

Fig. 17.9. Circuito RL serie nel dominio del tempo e nel dominio di Laplace.

## 17.8 Applicazione a circuiti elettrici del primo ordine

Vengono ora presentati alcuni esempi di circuiti del primo ordine, ossia aventi un solo elemento capace di accumulo, un induttore o un condensatore, alimentati da sorgenti a gradino, da un impulso rettangolare o da una sorgente sinusoidale.

### 17.8.1 Il circuito RL serie

Si consideri il semplice circuito RL serie, alimentato da una sorgente di tensione a gradino (Fig. 17.9).

Il circuito equivalente nel dominio di Laplace è pure riportato in Fig. 17.9, nel quale è stato convenientemente considerato il modello tipo serie dell'induttore. L'equilibrio delle tensioni nella maglia si esprime nel seguente modo:

$$V_S(s) + Li_L(0^-) = (R + sL)I(s) \quad (17.94)$$

da cui si ricava la corrente:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V_S(s) + Li_L(0^-)}{R + sL} = \\ &= \frac{V_S(s)}{R + sL} + \frac{Li_L(0^-)}{R + sL} \end{aligned} \quad (17.95)$$

E' evidente che la corrente è dovuta a *due cause*: la sorgente di tensione  $V_S(s)$  e lo stato iniziale, equivalente ad una sorgente di tensione impulsiva di area pari a  $Li_L(0^-)$ .

Si possono valutare separatamente i due contributi della corrente.

Se si assume una *sorgente di tensione a gradino*:

$$\begin{aligned} v_S(t) &= V u(t) \\ \Rightarrow V_S(s) &= \frac{V}{s} \end{aligned} \quad (17.96)$$

si ha:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{\frac{V}{s}}{R + sL} + \frac{Li_L(0^-)}{R + sL} = \\ &= I(s)|_{Vs} + I(s)|_{i_L(0^-)} \end{aligned} \quad (17.97)$$

Si scompone il primo contributo in frazioni parziali:

$$\begin{aligned} I(s)|_{Vs} &= \frac{V}{s(R + sL)} = \\ &= \frac{\frac{V}{L}}{s\left(\frac{R}{L} + s\right)} = \\ &= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{\frac{R}{L} + s} = \\ &= \frac{\frac{V}{R}}{s} + \frac{-\frac{V}{R}}{\frac{R}{L} + s} \end{aligned} \quad (17.98)$$

e, antitrasformando, si ottiene il primo contributo della corrente:

$$i(t)|_{Vs} = \mathcal{L}^{-1}(I(s)|_{Vs}) = \left[ \frac{V}{R} - \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right] u(t) = \quad (17.99)$$

$$= \left[ \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \right] u(t) \quad (17.100)$$

Si scompone in frazioni parziali il contributo dovuto allo stato iniziale:

$$\begin{aligned} I(s)|_{i_L(0^-)} &= \frac{Li_L(0^-)}{R + sL} = \\ &= \frac{i_L(0^-)}{\frac{R}{L} + s} \end{aligned} \quad (17.101)$$

e antitrasformando si ha:

$$i(t)|_{i_L(0^-)} = \mathcal{L}^{-1}(I(s)|_{i_L(0^-)}) = \left[ i_L(0^-) e^{-\frac{R}{L}t} \right] u(t) \quad (17.102)$$

Sommando i due precedenti contributi si ottiene la corrente totale del circuito:

$$i(t) = \left[ \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) + i_L(0^-) e^{-\frac{R}{L}t} \right] u(t) \quad (17.103)$$

La verifica del *valore iniziale*:

$$\begin{aligned} i(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sI(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{\frac{V}{s} + Li_L(0^-)}{R + sL} = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{V + sLi_L(0^-)}{R + sL} = \\ &= i_L(0^-) \end{aligned} \quad (17.104)$$

fornisce il valore corretto.

La verifica del *valore finale*:

$$\begin{aligned}
 i(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sI(s) = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{V}{s} + Li_L(0^-)}{R + sL} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{V + sLi_L(0^-)}{R + sL} = \\
 &= \frac{V}{R}
 \end{aligned} \tag{17.105}$$

fornisce il valore corretto.

Con i seguenti dati numerici:

$$V = 2; R = 1; L = \frac{1}{2}; i_L(0^-) = 1$$

si ha:

$$\begin{aligned}
 I(s)|_{V_s} &= \frac{V}{s(R + sL)} = \frac{2}{s(1 + \frac{s}{2})} = \\
 &= \frac{4}{s(s + 2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s + 2}
 \end{aligned}$$

da cui si ottiene il contributo della sorgente di tensione indipendente:

$$i(t)|_{V_s} = (2 - 2e^{-2t}) u(t)$$

Il contributo dello stato iniziale risulta:

$$\begin{aligned}
 I(s)|_{i_L(0^-)} &= \frac{i_L(0^-)}{\frac{R}{L} + s} = \\
 &= \frac{1}{2 + s}
 \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$i(t)|_{i_L(0^-)} = e^{-2t} u(t)$$

Sommando i due contributi si ottiene la corrente totale del circuito:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= (2 - 2e^{-2t} + e^{-2t}) u(t) = \\
 &= (2 - e^{-2t}) u(t)
 \end{aligned}$$

il cui andamento è mostrato in Fig. 17.10

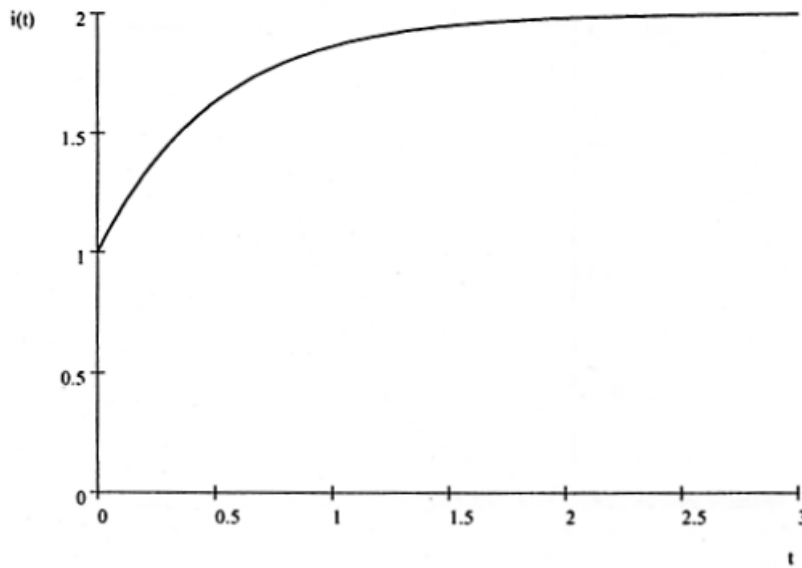


Fig. 17.10. Corrente nel transitorio RL con sorgente di tensione a gradino.

Se la tensione della sorgente è un impulso rettangolare della durata di  $T$  secondi (Fig. 17.11) con inizio per  $t = 0$  e fine per  $t = T$ :

$$\begin{aligned} v_s(t) &= V(u(t) - u(t - T)) = \\ &= V(\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - T)) \end{aligned} \quad (17.106)$$

la trasformata di Laplace della sorgente è somma di due contributi:

$$V_s(s) = V \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \right) \quad (17.107)$$

e altrettanto sarà la corrente nel circuito  $RL$ :

$$\begin{aligned} I(s)|_{V_s} &= \frac{V \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \right)}{R + sL} = \\ &= \frac{V \left( \frac{1}{s} \right)}{R + sL} + \frac{V \left( -\frac{e^{-Ts}}{s} \right)}{R + sL} = \\ &= I_1(s) + I_2(s) \end{aligned} \quad (17.108)$$

Si hanno quindi due contributi di corrente identici ma traslati e di segno opposto; il primo  $I_1(s)$  è identico a quello già visto nel caso di semplice sorgente a gradino. La corrispondente funzione nel tempo risulta:

$$i_1(t) = \frac{V}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (17.109)$$

Il secondo contributo:

$$I_2(s) = -\frac{V e^{-Ts}}{s(R + sL)} \quad (17.110)$$

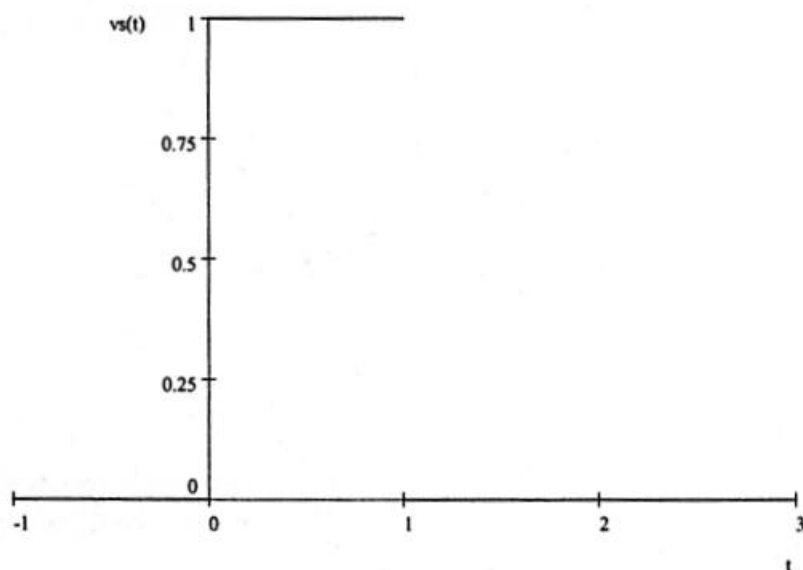


Fig. 17.11. Sorgente di tensione ad andamento rettangolare con salita nell'origine e discesa per  $T=1$ .

ammette la stessa antitrasformata del primo contributo ma traslata in ritardo del tempo  $T$  e cambiato di segno:

$$i_2(t) = -\frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-T)}\right) \text{Heaviside}(t-T) \quad (17.111)$$

La corrente risultante dalla sovrapposizione dei due transitori è:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1(t) + i_2(t) = \\ &= \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \text{Heaviside}(t) - \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-T)}\right) \text{Heaviside}(t-T) \end{aligned} \quad (17.112)$$

ed è mostrata nella Fig. 17.12 assumendo

$$V = 2; R = 1; L = \frac{1}{2}; T = 1$$

E' evidente che con questo metodo si può ottenere la risposta di un circuito ad un treno di impulsi di durata finita sulla base della risposta al gradino unitario.

Se la sorgente applicata al circuito  $RL$  è sinusoidale,

$$v_s(t) = V \cos \omega t$$

la trasformata vale:

$$V_S(s) = V \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (17.113)$$

e la corrente trasformata risulta:

$$I(s)|_{V_S} = \frac{V \frac{s}{s^2 + \omega^2}}{R + Ls} \quad (17.114)$$

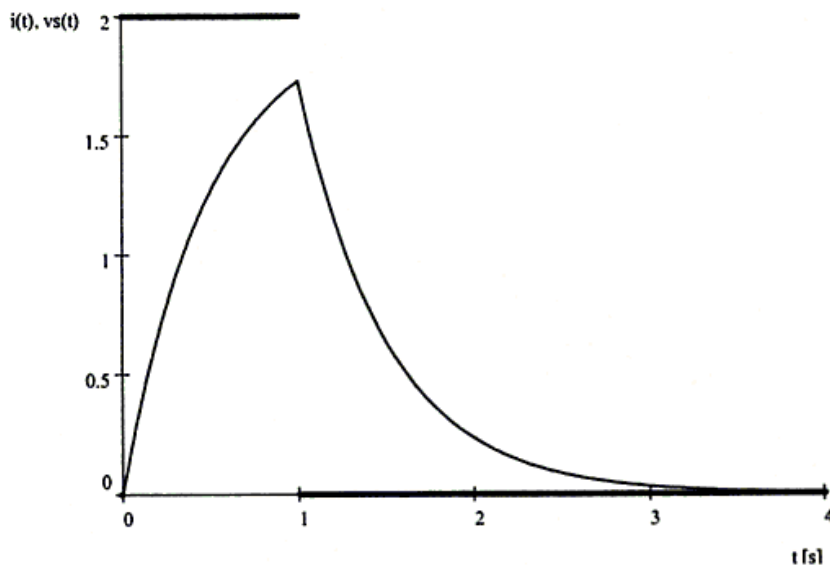


Fig. 17.12. Risposta di RL all'impulso rettangolare. La tensione della sorgente a gradino rettangolare applicata è a tratto grosso mentre la corrente è a tratto sottile.

Ponendo:

$$V = 1; R = 1; L = \frac{1}{2}; \omega = 4;$$

si ha:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(R + sL)} = \frac{2s}{(s^2 + 16)(s + 2)} = \\ &= -\frac{1}{5(s + 2)} + \frac{\frac{1}{5}s + \frac{8}{5}}{s^2 + 16} = \\ &= \frac{1}{5} \left( -\frac{1}{s + 2} + \frac{s + 8}{s^2 + 16} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left( -\frac{1}{s + 2} + \frac{s + 8}{(s + j4)(s - j4)} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left( -\frac{1}{s + 2} + \frac{\frac{1}{2} - i}{s - 4i} + \frac{\frac{1}{2} + i}{s + 4i} \right) \end{aligned} \quad (17.115)$$

Da cui si ottiene l'andamento nel tempo della corrente nel circuito  $RL$  alimentato da una sorgente cosinusoidale di ampiezza massima unitaria:

$$\begin{aligned} i(t)|_{Vs} &= -\frac{1}{5}e^{-2t} + 2\frac{1}{10}\cos 4t + 2\frac{1}{5}\sin 4t = \\ &= -\frac{1}{5}e^{-2t} + \left| \frac{1}{5} + j\frac{2}{5} \right| \cos \left( 4t - \arctan \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} \right) = \\ &= -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{\sqrt{5}}{5} \cos (4t - \arctan 2) = \\ &= -0.2e^{-2t} + 0.4472 \cos (4t - \arctan 2) \end{aligned}$$

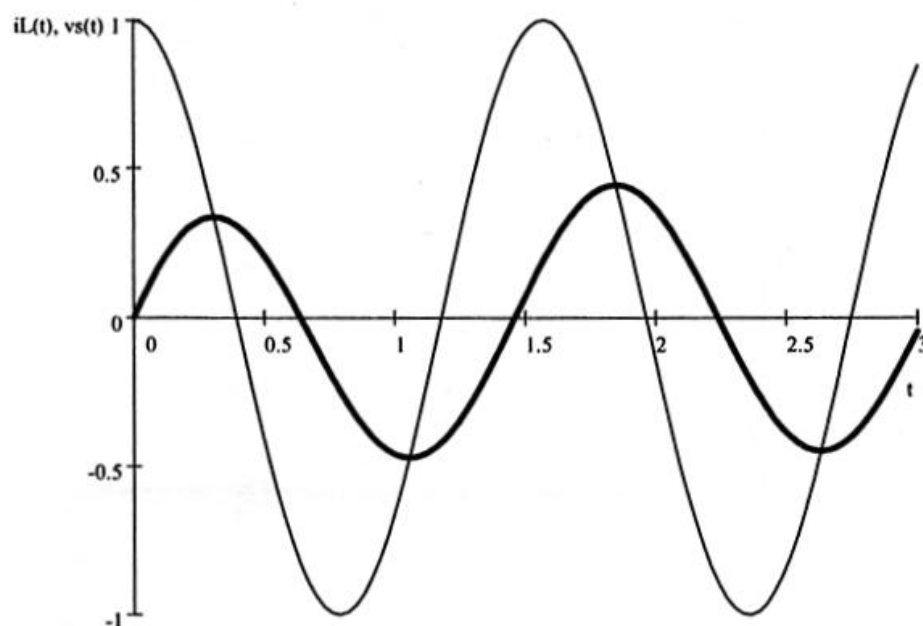


Fig. 17.13. Transitorio del circuito RL serie alimentato da sorgente sinusoidale: corrente (a tratto grosso) e tensione della sorgente (a tratto sottile).

rappresentata in Fig. 17.13

Dopo un transitorio smorzato con costante di tempo  $\tau = \frac{L}{R} = 0.5$  s si perviene alla soluzione di regime con corrente sinusoidale di ampiezza massima pari a  $\frac{V}{Z} = 0.4472$  A e sfasata in ritardo rispetto alla tensione della sorgente dell'angolo  $\varphi = \left(\arctan \frac{\omega L}{R}\right) \frac{180}{\pi} = \left(\arctan \frac{4\frac{1}{2}}{1}\right) \frac{180}{\pi} = (\arctan 2) \frac{180}{\pi} \cong 63.44$  gradi.

### 17.8.2 Il circuito GC parallelo

Si consideri un circuito GC parallelo alimentato da una sorgente di corrente  $i_s(t)$  ed il corrispondente circuito nel dominio di Laplace (Fig. 17.14), costituito dal parallelo della sorgente di corrente indipendente  $I_S(s)$ , della sorgente di corrente costante  $Cv_C(0^-)$ , associata allo stato iniziale del condensatore, e dall'ammettenza  $Y(s) = G + sC$ .

L'equazione di equilibrio delle correnti nel nodo comune ai tre elementi circuitali impone:

$$I_S(s) + Cv_C(0^-) = (G + sC)V_C(s) \quad (17.116)$$

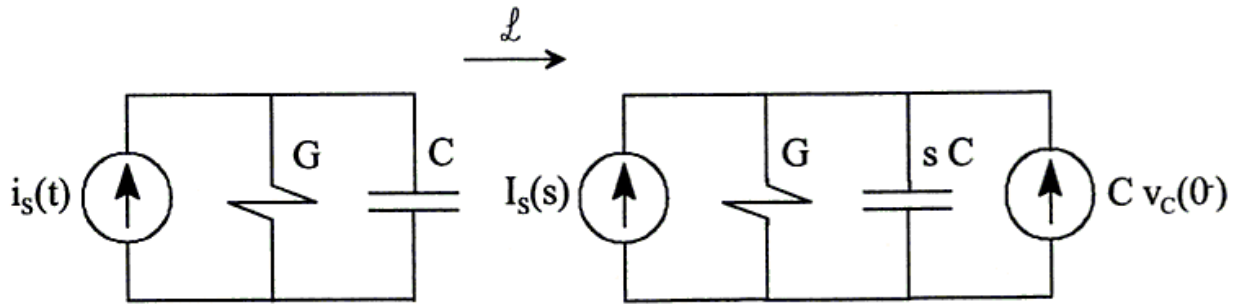


Fig. 17.14. Circuito GC parallelo alimentato da una sorgente di corrente, nel dominio di Laplace.

da cui si ottiene la tensione sul condensatore:

$$\begin{aligned}
 V_C(s) &= \frac{I_S(s) + C v_C(0^-)}{G + sC} = \\
 &= \frac{I_S(s)}{G + sC} + \frac{C v_C(0^-)}{G + sC} = \\
 &= V_C(s)|_{I_S} + V_C(s)|_{v_C(0^-)}
 \end{aligned}$$

che si può esprimere come somma di due contributi, *uno dovuto alla sorgente indipendente ed uno dovuto allo stato iniziale*. Tali contributi possono essere valutati separatamente.

Si noti anche la perfetta dualità di questo esempio rispetto al quello del circuito *RL* serie; la soluzione è altrettanto duale.

Se si assume una *sorgente di corrente a gradino*:

$$i_S(t) = I u(t) \quad (17.117)$$

$$\Rightarrow I_S(s) = \frac{I}{s} \quad (17.118)$$

si ha:

$$V_C(s) = \frac{\frac{I}{s}}{G + sC} + \frac{C v_C(0^-)}{G + sC} = \quad (17.119)$$

$$= V_C(s)|_{I_S} + V_C(s)|_{v_C(0^-)} \quad (17.120)$$

Si scompone il primo contributo in frazioni parziali:

$$\begin{aligned}
 V_C(s)|_{I_S} &= \frac{I}{s(G + sC)} = \quad (17.121) \\
 &= \frac{\frac{I}{C}}{s\left(\frac{G}{C} + s\right)} \\
 &= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{\frac{G}{C} + s} = \\
 &= \frac{\frac{I}{G}}{s} + \frac{-\frac{I}{G}}{\frac{G}{C} + s}
 \end{aligned}$$



e, antitrasformando, si ottiene il primo contributo della corrente:

$$v_C(t)|_{Is} = \mathcal{L}^{-1}(V_C(s)|_{Is}) = \frac{I}{G} - \frac{I}{G}e^{-\frac{G}{C}t} = \quad (17.122)$$

$$= \frac{I}{G}(1 - e^{-\frac{G}{C}t})u(t) \quad (17.123)$$

Il contributo dovuto allo stato iniziale risulta:

$$\begin{aligned} V_C(s)|_{v_C(0^-)} &= \frac{Cv_C(0^-)}{G + sC} = \\ &= \frac{v_C(0^-)}{\frac{G}{C} + s} \end{aligned} \quad (17.124)$$

e, antitrasformando, si ha:

$$v_C(t)|_{v_C(0^-)} = \mathcal{L}^{-1}\left(V_C(s)|_{v_C(0^-)}\right) = v_C(0^-)e^{-\frac{G}{C}t}u(t) \quad (17.125)$$

Sommando i due precedenti contributi si ottiene la tensione totale del circuito:

$$v_C(t) = \left[ \frac{I}{G}(1 - e^{-\frac{G}{C}t}) + v_C(0^-)e^{-\frac{G}{C}t} \right] u(t) \quad (17.126)$$

Con i seguenti valori numerici:

$$I = 2; G = 1; C = \frac{1}{2}; v_C(0^-) = 1$$

si ha:

$$\begin{aligned} V_C(s)|_{Is} &= \frac{I}{s(G + sC)} = \frac{2}{s(1 + \frac{s}{2})} = \\ &= \frac{4}{s(s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} \end{aligned}$$

da cui si ottiene il contributo della sorgente di corrente indipendente:

$$v_C(t)|_{Is} = (2 - 2e^{-2t})u(t)$$

Il contributo dello stato iniziale risulta:

$$\begin{aligned} V_C(s)|_{v_C(0^-)} &= \frac{Cv_C(0^-)}{G + sC} = \\ &= \frac{1}{2 + s} \end{aligned} \quad (17.127)$$

da cui si ottiene:

$$v_C(t)|_{v_C(0^-)} = e^{-2t}u(t)$$

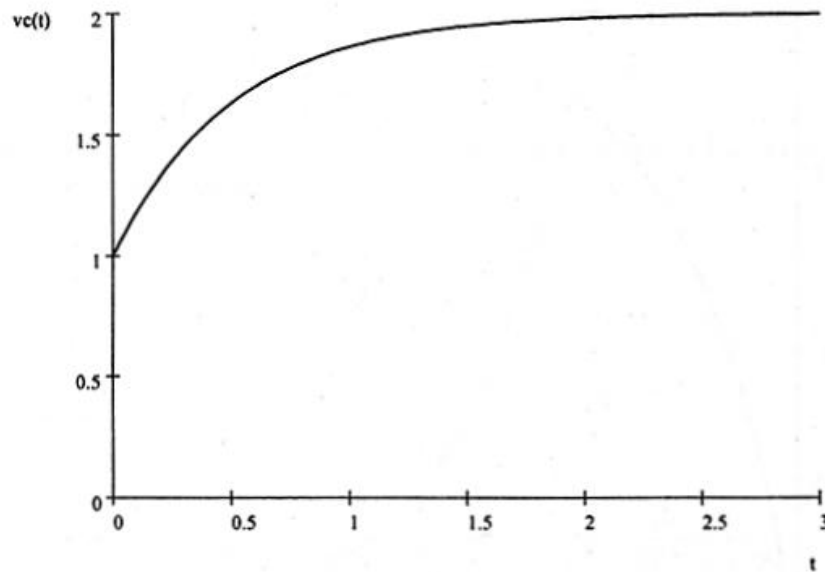


Fig. 17.15. Tensione sul condensatore durante il transitorio GC con gradino di corrente.

Sommando i due contributi si ottiene la tensione totale del circuito:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= (2 - 2e^{-2t} + e^{-2t}) u(t) = \\ &= (2 - e^{-2t}) u(t) \end{aligned}$$

il cui andamento è mostrato in Fig. 17.15.

Se la corrente della sorgente è un impulso rettangolare di ampiezza  $I = 2$ , della durata di  $T$  secondi (Fig. 17.16) con inizio per  $t = 0$  e fine per  $t = T$ :

$$i_s(t) = I (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - T)),$$

la trasformata di Laplace della sorgente è somma di due contributi:

$$I_s(s) = I \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \right) \quad (17.128)$$

e altrettanto sarà la tensione sul circuito GC:

$$V(s)|_{I_s} = \frac{I \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \right)}{G + sC} = \quad (17.129)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{I \left( \frac{1}{s} \right)}{G + sC} + \frac{I \left( -\frac{e^{-Ts}}{s} \right)}{G + sC} = \\ &= V_1(s) + V_2(s) \end{aligned} \quad (17.130)$$

Si hanno quindi due contributi di tensione identici ma traslati e di segno opposto; il primo  $V_1(s)$  è identico a quello già visto nel caso di semplice

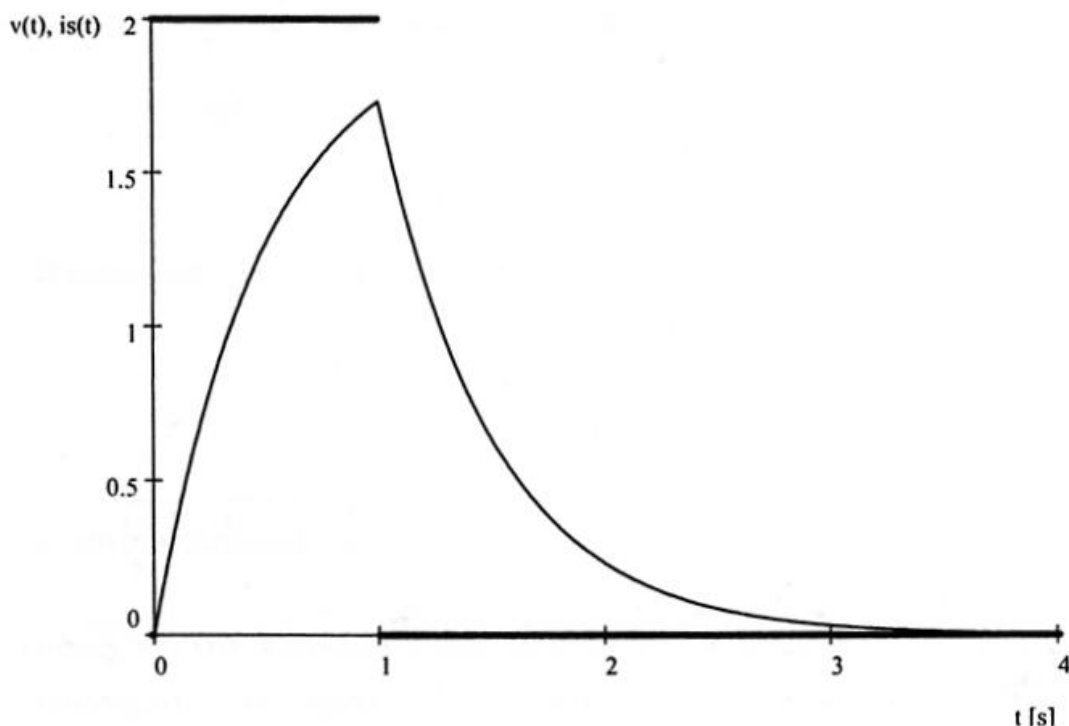


Fig. 17.16. Risposta del circuito GC parallelo ad un impulso rettangolare di corrente. E' rappresentata la tensione (a tratto sottile) e la sorgente di corrente a gradino rettangolare (a tratto grosso).

sorgente a gradino. La corrispondente funzione nel tempo risulta:

$$v_1(t) = \frac{I}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{L}t}\right) \text{Heaviside}(t) \quad (17.131)$$

Il secondo contributo:

$$V_2(s) = -\frac{Ie^{-Ts}}{s(G + sC)} \quad (17.132)$$

ammette la stessa antitrasformata del primo contributo ma traslata in ritardo del tempo  $T$  e cambiato di segno:

$$v_2(t) = -\frac{I}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{C}(t-T)}\right) \text{Heaviside}(t - T)$$

La tensione risultante dalla sovrapposizione dei due transitori è:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) = \\ &= \frac{I}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{C}t}\right) \text{Heaviside}(t) - \frac{I}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{C}(t-T)}\right) \text{Heaviside}(t - T) \end{aligned}$$

ed è mostrata nella Fig. 17.16 avendo posto:  $I = 2$ ;  $G = 1$ ;  $C = \frac{1}{2}$ ;  $T = 1$ .

Se la sorgente di corrente applicata al circuito GC parallelo è sinusoidale,

$$i_s(t) = I \cos \omega t \quad (17.133)$$

la sua trasformata vale:

$$I_S(s) = I \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (17.134)$$

Si può, mediante la dualità con il circuito  $RL$  serie (17.114), dedurre la tensione ai capi del circuito:

$$V(s)|_{I_S} = \frac{I \frac{s}{s^2 + \omega^2}}{G + Cs} \quad (17.135)$$

Ponendo:

$$I = 1; G = 1; C = \frac{1}{2}; \omega = 4;$$

si ha:

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(G + Cs)} = \frac{2s}{(s^2 + 16)(s + 2)} \\ &= -\frac{1}{5(2 + s)} + \frac{8 + s}{5(16 + s^2)} = \end{aligned} \quad (17.136)$$

$$= -\frac{1}{5(2 + s)} + \frac{\frac{1}{10} - j\frac{1}{5}}{s - 4i} + \frac{\frac{1}{10} + j\frac{1}{5}}{s + 4i} \quad (17.137)$$

Da cui si ottiene l'andamento nel tempo della tensione nel circuito  $GC$  alimentato da una sorgente di corrente cosinusoidale di ampiezza massima unitaria:

$$\begin{aligned} v(t)|_{I_S} &= -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}\cos 4t + \frac{2}{5}\sin 4t = \\ &= -\frac{1}{5}e^{-2t} + \left| \frac{1}{5} + j\frac{2}{5} \right| \cos(4t - \arctan 2) \\ &= -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{\sqrt{5}}{5} \cos(4t - \arctan 2) = \\ &= -0.2e^{-2t} + 0.4472 \cos(4t - \arctan 2) \end{aligned}$$

rappresentata in Fig. 17.17 e duale della Fig. 17.13 del transitorio  $RL$  serie alimentato da sorgente di tensione sinusoidale di ampiezza unitaria. Nei due casi, tensione e corrente si scambiano.

### 17.8.3 $RC$ serie con onda di tensione rettangolare

Si consideri il circuito  $RC$  serie alimentato da una sorgente di tensione ad onda rettangolare:

$$v_s(t) = V (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - T))$$

per la quale si ha:

$$V_s(s) = V \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \right)$$

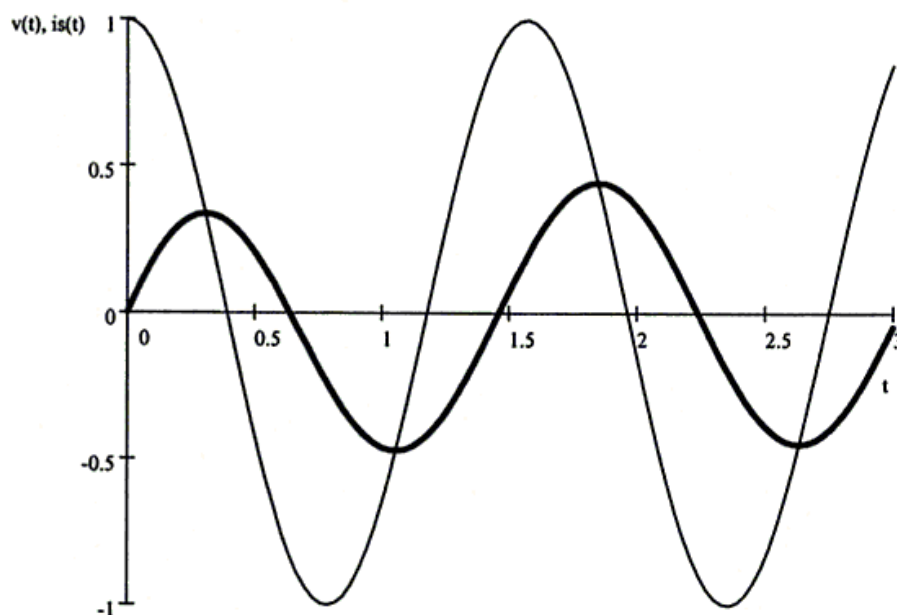


Fig. 17.17. Transitorio del circuito GC parallelo con sorgente sinusoidale: tensione (a tratto grosso) e corrente della sorgente (a tratto sottile).

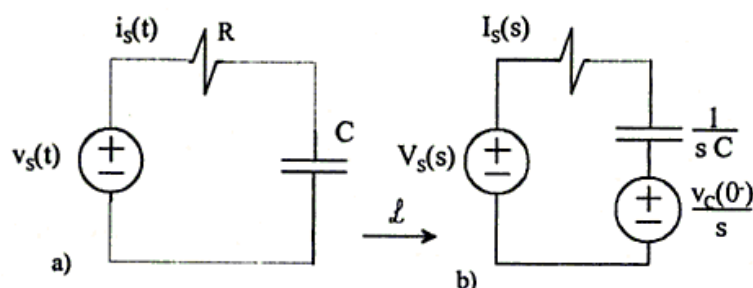


Fig. 17.18. Circuito RC serie alimentato con tensione rettangolare.

Il circuito equivalente trasformato, con il modello tipo serie del condensatore, è riportato in Fig.17.18.

La tensione sul condensatore risulta:

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v_C(0^-)}{s} \quad (17.138)$$

o, mediante la regola del partitore di tensione, anche:

$$V_C(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \left( V_S(s) - \frac{v_C(0^-)}{s} \right) + \frac{v_C(0^-)}{s} \quad (17.139)$$

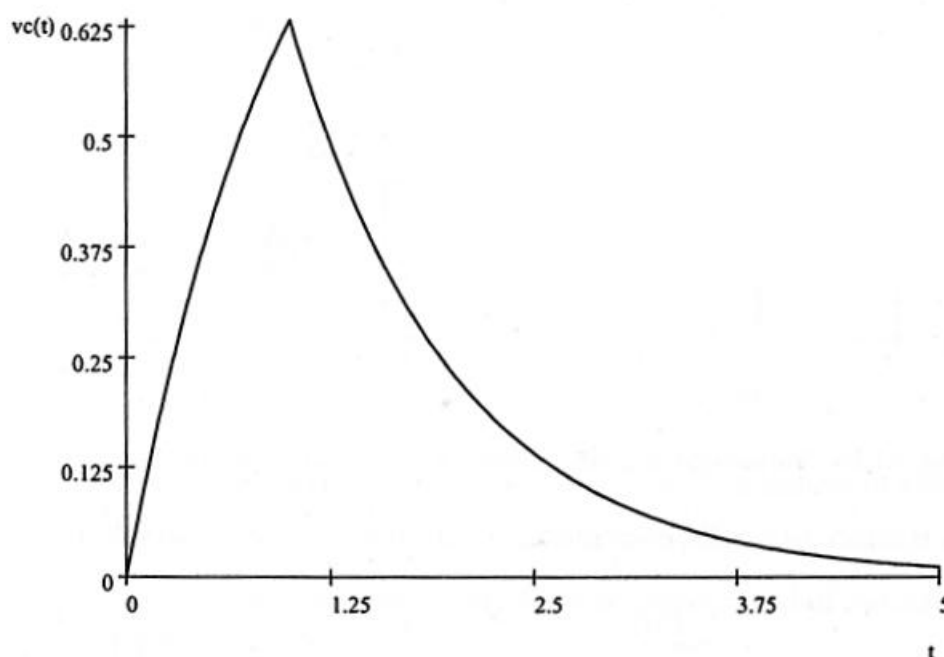


Fig. 17.19. Risposta del circuito RC serie ad un'onda rettangolare di tensione.

Considerando solo l'effetto della sorgente di tensione indipendente ( $v_C(0^-) = 0$ ) e ponendo  $V = 1, R = 1, C = 1, T = 1$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 V_C(s) &= \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} V_S(s) = \\
 &= \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} V \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \right) = \\
 &= \frac{1}{s(s+1)} (1 - e^{-s}) = \\
 &= \left( \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} \right) - \left( \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} \right) e^{-s} \\
 &= \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) - \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) e^{-s}
 \end{aligned}$$

a cui corrisponde la seguente tensione  $v_C(t)$  nel dominio del tempo:

$$v_C(t) = (1 - e^{-t}) \text{Heaviside}(t) - (1 - e^{-(t-1)}) \text{Heaviside}(t-1)$$

mostrata in Fig. 17.19

#### 17.8.4 Carica e scarica impulsiva di un condensatore

Si imponga una sorgente di tensione a gradino  $v_S(t) = Vu(t)$  ad un condensatore inizialmente carico con tensione  $v_C(0^-)$ , come mostrato in Fig. 17.20.

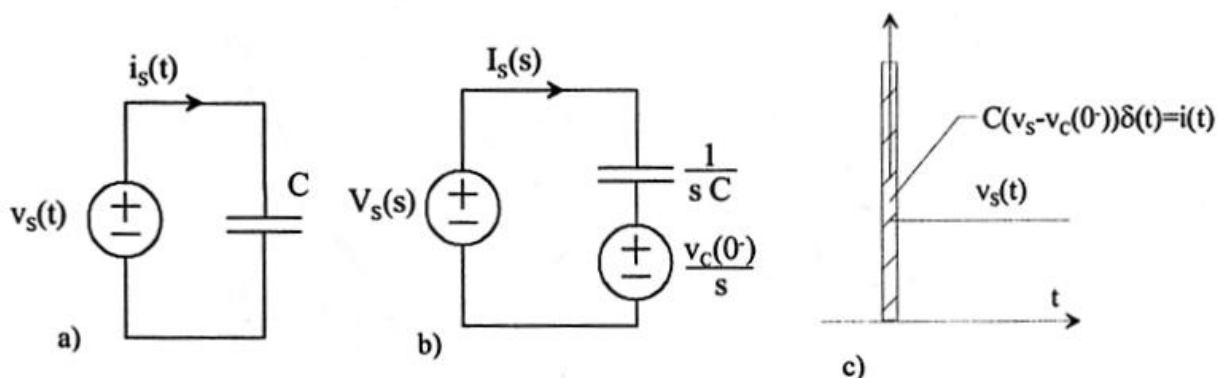


Fig. 17.20. Variazione impulsiva dello stato di carica di un condensatore.

La trasformata della corrente assorbita dal condensatore risulta:

$$\begin{aligned}
 I(s) &= \frac{V_S(s) - \frac{v_C(0^-)}{s}}{\frac{1}{sC}} = \\
 &= \frac{\frac{V}{s} - \frac{v_C(0^-)}{s}}{\frac{1}{sC}} = \\
 &= C(V - v_C(0^-))
 \end{aligned} \quad (17.140)$$

e, antitrasformando, si ottiene la corrente assorbita dal condensatore durante la variazione impulsiva del suo stato di carica:

$$i(t) = C(V - v_C(0^-))\delta(t) \quad (17.141)$$

Il condensatore varia la propria energia accumulata istantaneamente assorbendo un impulso di corrente di ampiezza infinita e di area pari a

$$C(V - v_C(0^-)), \quad (17.142)$$

uguale alla variazione di carica elettrica  $\Delta q$  assorbita (Fig. 17.20c).

### 17.8.5 Carica e scarica impulsiva di un induttore

Se si impone una sorgente di corrente a gradino  $i_S(t) = Iu(t)$  ad un induttore inizialmente carico con corrente  $i_L(0^-)$ , come mostrato in Fig. 17.21, in modo duale rispetto alla precedente discussione relativa ad un condensatore,

la tensione trasformata presente ai terminali dell'induttore risulta:

$$\begin{aligned}
 V(s) &= \frac{I_S(s) - \frac{i_L(0^-)}{s}}{\frac{1}{sL}} = \\
 &= \frac{\frac{I}{s} - \frac{i_L(0^-)}{s}}{\frac{1}{sL}} = \\
 &= L(I - i_L(0^-))
 \end{aligned} \quad (17.143)$$

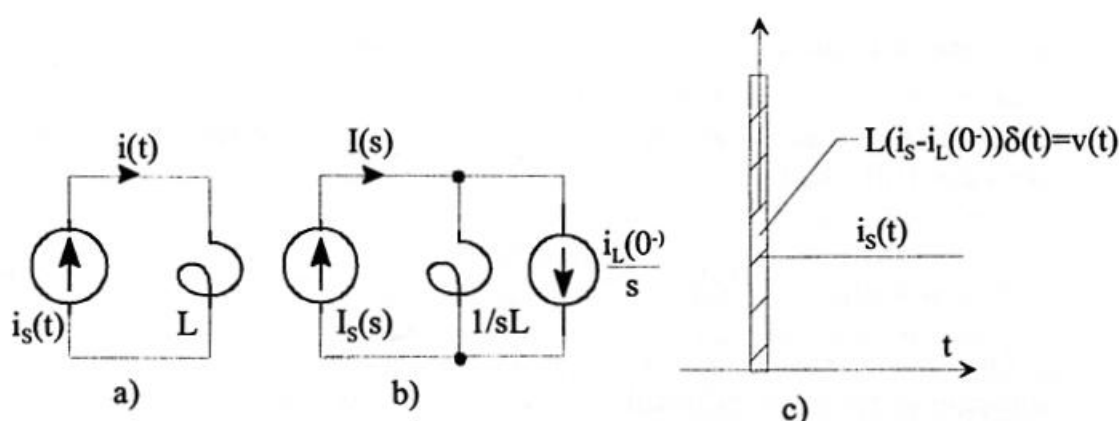


Fig. 17.21. Variazione impulsiva dello stato di carica di un induttore alimentato da un gradino di corrente.

e, antitrasformando, si ottiene la tensione assorbita dall'induttore durante la variazione impulsiva del suo stato di carica:

$$v(t) = L(I - i_L(0^-))\delta(t) \quad (17.144)$$

L'induttore varia la propria energia accumulata istantaneamente assorbendo un impulso di tensione di ampiezza infinita e di area pari a

$$L(I - i_L(0^-)), \quad (17.145)$$

uguale alla variazione del flusso concatenato  $\Delta\psi$ .

## 17.9 Applicazione ai circuiti elettrici del secondo ordine

Si considera ora la soluzione, mediante la trasformata di Laplace, del transitorio di una rete contenente due elementi capaci di accumulo: due induttori o due condensatori fra loro indipendenti, oppure un induttore e un condensatore.

### 17.9.1 Esercizio n. 1 - RLC alimentato con gradino di tensione

Si abbia il circuito RLC serie alimentato da una sorgente di tensione  $v_S(t)$  (Fig. 17.22), caratterizzato da una corrente iniziale nell'induttore pari a  $i_L(0^-) = I_{L0}$  e da una tensione iniziale sul condensatore pari a  $v_C(0^-) = V_{C0}$ .

In Fig. 17.22 è anche riportato il circuito equivalente nel dominio di Laplace: l'induttore è rappresentato da una impedenza  $sL$  in serie ad una



sorgente di tensione di valore  $Li_L(0^-)$ ; il condensatore è rappresentato da una impedenza  $\frac{1}{sC}$  in serie ad una sorgente di tensione di valore  $\frac{v_C(0^-)}{s}$ . Si hanno sei elementi in serie, tre sorgenti di tensione e tre impedenze. La corrente  $I(s)$  risulta:

$$I(s) = \frac{V_S(s) + Li_L(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} \quad (17.146)$$

La corrente  $I(s)$  è somma di tre contributi, rispettivamente dovuti alla sorgente di tensione indipendente  $V_S(s)$ , alla sorgente di tensione pilotata dalla corrente iniziale dell'induttore  $Li_L(0^-)$  ed alla sorgente di tensione pilotata dalla tensione iniziale del condensatore  $(-v_C(0^-)/s)$ . I tre contributi possono essere valutati separatamente.

Il contributo di corrente dovuto alla sorgente di tensione  $V_S(s)$  risulta:

$$I(s)|_{V_S} = \frac{V_S(s)}{R + sL + \frac{1}{sC}} \quad (17.147)$$

Con sorgente di tensione a gradino unitario:  $v_S(t) = u(t)$  si ha  $V_S(s) = \frac{1}{s}$ . Assumendo, inoltre:

$$R = 3 \, \Omega; L = 1 \, \text{H}; C = \frac{1}{2} \, \text{F}$$

si ha:

$$\begin{aligned} I(s)|_{V_S} &= \frac{\frac{1}{s}}{3 + s + \frac{2}{s}} = \\ &= \frac{1}{3s + s^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \end{aligned} \quad (17.148)$$

e la corrispondente funzione del tempo vale:

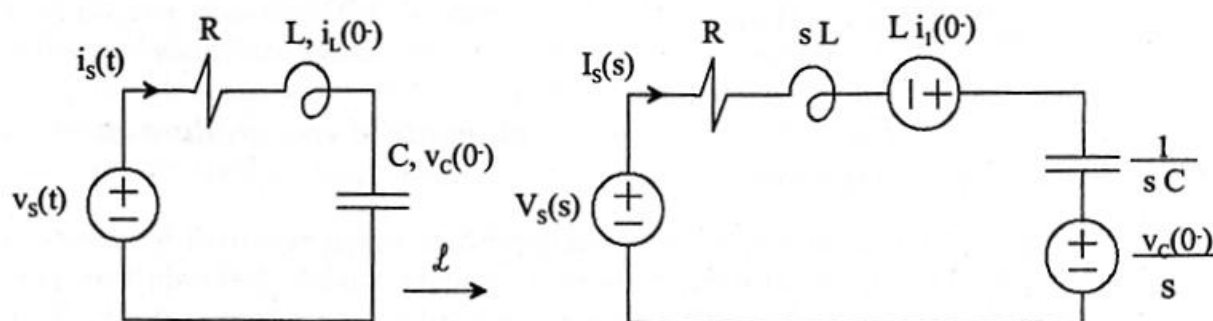


Fig. 17.22. Circuito RLC serie e corrispondente circuito equivalente nel dominio della trasformata di Laplace.

$$i(t)|_{V_S} = [e^{-t} - e^{-2t}] u(t) \quad (17.149)$$

Si osservi che se l'ampiezza del gradino applicato vale  $V$ , la corrente risulta  $V$  volte quella calcolata.

Si osservi pure che le radici del denominatore sono reali e distinte ( $s_1 = -1$  e  $s_2 = -2$ ). Esse dipendono esclusivamente dai parametri passivi della rete in esame e non dalle sorgenti esterne o interne. Pertanto il transitorio in risposta ad una generica forzante esterna (sorgente di tensione applicata) o interna (condizioni iniziali) è *aperiodico* e costituito dalla combinazione lineare dei due esponenziali  $e^{s_1 t}$  e  $e^{s_2 t}$  associati alle due frequenze naturali della rete in esame. Il valore della generica forzante (interna o esterna) determinerà unicamente il peso di ciascuno dei due esponenziali. Tale peso vale 1 e -1 con i parametri assegnati e con forzante a gradino unitario (vedi 17.149).

Con una corrente iniziale unitaria nell'induttore  $i_L(0^-) = 1$ , si ha:

$$\begin{aligned} I(s)|_{I_{L0}} &= \frac{Li_L(0^-)}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \\ &= \frac{1}{3 + s + \frac{2}{s}} = \\ &= \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \\ &= \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1} \end{aligned} \quad (17.150)$$

e la corrispondente funzione del tempo risulta:

$$i(t)|_{I_{L0}} = [2e^{-2t} - e^{-t}] u(t) \quad (17.151)$$

cioè si hanno ancora i due precedenti esponenziali associati alle due frequenze naturali ma con pesi opportunamente diversi, dipendenti dai parametri assegnati.

Se la corrente iniziale è  $I_{L0}$ , la corrente risulta  $I_{L0}$  volte quella calcolata.

Con una tensione iniziale unitaria sul condensatore  $v_C(0^-) = 1$ , si ha:

$$\begin{aligned} I(s)|_{V_{C0}} &= \frac{-\frac{v_C(0^-)}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \\ &= \frac{-\frac{1}{s}}{3 + s + \frac{2}{s}} = \\ &= -\frac{1}{3s + s^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} \end{aligned} \quad (17.152)$$

e la corrispondente funzione del tempo risulta:

$$i(t)|_{V_{C0}} = [e^{-2t} - e^{-t}] u(t) \quad (17.153)$$

ossia, ancora, i due precedenti esponenziali associati alle due frequenze naturali ma con pesi opportunamente diversi, dipendenti dai parametri assegnati.

Si osservi che la tensione iniziale di carica del condensatore fornisce una espressione della corrente che è identica, a parte il segno, a quella dovuta alla sorgente esterna a gradino. Con gradino di ampiezza  $V$  applicato e tensione iniziale  $V_{C0} = V$ , questi due contributi di corrente si compensano esattamente; in generale si sottraggono uno all'altro, o si sommano, ma hanno lo stesso andamento nel tempo.

Se la tensione iniziale è  $V_{C0}$ , la corrente risulta  $V_{C0}$  volte quella calcolata. Sommando i tre contributi appena calcolati, assumendo:

$$V = 1 \text{ V}; I_{L0} = 1 \text{ A}; V_{C0} = 1 \text{ V}$$

si ha la seguente corrente risultante:

$$\begin{aligned} i(t) &= (e^{-t} - e^{-2t}) + (2e^{-2t} - e^{-t}) + (e^{-2t} - e^{-t}) = \\ &= [2e^{-2t} - e^{-t}] u(t) \end{aligned} \quad (17.154)$$

rappresentata in Fig. 17.23. Dal momento che la corrente dovuta alla sorgente a gradino (primo contributo) è uguale ed opposta alla corrente dovuta alla tensione iniziale di carica del condensatore, rimane solo la risposta alla corrente iniziale dell'induttore.

Se si pone, invece:

$$V = 1 \text{ V}; I_{L0} = 0; V_{C0} = -1 \text{ V}$$

si ha:

$$\begin{aligned} i(t) &= (e^{-t} - e^{-2t}) - (e^{-2t} - e^{-t}) = \\ &= [2e^{-t} - 2e^{-2t}] u(t) \end{aligned} \quad (17.155)$$

il cui andamento è riportato in Fig. 17.24.

Si riconosca la congruenza degli andamenti ottenuti, osservando che il valore iniziale della corrente è imposto dalla corrente iniziale dell'induttore in serie al circuito: +1 nel caso precedente e 0 nel caso attuale; che il valore finale della corrente deve essere zero, per effetto del condensatore in serie al circuito e della sorgente di tensione costante applicata; che, infine, la derivata iniziale della corrente del circuito (e dell'induttore) è proporzionale

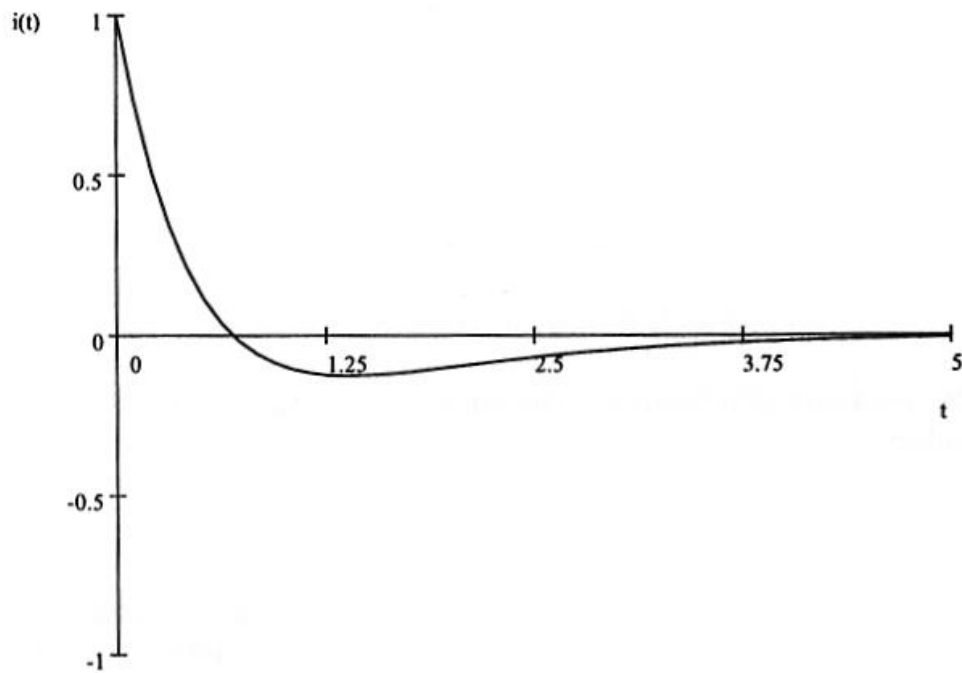


Fig. 17.23. Corrente transitoria nel circuito RLC alimentato da un gradino unitario di tensione, con  $I_{L0} = 1$  e  $V_{C0} = 1$ .

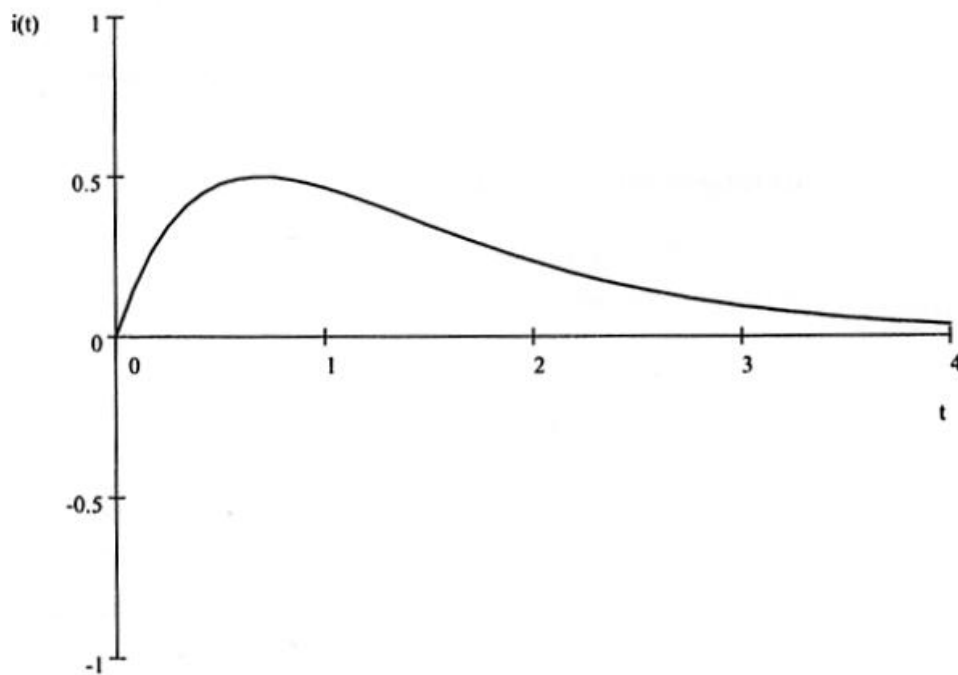
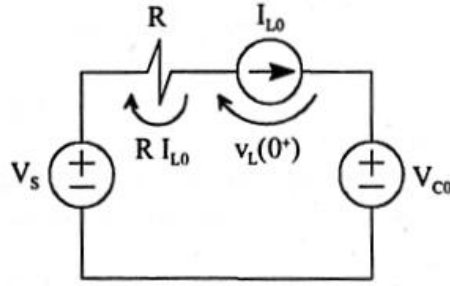


Fig. 17.24. Corrente transitoria nel circuit RLC con  $V = 1$  V;  $I_{L0} = 0$ ;  $V_{C0} = -1$  V.

Fig. 17.25. Circuito RLC al tempo  $t = 0^+$ .

alla tensione sull'induttore all'istante  $t = 0^+$  (Fig. 17.25) che, a sua volta, risulta:

$$\begin{aligned}
 v_L(0^+) &= v_S(0^+) - v_R(0^+) - v_C(0^+) = \\
 &= v_S(0^+) - Ri_{L0}(0^+) - v_C(0^+) = \\
 &= L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0^+} = \begin{cases} 1 - 3 - 1 = -3 & \text{nel primo caso} \\ 1 - 0 + 1 = 2 & \text{nel secondo caso} \end{cases}
 \end{aligned} \quad (17.156)$$

La tensione  $V_C(s)$  sul condensatore del circuito in esame si può esprimere come somma di due contributi: la tensione sull'impedenza  $\frac{1}{sC}$  e la tensione di sorgente  $\frac{v_C(0^-)}{s}$ . Esprimendo la tensione sull'impedenza  $\frac{1}{sC}$  mediante la regola del partitore di tensione, la tensione  $V_C(s)$  sul condensatore risulta:

$$V_C(s) = \left( V_S(s) + Li_L(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s} \right) \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} + \frac{v_C(0^-)}{s} \quad (17.157)$$

Con forzanti esterne ed interne unitarie:

$$V = 1 \text{ V}; I_{L0} = 1 \text{ A}; V_{C0} = 1 \text{ V}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
 V_C(s) &= \left( \frac{1}{s} + 1 - \frac{1}{s} \right) \frac{\frac{2}{s}}{3 + s + \frac{2}{s}} + \frac{1}{s} = \\
 &= \frac{1}{s} + \frac{2}{3s + s^2 + 2} = \\
 &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}
 \end{aligned} \quad (17.158)$$

la cui corrispondente funzione del tempo risulta:

$$v_C(t) = [2e^{-t} - 2e^{-2t} + 1] u(t) \quad (17.159)$$

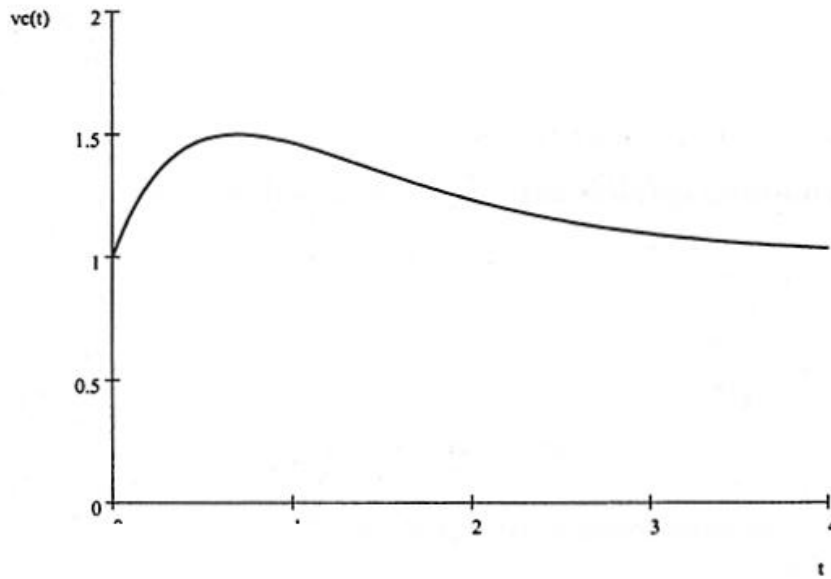


Fig. 17.26. Tensione sul condensatore durante il transitorio RLC serie alimentato da un gradino di tensione.

ed il cui andamento è mostrato in Fig. 17.26.

La tensione sul condensatore può essere vista come la somma degli effetti di tre cause distinte: la tensione della sorgente indipendente e le tensioni associate alle condizioni iniziali; ciascun effetto può essere calcolato separatamente dagli altri due e sommato a questi per avere l'effetto risultante.

L'effetto della sorgente indipendente sulla tensione del condensatore risulta:

$$V_C(s)|_{V_S} = V_S(s) \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} \quad (17.160)$$

Con gradino unitario di tensione applicata ed i precedenti valori dei parametri si ha:

$$\begin{aligned} V_C(s)|_{V_S} &= \frac{1}{s} \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \\ &= \frac{1}{s} \frac{\frac{2}{s}}{3 + s + \frac{2}{s}} = \\ &= \frac{1}{s} \frac{2}{3s + s^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{s} \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \end{aligned} \quad (17.161)$$

La tensione sul condensatore, per effetto della tensione della sorgente a gradino unitario, risulta:

$$v_C(t)|_{V_S} = [e^{-2t} - 2e^{-t} + 1] u(t)$$

L'effetto della corrente iniziale unitaria dell'induttore risulta:

$$\begin{aligned} V_C(s)|_{I_{L,0}} &= Li_L(0^-) \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \\ &= \frac{\frac{2}{s}}{3 + s + \frac{2}{s}} = \\ &= \frac{2}{3s + s^2 + 2} = \\ &= \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \end{aligned} \quad (17.162)$$

e la corrispondente funzione del tempo vale:

$$v_C(t)|_{I_{L,0}} = [2e^{-t} - 2e^{-2t}] u(t)$$

Infine, il contributo di tensione sul condensatore dovuto alla tensione iniziale unitaria del condensatore, vale:

$$\begin{aligned} V_C(s)|_{V_{C,0}} &= -\frac{v_C(0^-)}{s} \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} + \frac{v_C(0^-)}{s} = \\ &= -\frac{1}{s} \frac{\frac{2}{s}}{3 + s + \frac{2}{s}} + \frac{1}{s} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{2}{3s + s^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \\ &= \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

la cui corrispondente funzione del tempo risulta:

$$v_C(t)|_{V_{C,0}} = [2e^{-t} - e^{-2t}] u(t)$$

Sommando i tre effetti si ottiene l'effetto risultante:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= (e^{-2t} - 2e^{-t} + 1) + (2e^{-t} - 2e^{-2t}) + (2e^{-t} - e^{-2t}) = \\ &= [2e^{-t} - 2e^{-2t} + 1] u(t) \end{aligned}$$

che uguaglia, ovviamente, il risultato già ottenuto precedentemente (17.159) e visualizzato in Fig.17.26.

Ponendo:

$$V = -1 \text{ V}; I_{L0} = 1 \text{ A}; V_{C0} = 1 \text{ V}$$

si ha:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= -1 (e^{-2t} - 2e^{-t} + 1) \\ &\quad + (2e^{-t} - 2e^{-2t}) + (2e^{-t} - e^{-2t}) \\ &= [6e^{-t} - 4e^{-2t} - 1] u(t) \end{aligned}$$

rappresentato in Fig.17.26. Si può verificare immediatamente la congruenza del risultato ottenuto, osservando che il valore iniziale della tensione sul condensatore è un dato assegnato, che il valore finale della tensione del condensatore deve uguagliare la tensione della sorgente esterna e, infine, che la derivata iniziale della tensione sul condensatore  $\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{0^+}$  deve uguagliare la corrente iniziale dell'induttore diviso la capacità del condensatore  $\frac{i_L(0^+)}{C}$ . Infatti, al tempo  $t = 0^+$  il circuito equivalente è quello riportato in Fig.17.25, dal quale è evidente che la sorgente di corrente associata alla corrente iniziale dell'induttore impone la propria corrente a tutti gli elementi in serie, compreso il condensatore.

Ponendo:

$$V = -1 \text{ V}; I_{L0} = -4 \text{ A}; V_{C0} = 1 \text{ V}$$

si ha:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= -1 (e^{-2t} - 2e^{-t} + 1) - 4 (2e^{-t} - 2e^{-2t}) \\ + (2e^{-t} - e^{-2t}) &= [6e^{-2t} - 4e^{-t} - 1] u(t) \end{aligned}$$

il cui andamento è mostrato in Fig.17.27.

### 17.9.2 Esercizio n. 2 - Trasformata di Laplace con equazioni di stato

La corrente dell'induttore e la tensione del condensatore costituiscono le variabili di stato del circuito RLC in esame. In modo del tutto generale, quindi, si può applicare il *metodo delle equazioni di stato* per determinare l'espressione delle variabili di stato nel dominio della trasformata di Laplace.

Considerando l'*albero proprio* del circuito RLC in esame (Fig. 17.28b), l'insieme di taglio fondamentale  $t_C$  associato al condensatore e la maglia fondamentale associata all'induttore  $m_L$ , si ha:



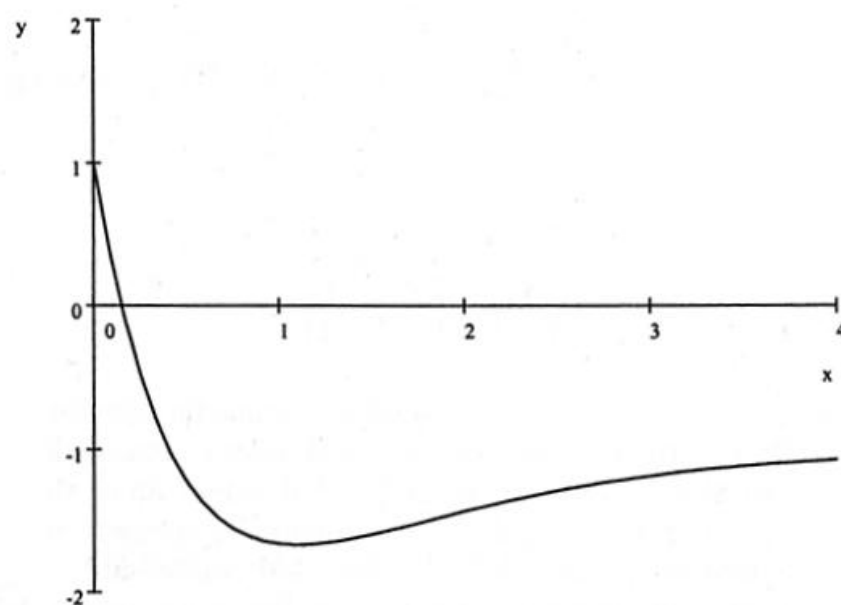


Fig. 17.27. Transitorio di tensione del condensatore per  $V = -1$  V;  $I_{L0} = -4$  A;  $V_{C0} = 1$  V.

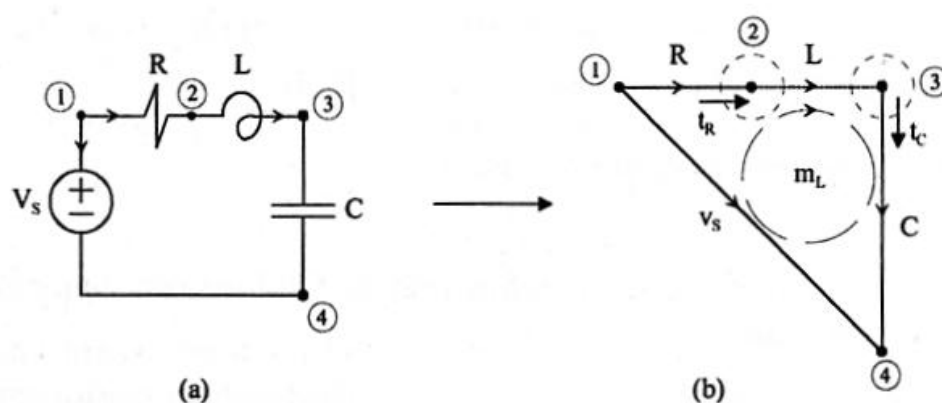


Fig. 17.28. Transitorio RLC nel dominio di Laplace e con equazioni di stato.

$$t_C) \quad i_C - i_L = 0 \Rightarrow C \frac{dv_C}{dt} - i_L = 0 \quad (17.163)$$

$$m_L) \quad v_C + v_L + v_R - v_S = 0 \Rightarrow v_C + L \frac{di_L}{dt} + v_R - v_S = 0$$

dove  $v_R$  è una variabile ausiliaria che si determina mediante l'equazione dell'insieme di taglio  $t_R$  associato al resistore di resistenza  $R$ :

$$t_R) \quad i_R - i_L = 0 \Rightarrow i_R = i_L \Rightarrow v_R = Ri_L \quad (17.164)$$

Sostituendo  $v_R$  nella seconda delle equazioni (17.163), si ottiene il sistema delle equazioni di stato:

$$\begin{cases} C \frac{dv_C}{dt} - i_L = 0 \\ L \frac{di_L}{dt} + v_C + Ri_L - v_S = 0 \end{cases} \quad (17.165)$$

che può essere tradotto nelle corrispondenti equazioni di stato nel dominio di Laplace:

$$\begin{cases} C[sV_C(s) - v_C(0^-)] - I_L(s) = 0 \\ L[sI_L(s) - i_L(0^-)] + V_C(s) + RI_L(s) - V_S(s) = 0 \end{cases} \quad (17.166)$$

Portando al secondo membro i contributi dovuti alla sorgente ed ai valori iniziali, si ha:

$$\begin{cases} sCV_C(s) - I_L(s) = Cv_C(0^-) \\ V_C(s) + (R + sL)I_L(s) = V_S(s) + Li_L(0^-) \end{cases} \quad (17.167)$$

o anche, in forma matriciale,

$$\begin{pmatrix} sC & -1 \\ 1 & R + sL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cv_C(0^-) \\ V_S(s) + Li_L(0^-) \end{pmatrix} \quad (17.168)$$

da cui si ottiene l'espressione delle variabili di stato  $V_C(s)$  e  $I_L(s)$  in funzione delle forzanti esterne ed interne e dei parametri del circuito:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} sC & -1 \\ 1 & R + sL \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Cv_C(0^-) \\ V_S(s) + Li_L(0^-) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{CRs + CLs^2 + 1} \begin{pmatrix} R + Ls & 1 \\ -1 & sC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} CV_{C0} \\ V_S(s) + LI_{L0} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{CRs + CLs^2 + 1} \begin{pmatrix} (R + Ls)CV_{C0} + V_S(s) + LI_{L0} \\ -CV_{C0} + sC(V_S(s) + LI_{L0}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17.169)$$

Il metodo delle equazioni di stato è del tutto generale e sistematico. La sua integrazione con il metodo della trasformata di Laplace consente di effettuare l'analisi in regime dinamico anche di circuiti lineari complessi e in presenza di variazioni impulsive dello stato di carica di induttori e condensatori.

### 17.9.3 Esercizio n. 3 - RLC con forzante sinusoidale e frequenze naturali reali e distinte

Si consideri la risposta di un circuito RLC ad una forzante sinusoidale. La corrente nel circuito di Fig. 17.22, per effetto di una generica forzante, in assenza di condizioni iniziali, risulta:

$$I(s) = \frac{V_S(s)}{R + sL + \frac{1}{sC}} \quad (17.170)$$

Ponendo  $v_S(t) = V \cos \omega t$ , si ha  $V_S(s) = V \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ . Con ciò, la corrente diventa:

$$I(s) = \frac{V \frac{s}{s^2 + \omega^2}}{R + sL + \frac{1}{sC}} \quad (17.171)$$

Assumendo:

$$V = 1; \omega = 1; R = 3; L = 1; C = \frac{1}{2} \quad (17.172)$$

si ha:

$$I(s) = \frac{V \frac{s}{s^2 + \omega^2}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \quad (17.173)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{s}{(s^2 + 1)(s + \frac{2}{s} + 3)} = \\ &= \frac{s^2}{(s^2 + 1)(s + 1)(s + 2)} = \\ &= \frac{s^2}{(s + 1)(s + 2)(s - j)(s + j)} = \\ &= \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s + 2} + \frac{\bar{A}_3}{s - j} + \frac{\bar{A}_3^*}{s + j} \end{aligned} \quad (17.174)$$

$$= \frac{1}{2(s + 1)} - \frac{4}{5(s + 2)} + \frac{\frac{3}{20} + \frac{1}{20}j}{s - j} + \frac{\frac{3}{20} - \frac{1}{20}j}{s + j} \quad (17.175)$$

Le radici del denominatore di  $I(s)$  sono quattro: due reali,  $s_1 = -1$  ed  $s_2 = -2$ , associate ai parametri della rete, e due complesse e coniugate,  $s_3 = j$  e  $s_4 = -j$ , associate alla sorgente di tensione sinusoidale applicata.

Sviluppando in frazioni parziali, si trova che i numeratori associati alle due radici complesse e coniugate sono pure complessi e coniugati:  $\bar{A}_3 = \frac{3}{20} + \frac{1}{20}j$  e  $\bar{A}_3^* = \frac{3}{20} - \frac{1}{20}j$ .

Antitrasformando, si ottiene:

$$i(t) = \left[ \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{4}{5}e^{-2t} + \left( \frac{3}{20} - \frac{1}{20}j \right) e^{-jt} + \left( \frac{3}{20} + \frac{1}{20}j \right) e^{jt} \right] u(t) \quad (17.176)$$

e, trasformando gli esponenziali di variabile complessa in funzioni trigonometriche, si ha:

$$i(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{4}{5}e^{-2t} + \frac{3}{10}\cos t - \frac{1}{10}\sin t \quad (17.177)$$

La corrente è somma di quattro contributi: i primi due esprimono il transitorio in risposta alla tensione sinusoidale applicata mentre i secondi due forniscono l'andamento di regime della corrente.

Il corrispondente fasore corrente di regime risulta:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{3}{10} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{10\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{3^2+1}}{10\sqrt{2}} e^{j \arctan \frac{1}{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10\sqrt{2}} e^{j \arctan \frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{2}} e^{j \arctan \frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (17.178)$$

L'impedenza  $\bar{Z}$  del circuito vale:

$$\bar{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 3 - j = \sqrt{10} e^{-j \arctan \frac{1}{3}} \quad (17.179)$$

La corrente  $\bar{I}$  di regime, calcolata direttamente con l'algebra dei fasori, vale:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10}} e^{j \arctan \frac{1}{3}} = \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10}} (3 + j) \end{aligned} \quad (17.180)$$

che è uguale al valore di regime già determinato con la trasformata di Laplace (Eq. 17.178).

#### 17.9.4 Esercizio n. 4 - RLC con forzante sinusoidale e frequenze naturali complesse e coniugate.

Si consideri la risposta di un circuito RLC ad una forzante sinusoidale nel caso in cui le frequenze naturali siano complesse e coniugate.

Affinché le frequenze naturali siano complesse e coniugate, assumendo:

$$L = 1; C = \frac{1}{2}$$

la resistenza  $R$  deve essere minore della resistenza critica  $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{2}$ . Poniamo  $R = 2 \Omega$ . Con  $v_S(t) = \cos t$ , ossia  $V = 1$  e  $\omega = 1$ , la corrente  $I(s)$  risulta:

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{V \frac{s}{s^2 + \omega^2}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \\
&= \frac{s^2}{(s^2 + 1)(2s + s^2 + 2)} = \\
&= \frac{s^2}{(s + j)(s - j)(s + 1 + j)(s + 1 - j)} = \\
&= \frac{\bar{A}_1}{s - j} + \frac{\bar{A}_1^*}{s + j} + \frac{\bar{A}_2}{s + 1 - j} + \frac{\bar{A}_2^*}{s + 1 + j} = \\
&= \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}j}{s - j} + \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}j}{s + j} - \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j}{s + (1 - j)} - \frac{\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j}{s + (1 + j)}
\end{aligned}$$

oltre alle due radici complesse e coniugate,  $\pm j$ , associate alla sorgente di tensione sinusoidale, vi sono le due radici complesse e coniugate  $(1 \pm j)$  coincidenti con le frequenze naturali della rete.

La corrente in funzione del tempo risulta:

$$\begin{aligned}
i(t) &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}j\right)e^{jt} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}j\right)e^{-jt} \\
&\quad - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j\right)e^{-(1-j)t} - \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j\right)e^{-(1+j)t} \\
&= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}j\right)e^{jt} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}j\right)e^{-jt} \\
&\quad - e^{-t} \left[ \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j\right)e^{jt} + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j\right)e^{-jt} \right]
\end{aligned}$$

che riscritta, trasformando gli esponenziali di variabile complessa in funzioni trigonometriche, diventa:

$$i(t) = \left( \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t - e^{-t} \left( \frac{2}{5} \cos t - \frac{4}{5} \sin t \right) \right) \text{Heaviside}(t) \quad (17.181)$$

il cui andamento è riportato in Fig. 17.29. Si osservi che la *pulsazione naturale smorzata*  $\omega_d$  dell'oscillazione *smorzata* è uguale alla pulsazione  $\omega = 1$  della sorgente esterna:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{R}{2L} = 1; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2}; \\
\omega_d &= \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2} = 1
\end{aligned} \quad (17.182)$$

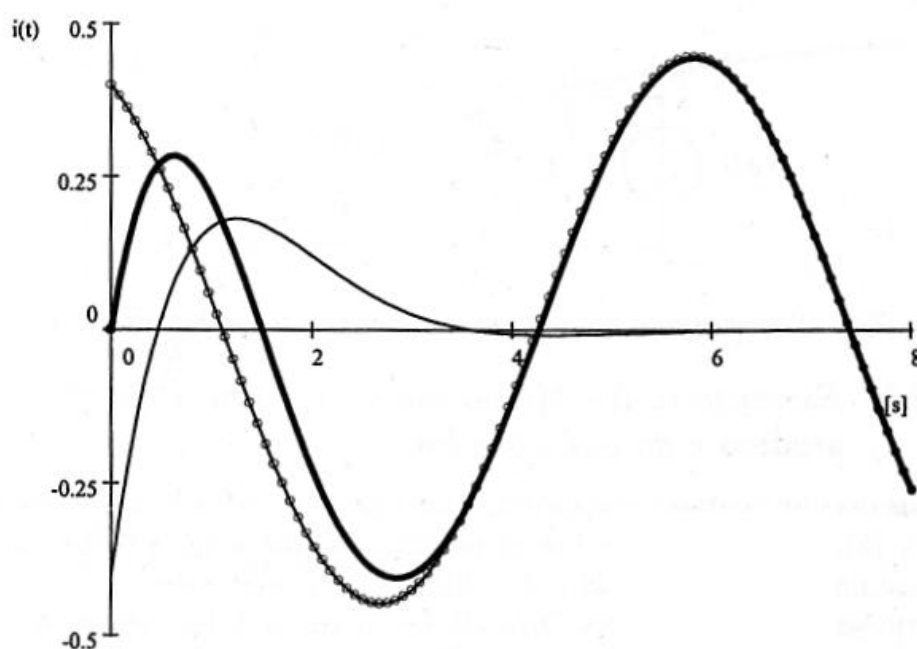


Fig. 17.29. Transitorio della corrente nel circuito RLC con frequenze naturali complesse e coniugate alimentato da sorgente sinusoidale. E' mostrata la componente transitoria, esponenziale smorzata (a tratto sottile), la componente di regime (a tratto punteggiato) e la corrente risultante (a tratto grosso).

Il circuito in esame non è in risonanza, essendo  $\omega_0 \neq \omega$ . Infatti la corrente di regime ( $i_\infty(t) = \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(t + \arctan \frac{1}{2})$ ) non è in fase con la tensione della sorgente ( $v_s(t) = \cos t$ ). In altre parole, l'impedenza del circuito:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = \\ &= 2 + j(1 \cdot 1 - \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{2}}) = \\ &= 2 - j = \sqrt{5} e^{j \arctan(-\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

ha parte immaginaria non nulla.

In Fig. 17.29 sono anche riportate la corrente di regime

$$i_\infty(t) = \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t$$

e la corrente transitoria

$$-e^{-t} \left( \frac{2}{5} \cos t - \frac{4}{5} \sin t \right)$$

la cui somma dà la corrente risultante  $i(t)$ .

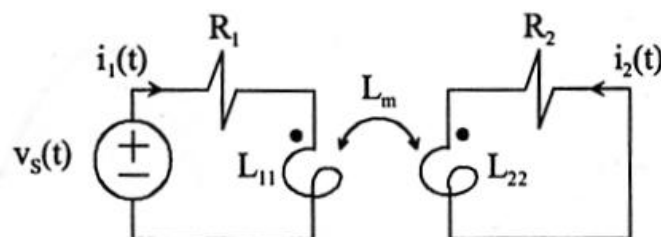


Fig. 17.30. Transitorio di un mutuo induttore con la trasformata di Laplace.

### 17.9.5 Esercizio n. 5 - Mutuo induttore alimentato da gradino e da onda quadra

Si consideri un mutuo induttore in serie con due resistori di resistenza  $R_1$  ed  $R_2$  (Fig. 17.30). Il lato 1 è alimentato da una sorgente di tensione a gradino unitario mentre il lato 2 è chiuso in corto circuito.

Assumendo nulle le correnti iniziali, le equazioni di funzionamento sono:

$$\begin{pmatrix} R_1 + sL_{11} & sL_m \\ sL_m & R_2 + sL_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_S(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponendo:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1; R_2 = 1; L_{11} = 1; L_{22} = 1; L_m = \frac{1}{2}; \\ v &= \text{Heaviside}(t) \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{pmatrix} s+1 & \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}s & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4s+4}{4s+8s^2+3s^3} \\ -\frac{2}{8s+3s^2+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s+2)} - \frac{3}{2(3s+2)} \\ \frac{1}{2(s+2)} - \frac{3}{2(3s+2)} \end{pmatrix}$$

La corrente nel lato alimentato vale:

$$I_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s+2)} - \frac{3}{2(3s+2)}$$

e nel dominio del tempo:

$$i_1(t) = \left( 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \right) \text{Heaviside}(t)$$

rappresentata in Fig. 17.31.

La corrente assorbita dal lato in corto-circuito:

$$I_2(s) = \frac{1}{2(s+2)} - \frac{3}{2(3s+2)}$$

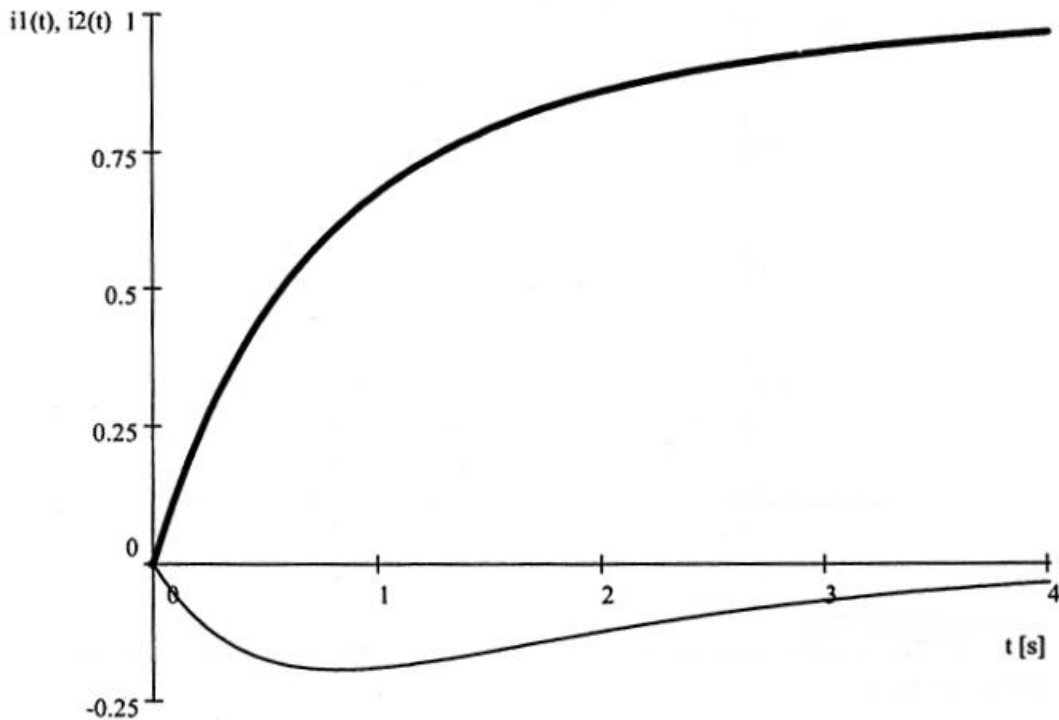


Fig. 17.31. Transitorio della corrente  $i_1(t)$  nel lato alimentato (tratto grosso) e della corrente  $i_2(t)$  nel lato in corto-circuito (tratto sottile) del mutuo induttore alimentato da un gradino di tensione.

e la corrispondente funzione del tempo è:

$$i_2(t) = \left( \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}t} \right) \text{Heaviside}(t)$$

rappresentata in Fig. 17.31

Si noti che, con sorgente a gradino di tensione, la corrente di regime del lato alimentato  $i_1$  del mutuo induttore è limitata solo dalla resistenza  $R_1$  e che la corrente nel lato secondario  $i_2$  del mutuo induttore è diversa da zero solo quando la corrente primaria ha derivata non nulla. In ogni caso, considerando le correnti entranti dai terminali corrispondenti del mutuo induttore, la corrente  $i_2$  è sempre opposta alla corrente  $i_1$ .

Si alimenti ora il mutuo induttore con una onda quadra di tensione di ampiezza unitaria e di durata finita pari a 2 s:

$$\begin{aligned} v_s(t) &= u(t) - u(t-2) = \\ &= \text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t-2) \end{aligned}$$

mostrata in Fig. 17.32. Un'onda quadra si ottiene sommando ad un gradino un altro gradino di segno opposto e traslato nel tempo.

La trasformata della tensione di sorgente risulta:

$$V_S(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$



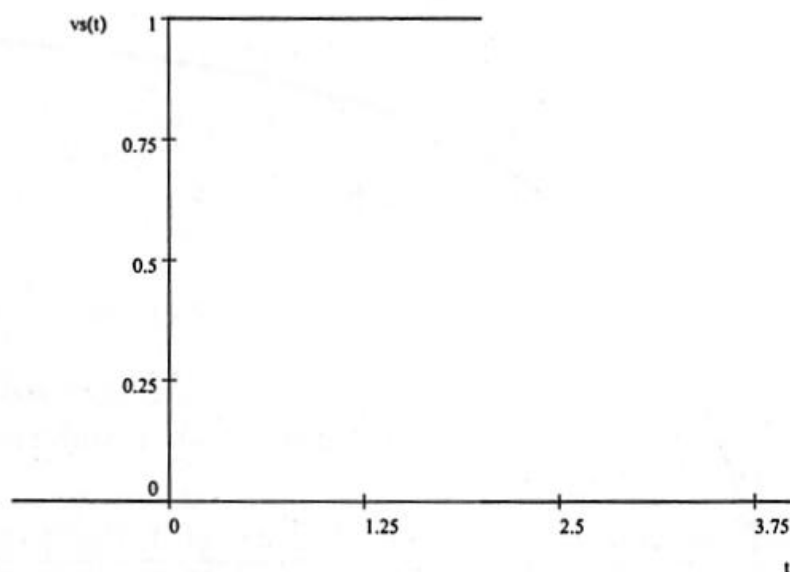


Fig. 17.32. Onda quadra di tensione applicata al mutuo induttore in corto-circuito.

La corrente nel lato alimentato  $I_1(s)$  risulta composta da due contributi identici ma di cui il secondo è traslato rispetto al primo, ovvero è moltiplicato per  $e^{-2s}$ :

$$I_1(s) = \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s+2)} - \frac{3}{2(3s+2)} \right) - \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s+2)} - \frac{3}{2(3s+2)} \right) e^{-2s}$$

La corrente  $i_1(t)$  nel lato alimentato risulta:

$$i_1(t) = \left( 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \right) \text{Heaviside}(t) - \left( 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} \right) \text{Heaviside}(t-2)$$

ed è costituita da due contributi uguali ed opposti, di cui il secondo è traslato in ritardo di 2 secondi rispetto al primo (Fig. 17.33).

La corrente nel lato in corto-circuito del mutuo induttore risulta:

$$I_2(s) = \left( \frac{1}{2(s+2)} - \frac{3}{2(3s+2)} \right) - \left( \frac{1}{2(s+2)} - \frac{3}{2(3s+2)} \right) e^{-2s}$$

e la corrispondente funzione del tempo risulta:

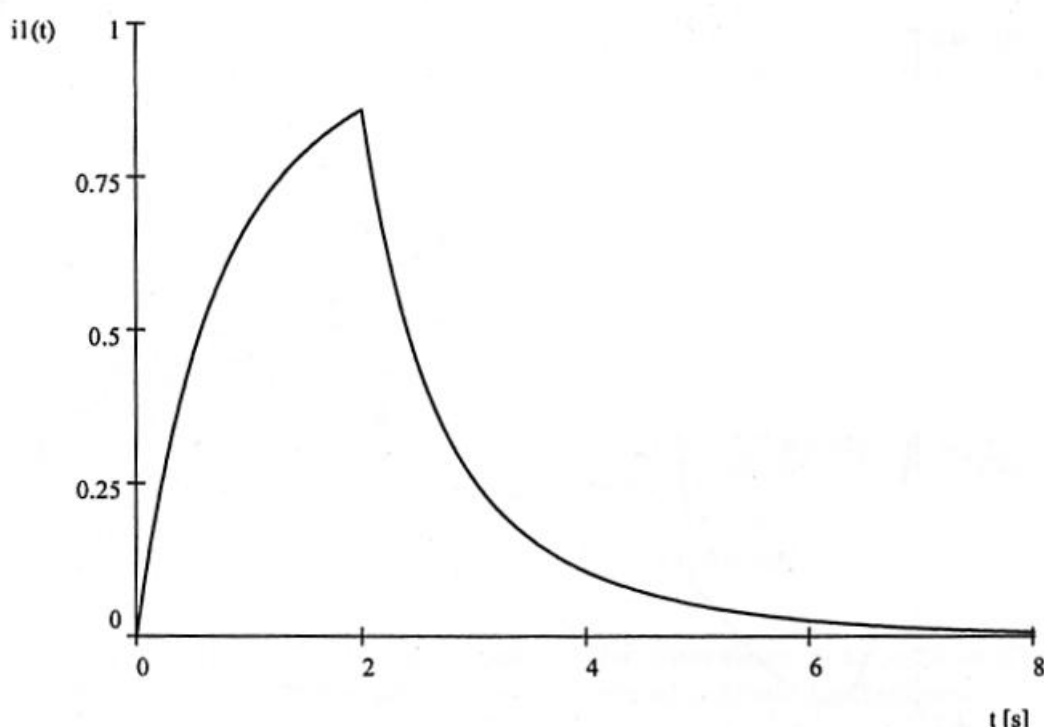


Fig. 17.33. Corrente  $i_1(t)$  nel lato alimentato del mutuo induttore in corto circuito alimentato con onda quadra di tensione.

$$i_2(t) = \left( \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}t} \right) \text{Heaviside}(t) - \left( \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}(t-2)} \right) \text{Heaviside}(t-2)$$

ed è rappresentata in Fig. 17.34.

Si noti che il transitorio di corrente dovuto al gradino negativo traslato è identico a quello precedente, in risposta ad un gradino positivo, ma con segno opposto e con partenza da valori iniziali non nulli. Infatti, le correnti iniziali del secondo transitorio sono:

$$i_1(2) = 0.85904 ; \quad i_2(2) = -0.12264$$

#### 17.9.6 Esercizio n. 6 - Rete RLC con condizioni iniziali

Si consideri in circuito riportato in Fig. 17.35a con i seguenti dati numerici:

$$\begin{aligned} R_1 &= 2 \, \Omega; R_2 = 2 \, \Omega; L = 1 \, \text{H}; C = \frac{1}{5} \, \text{F}; \\ i_S(t) &= 5 \, \text{A} \end{aligned}$$

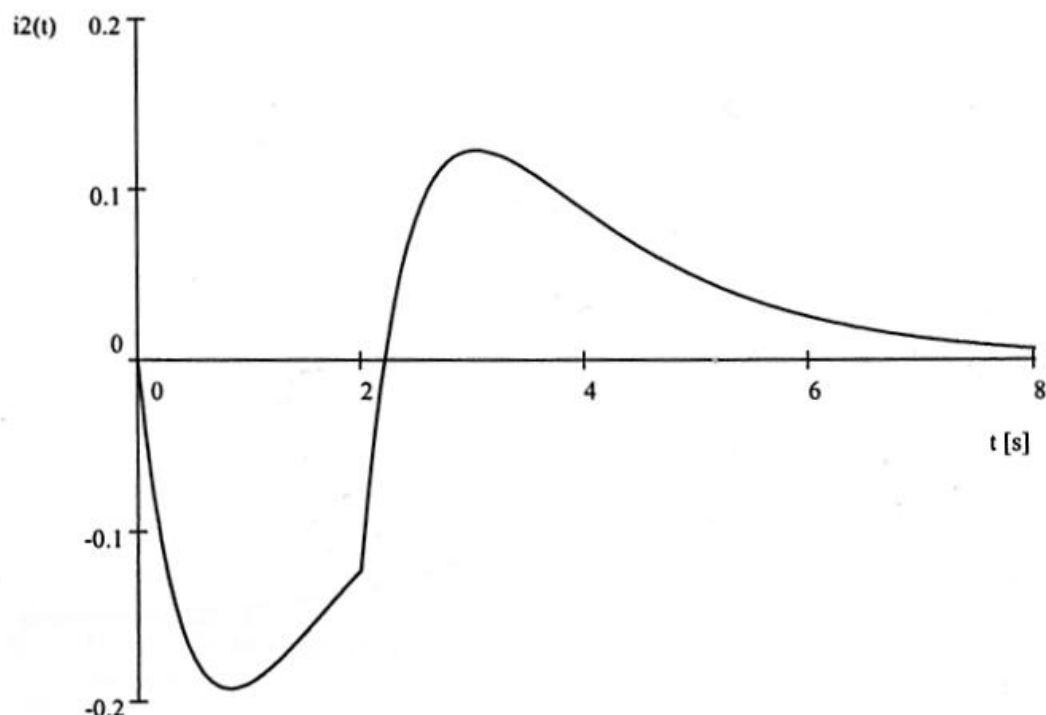


Fig. 17.34. Corrente  $i_2(t)$  nel lato in corto circuito del mutuo induttore alimentato da onda quadra di tensione.

Si determini la tensione sul condensatore e la corrente nell'induttore, in seguito all'apertura dell'interruttore, mediante il metodo della trasformata di Laplace.

Dapprima si determinano i valori iniziali delle variabili di stato  $V_{C0} = v_C(0^-)$  e  $I_{L0} = i_L(0^-)$ , mediante l'analisi del circuito equivalente di Fig. 17.35b al tempo  $t = 0^-$ . Si ottiene  $V_{C0} = 5$  V e  $I_{L0} = \frac{5}{2}$  A.

Quindi si considera il circuito equivalente nel dominio di Laplace, mostrato in Fig. 17.35c, che viene trasformato nel corrispondente equivalente di tipo parallelo, riportato in Fig. 17.35d, sul quale si può direttamente scrivere l'espressione della tensione sul condensatore:

$$V_C(s) = \frac{I_S(s) + CV_{C0} - \frac{LI_{L0}}{R_1 + sL}}{sC + \frac{1}{R_1 + sL}}$$

con cui si ottiene la corrente nell'induttore:

$$I_L(s) = \frac{V_C(s) + LI_{L0}}{R_1 + sL}$$

Con i precedenti dati numerici si ottiene:

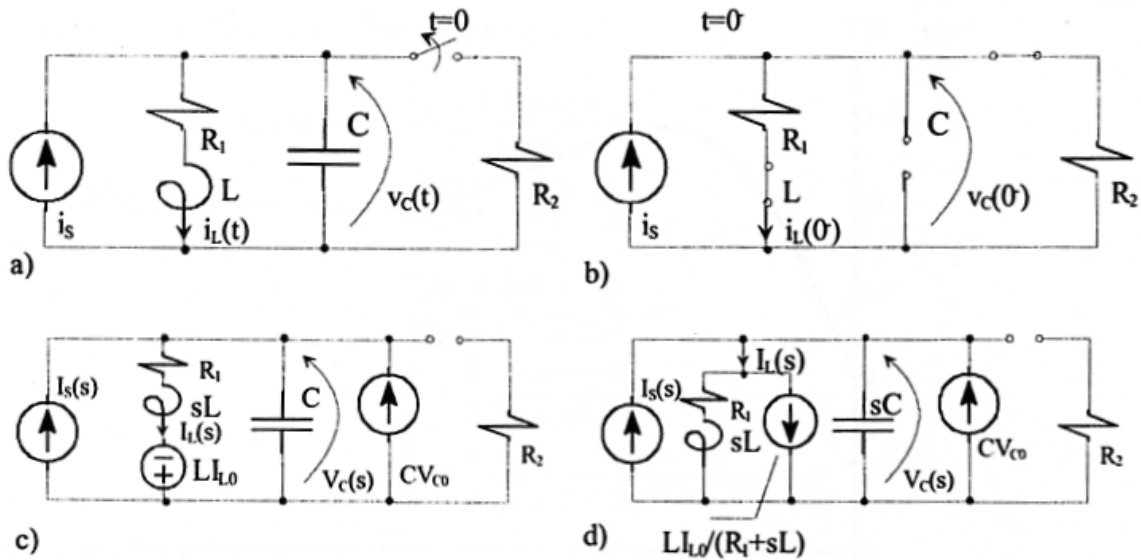


Fig. 17.35. a) Rete RLC da analizzare; b) rete equivalente al tempo  $t = 0^-$ ; c) rete equivalente nel dominio di Laplace; d) rete equivalente trasformata.

$$\begin{aligned}
 V_C(s) &= \frac{\frac{5}{s} + \frac{1}{5}5 - \frac{\frac{5}{2}}{2+s}}{\frac{s}{5} + \frac{1}{2+s}} = \\
 &= \frac{45s + 10s^2 + 100}{10s + 4s^2 + 2s^3} = \\
 &= \frac{10}{s} + \frac{1}{2} \frac{5 - 10s}{2s + s^2 + 5} = \\
 &= \frac{10}{s} + \frac{1}{2} \frac{5 - 10s}{(s + 1 - 2j)(s + 1 + 2j)} = \\
 &= \frac{10}{s} - \frac{\frac{5}{2} + \frac{15}{8}j}{s - (-1 + 2j)} - \frac{\frac{5}{2} - \frac{15}{8}j}{s - (-1 - 2j)}
 \end{aligned}$$

dalla quale sono evidenti tre componenti: un costante e due componenti armoniche smorzate esponenzialmente.

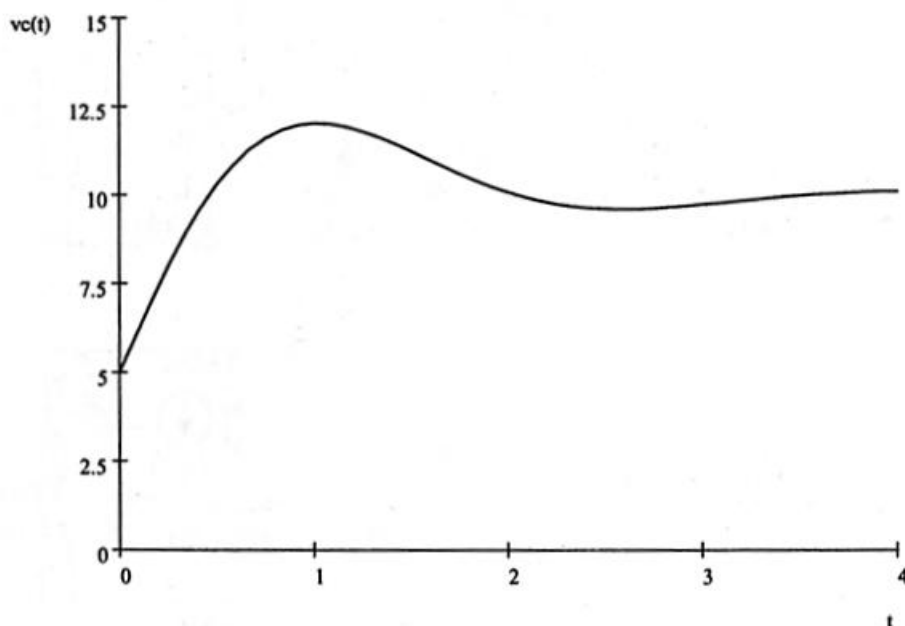


Fig. 17.36. Andamento nel tempo della tensione sul condensatore della rete di Fig. 17.35a.

Antitrasformando si ha:

$$\begin{aligned}
 v_C(t) &= 10 - \left(\frac{5}{2} + \frac{15}{8}j\right) e^{(-1+2j)t} - \left(\frac{5}{2} - \frac{15}{8}j\right) e^{(-1-2j)t} = \\
 &= 10 - e^{-t} \left[ \left(\frac{5}{2} + \frac{15}{8}j\right) e^{2jt} + \left(\frac{5}{2} - \frac{15}{8}j\right) e^{-2jt} \right] = \\
 &= 10 - e^{-t} \left( 5 \cos 2t - \frac{15}{4} \sin 2t \right) = \\
 &= 10 - \sqrt{5^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2} e^{-t} \cos\left(2t + \arctan \frac{15}{4}\right) = \\
 &= \left[ 10 - \frac{25}{4} e^{-t} \cos\left(2t + \arctan \frac{3}{4}\right) \right] u(t)
 \end{aligned}$$

e l'andamento corrispondente è riportato in Fig. 17.36.

La corrente nell'induttore risulta:

$$\begin{aligned}
 I_L(s) &= \frac{V_C(s) + LI_{L0}}{R_1 + sL} = \\
 &= \frac{\frac{45s+10s^2+100}{10s+4s^2+2s^3} + \frac{5}{2}}{2+s} = \\
 &= \frac{10s+5s^2+50}{10s+4s^2+2s^3} = \\
 &= \frac{5}{s} + \frac{1}{2} \frac{-5s-10}{2s+s^2+5} = \\
 &= \frac{5}{s} + \frac{1}{2} \frac{-5s-10}{(s+1-2j)(s+1+2j)}
 \end{aligned}$$

Antitrasformando si ha:

$$\begin{aligned}
 i_L(t) &= 5 - \left[ \left( \frac{5}{4} + \frac{5}{8}j \right) e^{(-1-2j)t} + \left( \frac{5}{4} - \frac{5}{8}j \right) e^{(-1+2j)t} \right] = \\
 &= 5 - \frac{5}{8} e^{-t} ((2+j)e^{-2jt} + (2-j)e^{2jt}) = \\
 &= 5 - \frac{5}{8} e^{-t} (4 \cos 2t + 2 \sin 2t) = \\
 &= 5 - \frac{5}{4} e^{-t} (2 \cos 2t + \sin 2t) \\
 &= \left[ 5 - \frac{5\sqrt{5}}{4} e^{-t} \cos \left( 2t - \arctan \frac{1}{2} \right) \right] u(t)
 \end{aligned}$$

e l'andamento corrispondente è riportato in Fig. 17.37

### 17.9.7 Esercizio n. 7 - Rete con mutuo induttore

Nel circuito di Fig. 17.38, contenente un mutuo induttore, che si trova nella condizione assegnata da lungo tempo, si determini il transitorio della corrente  $i_{R2}(t)$  assorbita dal resistore  $R_2$ , in seguito alla chiusura dell'interruttore  $S$ .

Dati:

$$\begin{aligned}
 V_S &= 10 \text{ V}; R_1 = 2 \Omega; R_2 = 3 \Omega; R_3 = 3 \Omega; \\
 L_{11} &= 2 \text{ H}; L_{22} = 3 \text{ H}; L_m = 1 \text{ H};
 \end{aligned}$$

Dapprima si determinano le condizioni iniziali, studiando la rete di Fig. 17.38b per  $t = 0^-$ . Si ha la corrente  $i_{L1}(0^-) = I_{10} = \frac{V_S}{R_1+R_3} = 2 \text{ A}$ , mentre la corrente  $i_{L2}(0^-) = 0$ .

Riconoscendo che le tensioni indotte sui due induttori accoppiati sono:

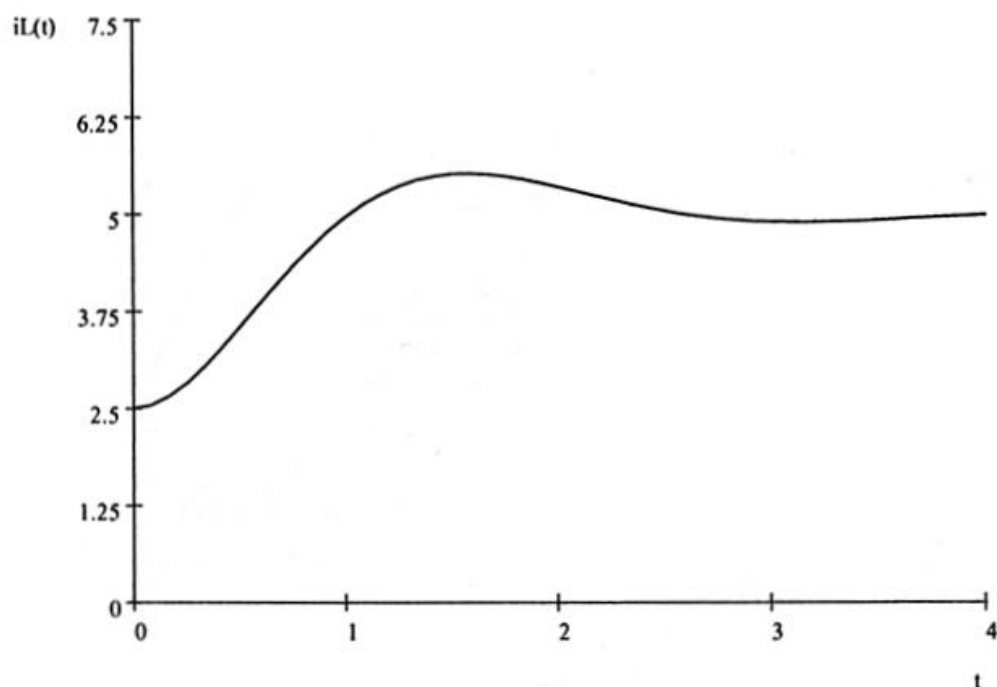


Fig. 17.37. Transitorio della corrente nell'induttore nel circuito RLC di Fig.17.35

$$\begin{aligned} v_1 &= L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= L_m \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

e che le corrispondenti trasformate di Laplace valgono:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= L_{11}(sI_1(s) - i_{L1}(0^-)) + L_m(sI_2(s) - i_{L2}(0^-)) = \\ &= L_{11}(sI_1(s) - i_{L1}(0^-)) + sL_m I_2(s) \\ V_2(s) &= L_m(sI_1(s) - i_{L1}(0^-)) + L_{22}(sI_2(s) - i_{L2}(0^-)) = \\ &= L_m(sI_1(s) - i_{L1}(0^-)) + L_{22}sI_2(s) \end{aligned}$$

si ha il circuito equivalente mostrato in Fig. 17.38c).

Si esprima l'equilibrio delle tensioni nelle due maglie confinanti con il resistore  $R_3$ :

$$\begin{aligned} V_S + L_{11}I_{10} &= (R_1 + R_3 + sL_{11})I_1 + (R_3 + sL_m)I_2 \\ L_m I_{10} &= (R_3 + sL_m)I_1 + (R_2 + R_3 + sL_{22})I_2 \end{aligned}$$

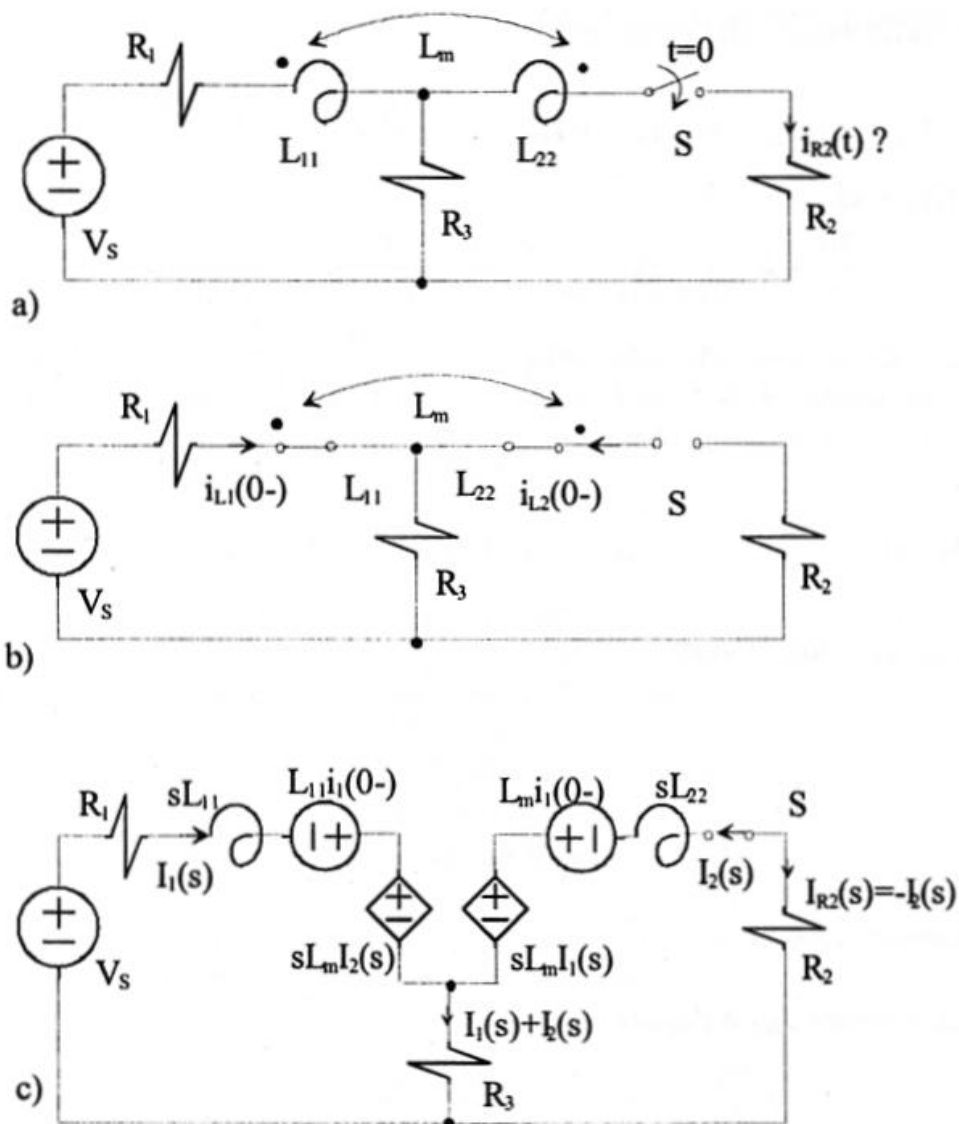


Fig. 17.38. Esercizio n.7. Rete con mutuo induttore e condizioni iniziali da studiare con Laplace.



Dalla seconda si ottiene:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{L_m I_{10} - (R_2 + R_3 + sL_{22}) I_2}{R_3 + sL_m} = \\ &= \frac{2 - (3s + 6) I_2}{s + 3} \end{aligned}$$

e sostituendo nella prima si ha:

$$\begin{aligned} V_S + L_{11} I_{10} &= (R_1 + R_3 + sL_{11}) \frac{L_m I_{10} - (R_2 + R_3 + sL_{22}) I_2}{R_3 + sL_m} \\ + (R_3 + sL_m) I_2 &\Rightarrow \\ \frac{10}{s} + 4 &= (2s + 5) \frac{2 - (3s + 6) I_2}{s + 3} + (s + 3) I_2 = \\ &= (2s + 5) \left( \frac{2}{s + 3} - \frac{(3s + 6) I_2}{s + 3} \right) + (s + 3) I_2 = \\ &= (2s + 5) \frac{2}{s + 3} - \left( (2s + 5) \frac{(3s + 6)}{s + 3} - (s + 3) \right) I_2 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{(2s + 5) \frac{2}{s + 3} - (\frac{10}{s} + 4)}{(2s + 5) \frac{(3s + 6)}{s + 3} - (s + 3)} = \\ &= \frac{-12s - 30}{21s + 21s^2 + 5s^3} = \\ &= \frac{-12s - 30}{s(21s + 5s^2 + 21)} = \\ &= \frac{-12s - 30}{s(s - p_1)(s - p_2)} \end{aligned}$$

La corrente  $I_{R2}$  è l'opposto di  $I_2$ :

$$\begin{aligned} I_{R2}(s) &= \frac{12s + 30}{s(s - p_1)(s - p_2)} = \\ &= \frac{\frac{10}{7}}{s} - \frac{\frac{5}{7} - \sqrt{\frac{3}{7}}}{s - p_1} - \frac{\frac{5}{7} + \sqrt{\frac{3}{7}}}{s - p_2} \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{1}{10} (21 + \sqrt{21}) = -2.5583 \\ p_2 &= \frac{\sqrt{21}}{5} - \frac{1}{10} (21 + \sqrt{21}) = -1.6417 \end{aligned}$$

Antitrasformando si ha:

$$\begin{aligned} i_{R2}(t) &= \frac{10}{7} - \left( \frac{5}{7} - \sqrt{\frac{3}{7}} \right) e^{p_1 t} - \left( \frac{5}{7} + \sqrt{\frac{3}{7}} \right) e^{p_2 t} = \\ &= \frac{10}{7} - 5.9632 \times 10^{-2} e^{p_1 t} - 1.3689 e^{p_2 t} \quad \text{per } t \geq 0 \end{aligned}$$

E' facile verificare che i valori iniziale e finale di questa corrente sono corretti:

$$\begin{aligned} i_{R2}(0^-) &= 0 \\ i_{R2}(\infty) &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

### 17.9.8 Esercizio n. 8 - RLC con due sorgenti

Si consideri il circuito di Fig. 17.39, alimentato da due sorgenti di tensione indipendenti, una avente tensione costante,  $V_{S2} = 8 \text{ V}$ , attiva da lungo tempo, e l'altra a gradino, attiva per  $t > 0$ , avente tensione  $V_{S1} = 10 u(t)$ . Gli altri dati sono:

$$R_1 = 3 \Omega; R_2 = 5 \Omega; L = 1 \text{ H}; C = \frac{1}{5} \text{ F}$$

L'analisi al tempo  $t = 0^-$ , con il circuito di Fig. 17.39b, consente di determinare i valori iniziali delle variabili di stato:

$$\begin{aligned} v_C(0^-) &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{2S} = 3 \text{ V}; \\ i_L(0^-) &= -\frac{V_{2S}}{R_1 + R_2} = -1 \text{ A} \end{aligned}$$

L'analisi al tempo  $t = \infty$ , con il circuito di Fig. 17.39c, consente di determinare i valori finali delle variabili di stato:

$$\begin{aligned} v_C(\infty) &= \frac{\frac{V_{S1}}{R_1} + \frac{V_{S2}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{10}{3} + \frac{8}{5}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{37}{4} \text{ V}; \\ i_L(\infty) &= \frac{V_{S1} - V_{S2}}{R_1 + R_2} = \frac{10 - 8}{3 + 5} = \frac{1}{4} \text{ A} \end{aligned}$$

Le variabili di stato si ottengono mediante l'albero proprio della rete assegnata (Fig. 17.39d).

L'equazione per l'insieme di taglio del condensatore e per la maglia fondamentale dell'induttore risultano:

$$\begin{aligned} t_C) \quad i_C - i_L - i_{R2} &= 0 \\ m_L) \quad v_L + v_C - v_{S1} + v_{R1} &= 0 \end{aligned}$$

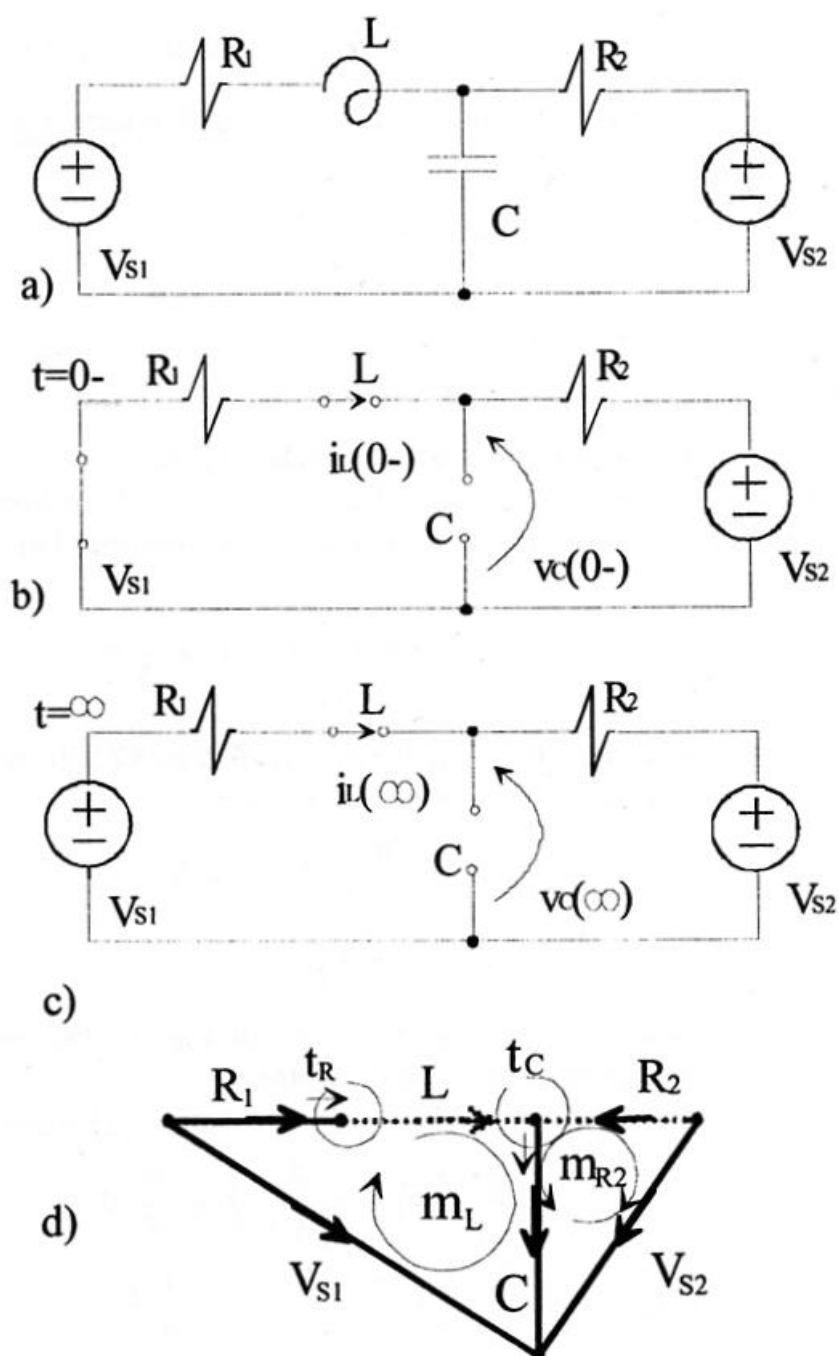


Fig. 17.39. Esempio n. 8. Rete RLC con doppia sorgente da studiare con Laplace.

L'insieme di taglio del resistore  $R_1$  e la maglia fondamentale del resistore  $R_2$  consentono di ottenere, rispettivamente, la tensione  $v_{R1}$  e la corrente  $i_{R2}$ :

$$\begin{aligned} t_{R_1}) i_{R1} &= i_L \Rightarrow v_{R1} = R_1 i_L \\ m_{R_2}) v_{R2} + v_C - v_{S2} &= 0 \Rightarrow i_{R2} = -G_2(v_C - v_{S2}) \quad (17.183) \end{aligned}$$

con cui le equazioni di stato diventano:

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C}{dt} - i_L + G_2 v_C - G_2 v_{S2} &= 0 \\ L \frac{di_L}{dt} + v_C - v_{S1} + R_1 i_L &= 0 \end{aligned}$$

In forma normale si ha:

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{G_2}{C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{G_2}{C} v_{S2} \\ \frac{1}{L} v_{S1} \end{pmatrix}$$

Nel dominio di Laplace, le equazioni di stato risultano:

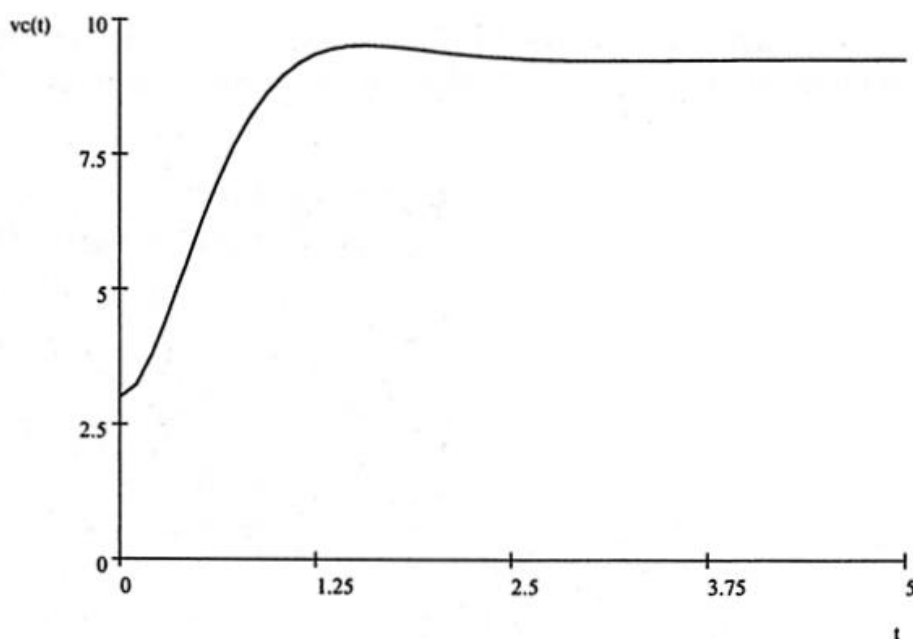
$$\begin{aligned} C[sV_C - v_C(0^-)] - I_L + G_2 V_C - G_2 V_{S2} &= 0 \\ L[sI_L - i_L(0^-)] + V_C - V_{S1} + R_1 I_L &= 0 \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} sCV_C - Cv_C(0^-) - I_L + G_2 V_C - G_2 V_{S2} &= 0 \\ sLI_L - Li_L(0^-) + V_C - V_{S1} + R_1 I_L &= 0 \end{aligned}$$

da cui, sapendo che  $V_{S1} = \frac{10}{s}$ ,  $V_{S2} = \frac{8}{s}$ , e sostituendo i valori numerici dei parametri e degli stati iniziali, si ha:

$$\begin{aligned} V_C &= -\frac{-74 - 12s - 3s^2}{s(8 + 4s + s^2)} = \\ &= \frac{37}{4s} - \frac{25(4 + s)}{4(8 + 4s + s^2)} = \\ &= \frac{37}{4s} - \frac{25(4 + s)}{4(s - s_1)(s - s_2)} \\ I_L &= -\frac{-2 - 6s + s^2}{s(8 + 4s + s^2)} = \\ &= \frac{1}{4s} - \frac{5(-4 + s)}{4(8 + 4s + s^2)} = \\ &= \frac{1}{4s} - \frac{5(-4 + s)}{4(s - s_1)(s - s_2)} \end{aligned}$$

Fig. 17.40. Esercizio n.8. Tensione sul condensatore  $v_C(t)$ .

dove  $s_1 = -2 - j2$  e  $s_2 = -2 + j2$ .

Antitrasformando si ha la tensione sul condensatore:

$$v_C(t) = \left[ \frac{37}{4} - \frac{25}{4} e^{-2t} (\cos 2t + \sin 2t) \right] u(t)$$

mostrata in Fig. 17.40

e la corrente nell'induttore:

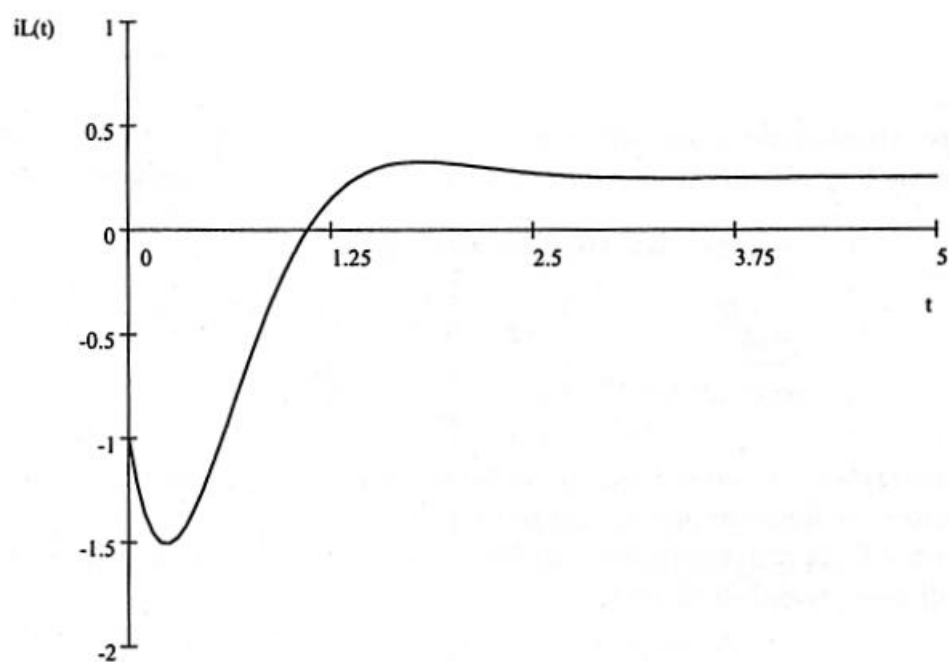
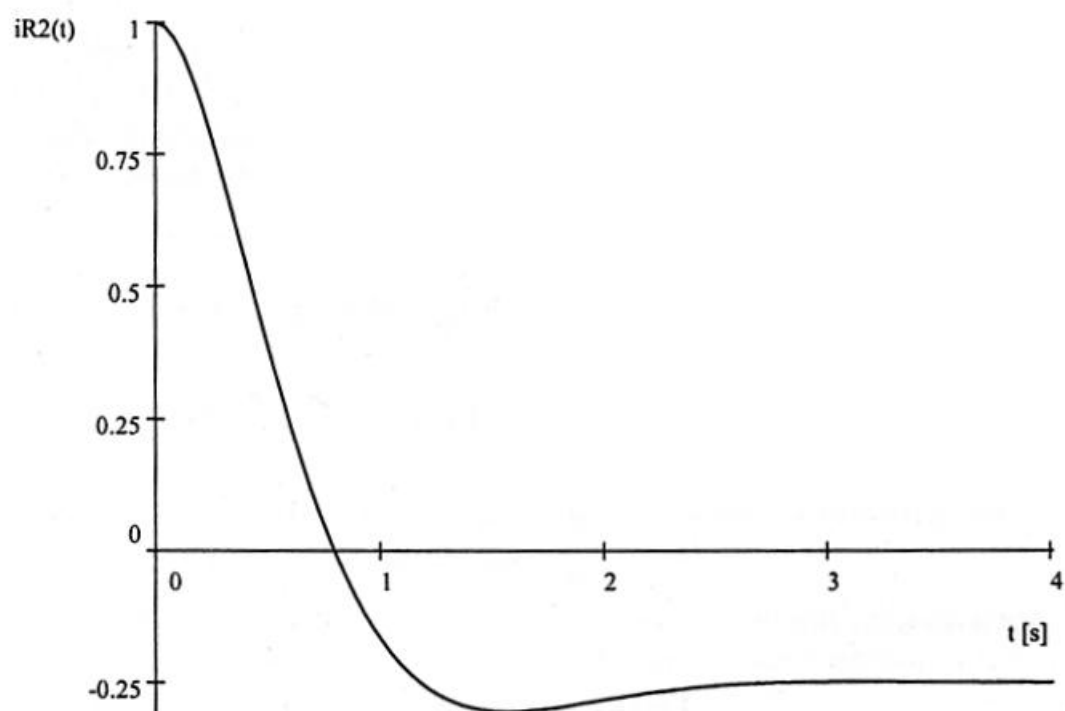
$$i_L(t) = \left[ \frac{1}{4} - e^{-2t} \left( \frac{5}{4} \cos 2t + \frac{15}{4} \sin 2t \right) \right] u(t)$$

mostrata in Fig. 17.41

Si determini ora la corrente erogata dalla sorgente  $V_{S2}$  ossia della variabile di rete  $i_{R2}$ . Dalla (17.183) risulta:

$$\begin{aligned} i_{R2} &= -G_2(v_C - v_{S2}) = \\ &= -\frac{1}{5} \left( \frac{37}{4} - \frac{25}{4} e^{-2t} (\cos 2t + \sin 2t) - 8 \right) \text{Heaviside}(t) = \\ &= \left( \frac{5}{4} e^{-2t} (\cos 2t + \sin 2t) - \frac{1}{4} \right) \text{Heaviside}(t) \end{aligned}$$

il cui andamento è mostrato in Fig. 17.42

Fig. 17.41. Esercizio 8. Corrente nell'induttore  $i_L(t)$ .Fig. 17.42. Esercizio n. 8. Corrente  $i_{R2}(t)$  nel resistore  $R_2$ .

### 17.9.9 Esercizio n. 9 - RLC con due sorgenti, una a gradino e una sinusoidale

Nella rete dell'esercizio n.8 (Fig. 17.39), la sorgente di tensione  $v_{S1}$  sia di tipo sinusoidale e sia attiva per  $t > 0$  mentre la sorgente di tensione continua  $V_{S2}$  sia attiva da molto tempo. Pertanto, con i seguenti dati:

$$\begin{aligned} v_{S1}(t) &= 10 \sin 3t \, u(t); V_{S2} = 8 \, \text{V} \\ R_1 &= 3 \, \Omega; R_2 = 5 \, \Omega; L = 1 \, \text{H}; C = \frac{1}{5} \, \text{F}; \\ \text{ovvero } \omega &= 3; X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{5}{3}; X_L = \omega L = 3 \end{aligned}$$

si determini la corrente  $i_L(t)$  nell'induttore e la tensione  $v_C(t)$  sul condensatore in funzione del tempo per  $t > 0$ .

Per  $t < 0$ , la rete equivalente di Fig. 17.39b permette di calcolare i valori iniziali delle variabili di stato:

$$\begin{aligned} i_L(0^-) &= -\frac{V_{S2}}{R_1 + R_2} = -1 \, \text{A} \\ v_C(0^-) &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{S2} = 3 \, \text{V} \end{aligned}$$

I valori finali si ottengono per sovrapposizione degli effetti della sorgente di tensione continua e della sorgente di tensione alternata. I valori finali dovuti alla sorgente di tensione continua sono già noti, essendo uguali ai valori iniziali, già calcolati per  $t < 0$ . I valori finali dovuti alla sorgente di tensione sinusoidale, invece, si possono valutare con l'algebra dei fasori, disattivando la sorgente di tensione continua  $V_{S2}$  nel circuito di Fig. 17.39a, ovvero sostituendola con un corto-circuito:

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{\frac{R_2(jX_C)}{R_2 + jX_C}}{R_1 + jX_L + \frac{R_2(jX_C)}{R_2 + jX_C}} V_{S1} = \\ &= \left( -\frac{1}{29} - j\frac{12}{29} \right) V_{S1} \end{aligned}$$

e

$$I_L = \left( \frac{7}{29} - j\frac{3}{29} \right) V_{S1}$$

Riconoscendo che:

$$\begin{aligned} V_{S1}(s) &= \frac{30}{9 + s^2}; \\ V_{S2}(s) &= \frac{8}{s} \end{aligned}$$

con le equazioni di stato:

$$\begin{aligned} sCV_C - Cv_C(0^-) - I_L + G_2V_C - G_2V_{S2} &= 0 \\ sLI_L - Li_L(0^-) + V_C - V_{S1} + R_1I_L &= 0 \end{aligned}$$

ed i precedenti valori numerici si ottiene:

$$\begin{aligned} V_C(s) &= \frac{3(72 + 86s + 17s^2 + 4s^2 + s^4)}{s(9 + s^2)(8 + 4s + s^2)} = \\ &= \frac{3}{s} - \frac{30(1 + 4s)}{29(9 + s^2)} + \frac{30(17 + 4s)}{29(8 + 4s + s^2)} \\ I_L(s) &= -\frac{72 + 6s - 13s^2 + 4s^2 + s^4}{s(9 + s^2)(8 + 4s + s^2)} = \\ &= -\frac{1}{s} - \frac{30(-7 + s)}{29(9 + s^2)} + \frac{30(-3 + s)}{29(8 + 4s + s^2)} \end{aligned}$$

Riconoscendo che le radici del denominatore sono:

$$s_1 = -2 - j2; s_2 = -2 + j2; s_3 = -j3; s_4 = j3; s_5 = 0$$

l' antitrasformata della tensione del condensatore vale

$$v_C(t) = \left( 3 - \frac{120}{29} \cos 3t - \frac{10}{29} \sin 3t + e^{-2t} \left( \frac{120}{29} \cos 2t + \frac{135}{29} \sin 2t \right) \right) u(t)$$

rappresentata in Fig. 17.43.

L' antitrasformata della corrente nell' induttore vale:

$$i_L(t) = \left( -1 - \frac{30}{29} \cos 3t + \frac{70}{29} \sin 3t + e^{-2t} \left( \frac{30}{29} \cos 2t + \frac{75}{29} \sin 2t \right) \right) u(t)$$

rappresentata in Fig. 17.44.

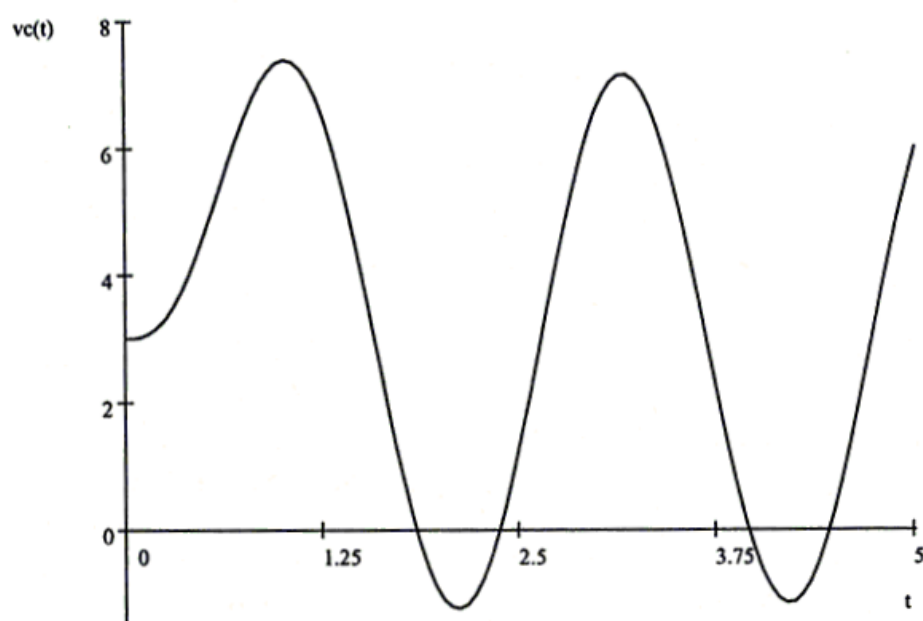
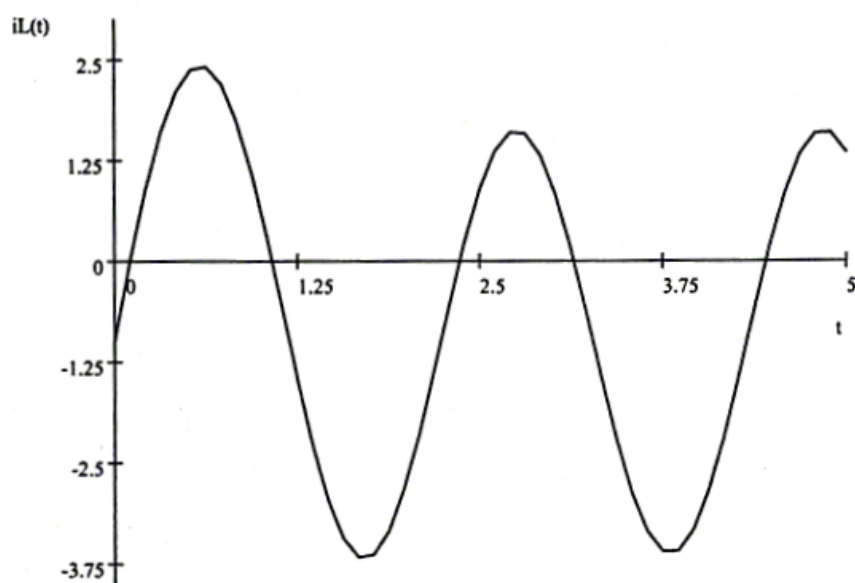
### 17.9.10 Esercizio n. 10 - Mutuo induttore alimentato da sorgente sinusoidale

Si consideri un mutuo induttore in serie con due resistori di resistenza  $R_1$  ed  $R_2$  (Fig. 17.30). Il lato 1 sia alimentato da una sorgente di tensione sinusoidale mentre il lato 2 è chiuso in corto circuito.

Le equazioni di funzionamento sono:

$$\begin{pmatrix} R_1 + sL_{11} & sL_m \\ sL_m & R_2 + sL_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_S(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Fig. 17.43. Esercizio n. 9. Tensione sul condensatore  $v_C(t)$ .Fig. 17.44. Esercizio n. 9. Corrente nell'induttore  $i_L(t)$ .

Ponendo:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1; R_2 = 1; L_{11} = 1; L_{22} = 1; L_m = \frac{1}{2}; \\ v_S &= \sin 2t \text{ Heaviside}(t) \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{pmatrix} s+1 & \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}s & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{s^2+4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{8s+8}{32s+16s^2+8s^3+3s^4+16} \\ -4 \frac{s}{32s+16s^2+8s^3+3s^4+16} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4(s+2)} + \frac{9}{20(3s+2)} + \frac{1}{s^2+4} \left( \frac{3}{5} - \frac{2}{5}s \right) \\ \frac{9}{20(3s+2)} - \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{s^2+4} \left( \frac{1}{10}s - \frac{2}{5} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La trasformata della corrente nel lato alimentato  $I_1(s)$  vale:

$$I_1(s) = \frac{1}{4(s+2)} + \frac{9}{20(3s+2)} + \frac{1}{s^2+4} \left( \frac{3}{5} - \frac{2}{5}s \right)$$

e nel dominio del tempo:

$$i_1(t) = \left( \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{20}e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{3}{10}\sin 2t - \frac{2}{5}\cos 2t \right) u(t)$$

rappresentata in Fig. 17.45.

La trasformata della corrente nel lato in corto-circuito:

$$I_2(s) = \frac{9}{20(3s+2)} - \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{s^2+4} \left( \frac{1}{10}s - \frac{2}{5} \right)$$

e la corrispondente funzione del tempo è:

$$i_2(t) = \left( \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{20}e^{-\frac{2}{3}t} \right) u(t)$$

costituita da una sinusoide di regime sovrapposta ad una coppia di esponenziali smorzati con costanti di tempo  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{2}$ , riportata in Fig. 17.46.

Si osservi che le correnti di regime si possono calcolare semplicemente mediante l'algebra dei fasori:

$$\begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_{11} & j\omega L_m \\ j\omega L_m & R_2 + j\omega L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_S \\ 0 \end{pmatrix}$$

e con i valori numerici:

$$\begin{pmatrix} 1+2j & j \\ j & 1+2j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j \\ 0 \end{pmatrix}$$

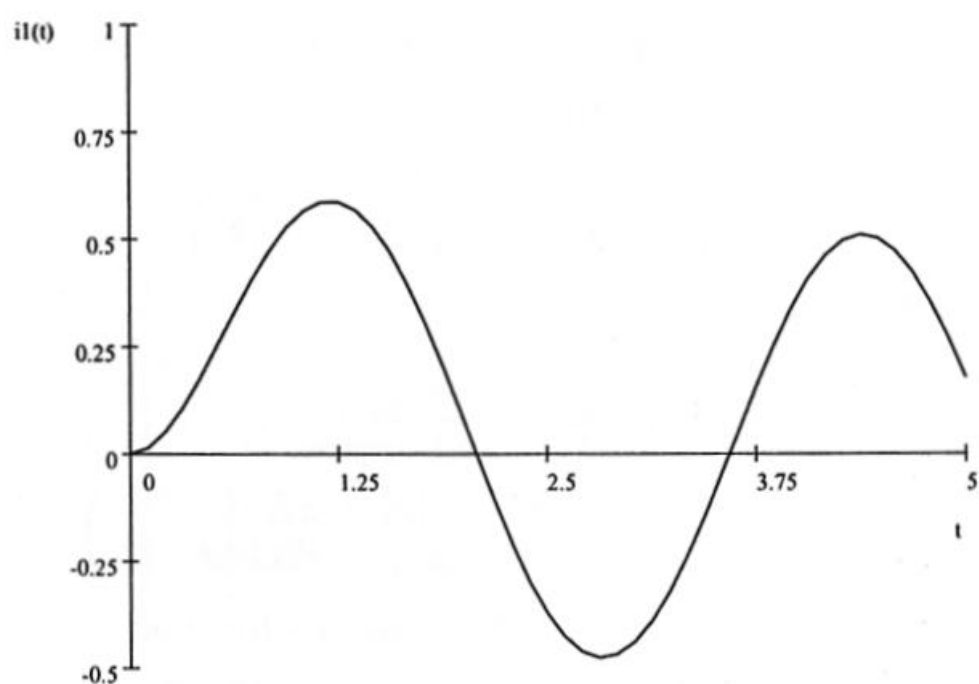


Fig. 17.45. Esercizio n. 10. Corrente del lato alimentato del mutuo induttore con sorgente sinusoidale.

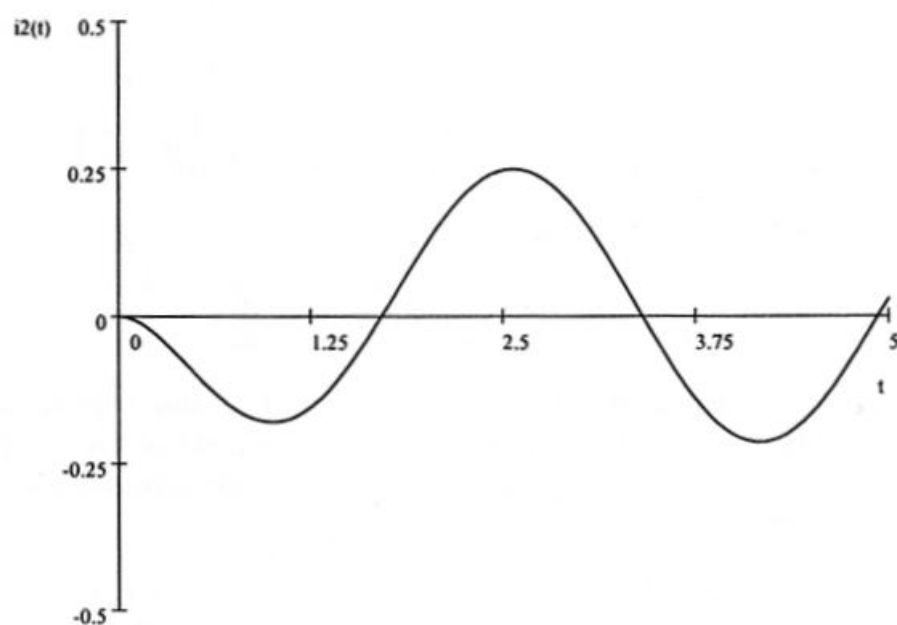


Fig. 17.46. Corrente nel lato in corto circuito del mutuo induttore alimentato con sorgente sinusoidale

le correnti (fasori con valore massimo) risultano:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} - \frac{3}{10}j \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{5}j \end{pmatrix}$$

esattamente corrispondenti alle sinusoidi di regime determinate con la trasformata di Laplace.