{C_{i\,j}}{(j-i)!}\, t^{(j-1)}\, e^{p_i\,t}\, 1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{i\,j}}{(j-i)!}\, t^{(j-1)}\, e^{p_i\,t}\, 1(t)$$

Formula per il calcolo dei residui

$$C_{i\,j} = \frac{1}{(n_i-j)!}\lim_{s\to p_i}\left\{\frac{d^{(n_i-j)}}{d\,s^{(n_i-j)}}\,F(s)\;(s-p_i)^{n_i}\right\}$$

Per poli tutti distinti (formula di Heaviside)

$$C_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}, \qquad D'(s) = \prod_{j\neq i}\left(s-p_j\right)$$

Esempio di antitrasformata

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\
&= \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+2} + \frac{C_3}{s+3}
\end{aligned}
$$

Esempio di antitrasformata (2)

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \lim_{s\to -1}\frac{5s+3}{(s+2)(s+3)} = -1 \\
C_2 &= \lim_{s\to -2}\frac{5s+3}{(s+1)(s+3)} = 7 \\
C_3 &= \lim_{s\to -3}\frac{5s+3}{(s+1)(s+2)} = -6
\end{aligned}
$$

Esempio di antitrasformata (3)

$$F(s) \;=\; \frac{-1}{s+1} + \frac{7}{s+2} + \frac{-6}{s+3}$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) \;=\; \left(-e^{-t} + 7\,e^{-2t} - 6\,e^{-3t}\right)\,1(t)$$

Teorema del valore iniziale

Data una funzione f(t) non impulsiva in t=0, si ha

$$f(0^{+}) \;=\; \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

Teorema del valore finale

Data una funzione f(t) con trasformata F(s) che non possieda poli a parte reale positiva, tranne al più un polo semplice nell'origine s=0

$$\lim_{t\to\infty} f(t) \;=\; \lim_{s\to 0} s\,F(s)$$

Applicazioni dei teoremi

- Data la $F(s) \;=\; \dfrac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

il valore iniziale dell'antitrasformata *f(t)* lo si ottiene da

$$f\left(0^{+}\right) \;=\; \lim_{s\to\infty} s\frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$$

Applicazioni dei teoremi (2)

Sfruttando ora il valore iniziale è possibile determinare anche la derivata $\dot{f}(t)$ nell'istante iniziale

$$\dot{f}\left(0^{+}\right) \;=\; \lim_{s\to\infty} s\,(s\,F(s) - f(0)) = 5$$

Asintoticamente il segnale *f(t)* tende al valore

$$\lim_{t\to\infty} f(t) \;=\; \lim_{s\to 0} s\,F(s) = 0$$

Applicazioni dei teoremi (3)

In questo caso non si può utilizzare il teorema del valore finale, perché la *F(s)* non soddisfa l'ipotesi del teorema (possiede poli immaginari):

$$F(s) \;=\; \frac{5s+3}{(s^2+1)(s+2)(s+3)}$$

Studio qualitativo di una trasformata *F(s)*

- Assegnata una trasformata *F(s)*, che cosa si può affermare, in maniera qualitativa, dell'andamento del segnale *f(t)* (antitrasformata di *F(s)*)? In quali condizioni *f(t)* sarà un segnale costante, oppure divergente, oppure tenderà a 0?
- L'evoluzione temporale del segnale *f(t)* può essere ricavata, in modo qualitativo, analizzando i poli della corrispondente trasformata *F(s)*.

Studio qualitativo: poli reali

- Lo sviluppo in fratti semplici porta a:

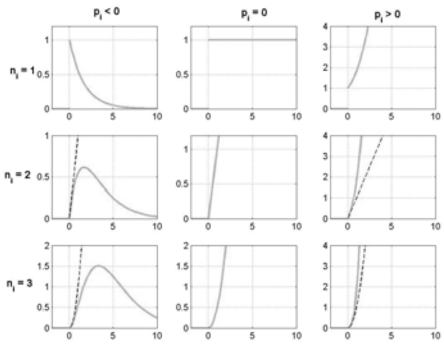
$$F(s) = \frac{C_{1\,1}}{(s-p_1)} + \dots \frac{C_{1\,n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} +$$

$$\frac{C_{2\,1}}{(s-p_2)} + \dots \frac{C_{2\,n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} + \dots$$

$$\frac{C_{q\,1}}{(s-p_q)} + \dots \frac{C_{q\,n_q}}{(s-p_q)^{n_q}}$$

con $p_i \in R \;\; \forall i$

Studio qualitativo: poli reali (2)



Studio qualitativo: poli reali (3)

- **Polo reale negativo**: il corrispondente segnale *f(t)* converge sempre a 0, indipendentemente dalla molteplicità del polo.
- **Polo in *s = 0***: nel caso di polo semplice il segnale è costante, altrimenti diverge.
- **Polo reale positivo**: il segnale *f(t)* è sempre divergente.

Studio qualitativo: poli complessi coniugati

- Nello sviluppo in fratti semplici compaiono termini dati da

$$\frac{C}{(s-p)^n} + \frac{C^*}{(s-p^*)^n}$$

dove $p, \; p^*$ sono i due poli complessi coniugati.
Si può dimostrare che anche $C, \; C^*$ sono complessi coniugati.

Poli complessi coniugati (2)

- Antitrasformando l'espressione precedente si ottiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{(s-p)^n} + \frac{C^*}{(s-p^*)^n}\right] =$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{\sigma\, t} \cdot [C\ (\cos(\omega t) + j\ \sin(\omega t)) +$$

$$C^*\ (\cos(\omega t) - j\ \sin(\omega t))]$$

Poli complessi coniugati (3)

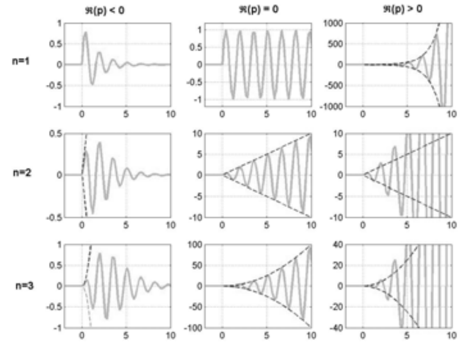
rielaborando l'espressione si ottiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{(s-p)^n}+\frac{C^*}{(s-p^*)^n}\right]=$$

$$\frac{2\,|C|}{(n-1)!}\,t^{n-1}\,e^{\sigma\,t}\;\cdot\;\cos\left(\omega t+\varphi\right)$$

$$\text{con }\varphi\;=\;\arctan\left(\frac{-\Im(C)}{\Re(C)}\right)$$

Studio qualitativo: poli compl. coniugati (4)



Studio qualitativo: poli compl. coniugati (5)

- **Polo a parte reale negativa**: il corrispondente segnale *f(t)* converge sempre a 0, indipendentemente dalla molteplicità del polo.
- **Polo a parte reale nulla**: nel caso di polo semplice il segnale è limitato, altrimenti diverge.
- **Polo a parte reale positiva**: il segnale *f(t)* è sempre divergente.

TESTI DI RIFERIMENTO

- Gli argomenti trattati si possono approfondire consultando un qualunque testo di **Metodi matematici**

TRASFORMATE DI LAPLACE

FINE