17
TRASFORMATA DI LAPLACE

La trasformata di Laplace è un metodo di analisi delle reti lineari in regime transitorio. La determinazione dell'andamento transitorio di una tensione o di una corrente di una rete elettrica lineare richiede di risolvere una equazione differenziale lineare di ordine n pari al grado di complessità della rete. Il grado di complessità della rete è pari al numero di induttori e condensatori indipendenti. La trasformata di Laplace consente di evitare di affrontare la soluzione dell'equazione differenziale. Con la trasformata di Laplace si trasforma una equazione differenziale lineare in una equazione algebrica di variabile complessa. Si determina algebricamente la trasformata della tensione o della corrente che interessa e, successivamente si antitrasforma per ottenere la funzione del tempo della grandezza in esame. Con la trasformata di Laplace si trasforma il dominio del tempo nel dominio della variabile complessa. Con l'antitrasformata di Laplace si effettua la trasformazione inversa.

17.1 Definizione della trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace di una funzione del tempo t, $f(t)$, è definita mediante il seguente integrale:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt \tag{17.1}$$

dove s è una variabile complessa:

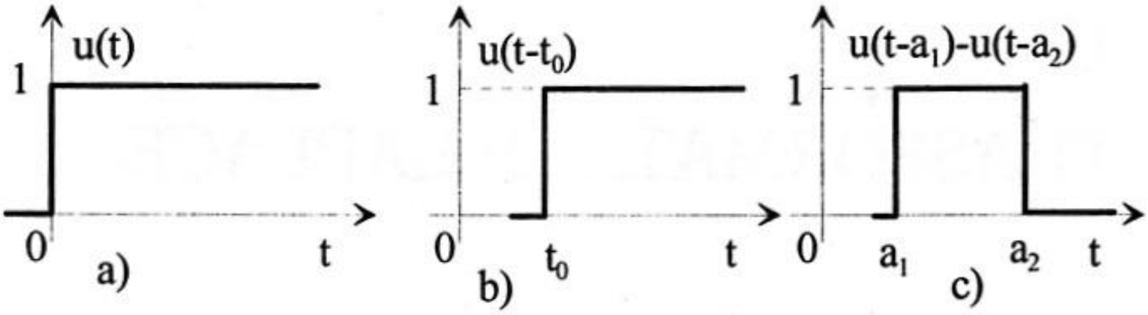

Fig. 17.1. a) Gradino unitario $u(t)$, attivato al tempo $t = 0$; b) gradino unitario $u(t - t_0)$ attivato al tempo $t = t_0$; c) impulso rettangolare attivato al tempo $t = a_1$ e disattivato al tempo $t = a_2$.

$$s = \sigma + j\omega \tag{17.2}$$

Si noti che l'integrale che definisce l'operazione di trasformazione ha come estremo inferiore $t = 0^-$ per includere eventuali impulsi presenti nell'istante iniziale. La trasformata di Laplace è definita nel semipiano destro e assume che la funzione *f(t)* sia zero per $t<0$:

$$f(t) = 0 \qquad per \quad t < 0 \tag{17.3}$$

La trasformata di Laplace di una funzione del tempo *f(t)* si scrive anche come *F(s)*:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \tag{17.4}$$

e vi è corrispondenza biunivoca fra la funzione del tempo $f(t)$ e la sua trasformata $F(s)$. In pratica, tutte le funzioni di interesse per l'ingegneria sono trasformabili secondo Laplace.

17.2 Trasformata di Laplace di alcune funzioni del tempo

Una importante funzione del tempo è il *gradino unitario u(t)* o Heaviside (t) attivato al tempo $t = 0$:

$$\text{Heaviside}\,(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{17.5}$$

che vale zero per $t < 0$, vale 1 per $t > 0$, ed è indeterminata per $t = 0$ (vedi Fig. 17.1).

Il gradino attivato all'istante t_0 si esprime come $u(t-t_0)$ (vedi Fig.17.1b):

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \tag{17.6}$$

Il gradino di generica ampiezza A si esprime moltiplicando il gradino unitario per la costante A (vedi Fig.17.1):

$$Au(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t > 0 \end{cases} \tag{17.7}$$

Un impulso rettangolare di durata finita, attivato in a_1 e spento in a_2, si ottiene dalla differenza di due gradini traslati e di segno opposto (vedi Fig. 17.1c):

$$u(t - a_1) - u(t - a_2)$$

Una qualunque funzione del tempo *f(t)* viene attivata all'istante *t=0* se la si moltiplica per il gradino unitario $u(t)$:

$$f(t)u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f(t) & t > 0 \end{cases} \tag{17.8}$$

La *trasformata di un gradino unitario* $u(t)$ vale:

$$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s} \tag{17.9}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u(t)) &= \int_{0^-}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_{0^-}^{T} e^{-st}dt = \\ &= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{0^-}^{T} = \frac{1}{s} - \lim_{T\to\infty}\frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1}{s} - 0 \end{aligned}$$

se $\sigma = \mathrm{Re}[s] > 0$.
La trasformata di una generica costante $Au(t)$ risulta:

$$\mathcal{L}(Au(t)) = \frac{A}{s} \tag{17.10}$$

La *trasformata di una funzione esponenziale* $e^{at}u(t)$ vale:

$$\mathcal{L}(e^{at}u(t)) = \frac{1}{s-a} \tag{17.11}$$

Infatti:

$$\mathcal{L}(e^{at}u(t)) = \int_{0^-}^{\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s-a)t}dt$$

e questo integrale è la trasformata del gradino unitario $u(t)$, quando la variabile complessa sia $s - a$ invece di s.

Si riconosca, per inciso, che $e^{at}u(t) = 1 \cdot u(t)$ se $a = 0$: la costante 1 è un esponenziale con costante di smorzamento $a = 0$.

Un'altra importante funzione del tempo è *l'impulso unitario* $\delta(t)$ (oppure Dirac (t)), detta anche delta di Dirac. Esso vale zero ovunque tranne che per

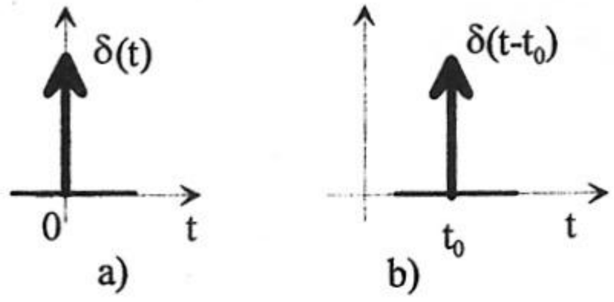

Fig. 17.2. Impulso unitario $\delta(t)$ o delta di Dirac attivo al tempo $t = 0$ e impulso unitario $\delta(t - t_0)$ attivo all'istante $t = t_0$.

t=0, dove vale infinito. Esso può essere assunto come il limite a cui tende un rettangolo di base Δ e altezza $\frac{1}{\Delta}$, centrato sull'ascissa *t=0,* al tendere di Δ a zero (Fig. 17.2). L'integrale dell'impulso unitario è rappresentato dalla sua area, che vale 1:

$$\mathrm{Dirac}\,(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0 & t > 0 \\ \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1 \end{cases} \tag{17.12}$$

L'impulso unitario attivo per $t{=}t_0$ si esprime con $\delta(t - t_0)$. L'impulso di generica ampiezza A, attivato al tempo *t=0,* si esprime con $A\delta(t)$.

Una qualunque funzione del tempo *f(t)* viene *campionata* al tempo $t{=}t_0$ se è moltiplicata per l'impulso unitario $\delta(t - t_0)$ attivo per $t{=}t_0$:

$$f(t_0) = \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} f(t)\delta(t - t_0)dt \tag{17.13}$$

Questo è evidente in quanto la funzione integranda è non nulla solo per $t{=}t_0$.

La trasformata dell'impulso unitario vale 1:

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \tag{17.14}$$

Infatti:

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-st}\big|_{t=0} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$

17.3 Proprietà della trasformata di Laplace

Ecco alcune importanti proprietà della trasformata di Laplace.

1) *La trasformata di Laplace è una operazione lineare*, ovvero l'integrale di Laplace è un *operatore lineare*. Ciò significa che la trasformata della

somma di due funzioni del tempo è la somma delle trasformate delle singole funzioni:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(f_1(t) + f_2(t)) = F_1(s) + F_2(s) \tag{17.15}$$

2) *La trasformata del prodotto di una costante c per una funzione f(t) è uguale al prodotto della costante per la trasformata della funzione:*

$$\mathcal{L}(cf(t)) = cF(s) \tag{17.16}$$

3) *Alla traslazione nel tempo della trasformanda corrisponde la moltiplicazione per un esponenziale della trasformata:*

$$\mathcal{L}(f(t - t_0)) = e^{-st_0}F(s) \tag{17.17}$$

4) *La trasformata dell'impulso di durata finita* $u(t - a_1) - u(t - a_2)$, *attivato in* a_1 *e spento in* a_2, *risulta:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u(t-a_1) - u(t-a_2)) &= \frac{e^{-a_1 s}}{s} - \frac{e^{-a_2 s}}{s} = \\ &= \frac{1}{s}\left[e^{-a_1 s} - e^{-a_2 s}\right]\end{aligned}$$

5) *Alla moltiplicazione della trasformanda per un esponenziale corrisponde una traslazione della trasformata:*

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s - a) \tag{17.18}$$

6) *Alla derivata rispetto al tempo di una funzione* $(f'(t))$ *corrisponde il prodotto per s della trasformata diminuito del valore iniziale della trasformanda:*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0^-) \tag{17.19}$$

Integrando per parti, si ha infatti:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t)) &= \int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = \\ &= f(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \\ &= -f(0^-) + s\mathcal{L}(f(t))\end{aligned} \tag{17.20}$$

Inoltre, detta $f''(t)$ la derivata seconda, si ha anche:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f''(t)) &= s\mathcal{L}(f'(t)) - f'(0^-) = \\ &= s\left[s\mathcal{L}(f(t)) - f(0^-)\right] - f'(0^-) = \\ &= s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0^-) - f'(0^-)\end{aligned} \tag{17.21}$$

7) *All'integrale rispetto al tempo di una funzione corrisponde la divisione per s della trasformata:*

$$\mathcal{L}\left(\int_{0^-}^{t} f(t')dt'\right) = \frac{F(s)}{s} \tag{17.22}$$

Integrando per parti, si ha infatti:

$$\begin{aligned}
\int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{t} f(t')dt'\right]e^{-st}dt &= \left[\int_{0^-}^{t} f(t')dt'\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^{\infty} - \\
-\int_{0^-}^{\infty} f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt &= \qquad\qquad (17.23)\\
&= 0+\frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}F(s)
\end{aligned}$$

Per comprendere che

$$\left[\int_{0^-}^{t} f(t')dt'\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^{\infty} = 0 \qquad (17.24)$$

si osservi che per $t \to \infty$, $e^{-st} = 0$ e che per $t \to 0$, $\int_{0^-}^{t} f(t')dt' = 0$.

Si assume che $\mathrm{Re}(s)$ sia sufficientemente grande in modo che $f(t)e^{-st} \to 0$ per $t \to \infty$.

17.4 Trasformata di Laplace di altre funzioni del tempo

1) *La trasformata del coseno*:

$$\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad (17.25)$$

Infatti, con la formula di Eulero si ha:

$$\begin{aligned}
e^{j\omega t} &= \cos\omega t + j\sin\omega t\\
e^{-j\omega t} &= \cos\omega t - j\sin\omega t\\
e^{j\omega t}+e^{-j\omega t} &= 2\cos\omega t\\
\cos\omega t &= \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right] \qquad (17.26)
\end{aligned}$$

Inoltre, ricordando che:

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \qquad (17.27)$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{j\omega t}) &= \frac{1}{s-j\omega} \qquad (17.28)\\
\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) &= \frac{1}{s+j\omega} \qquad (17.29)
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos\omega t) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\left[e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \end{aligned} \tag{17.30}$$

2) *La trasformata del seno*:

$$\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{17.31}$$

Infatti, con la formula di Eulero si ha:

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos\omega t + j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t} &= \cos\omega t - j\sin\omega t \\ e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} &= 2j\sin\omega t \\ \sin\omega t &= \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right] \end{aligned} \tag{17.32}$$

Inoltre si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin\omega t) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right] = \\ &= \frac{1}{2j}\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \end{aligned} \tag{17.33}$$

3) Ricordando la proprietà della traslazione si ha:

$$\mathcal{L}(e^{-at}\sin\omega t) = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{17.34}$$

e

$$\mathcal{L}(e^{-at}\cos\omega t) = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{17.35}$$

4) Un'altra importante trasformata è la seguente:

$$\mathcal{L}(\frac{1}{n!}t^n e^{-at}u(t)) = \frac{1}{(s+a)^{n+1}} \tag{17.36}$$

che può essere spiegata mediante la seguente identità:

$$\int_{0^-}^{\infty} x^n a^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

con cui

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\frac{1}{n!}t^n e^{-at}u(t)) &= \frac{1}{n!}\int_{0^-}^{\infty} t^n a^{-at}e^{-st}dt = \\ &= \frac{1}{(s+a)^{n+1}} \end{aligned} \tag{17.37}$$

In particolare si ha:

$$\mathcal{L}(t^n u(t)) = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{17.38}$$

$$\mathcal{L}(t\ u(t)) = \frac{1}{s^2} \tag{17.39}$$

$$\mathcal{L}(t^2\ u(t)) = \frac{2}{s^3} \tag{17.40}$$

17.5 La formula di antitrasformazione

La formula per l'inversione della trasformata di Laplace consente di passare da una funzione $F(s)$ di variabile complessa alla corrispondente funzione del tempo $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\lim_{T\to\infty}\int_{c-jT}^{c+jT} e^{st}F(s)ds \tag{17.41}$$

dove c è scelto in modo che tutti i punti singolari di $F(s)$ stiano alla sinistra della linea $\mathrm{Re}[s] = c$ nel piano complesso s.

Questa formula non viene in pratica mai adoperata per l'operazione di inversione della trasformata di Laplace, preferendo il metodo più semplice di scomposizione in frazioni parziali e della successiva antitrasformazione di funzioni semplici già note e catalogate.

17.5.1 Teorema del valore iniziale e finale

A scopo di verifica della esattezza della funzione del tempo $f(t)$ ottenuta dall'inversione della trasformata di Laplace $F(s)$, sono utili il teorema del valore iniziale e finale:

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{17.42}$$

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{17.43}$$

17.6 Sviluppo in frazioni parziali e inversione

L'applicazione della trasformata di Laplace ad una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, che esprime l'equilibrio delle correnti in un

nodo o l'equilibrio delle tensioni in un percorso chiuso di una rete elettrica, allo scopo di determinare una tensione o una corrente, conduce ad una funzione algebrica $F(s)$ nella variabile complessa s del tipo:

$$F(s) = K\frac{s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n} \tag{17.44}$$

dove K è una costante ed i coefficienti a_i e b_i sono numeri reali.

Di regola l'ordine m del polinomio al numeratore è minore o al più uguale all'ordine n del polinomio del denominatore:

$$m \leq n \tag{17.45}$$

Il polinomio al denominatore si può scomporre nel prodotto di n binomi, ciascuno ottenuto da una delle n radici (o poli) $p_1, p_2, ..., p_n$:

$$F(s) = K\frac{s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)} \tag{17.46}$$

Se $m = n$ la funzione $F(s) = \frac{N_0(s)}{D(s)}$ è esprimibile come:

$$F(s) = \frac{N_0(s)}{D(s)} = K + \frac{N(s)}{D(s)} \qquad \text{con} \qquad m = n \tag{17.47}$$

con il grado del polinomio $N(s)$ minore del grado del denominatore $D(s)$. Il polinomio $N(s)$ risulta:

$$N(s) = N_0(s) - K\ D(s) \tag{17.48}$$

La trasformata inversa della precedente espressione risulta:

$$f(t) = K\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} \qquad \text{con} \qquad m = n \tag{17.49}$$

Quindi, se il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore la funzione del tempo $f(t)$ contiene un impulso di area pari alla costante K. Se, invece, il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, la funzione del tempo $f(t)$ non contiene alcun impulso.

Si deve ora scomporre il rapporto $\frac{N(s)}{D(s)}$ in frazioni parziali e determinare l'antitrasformata di ciascuna.

Per via del fatto che i coefficienti del polinomio al denominatore sono reali, le radici del denominatore $p_1, p_2, ..., p_n$ sono:

1) reali e distinte;
2) reali e multiple, o
3) complesse e coniugate, a coppie.

17.6.1 *Radici reali e distinte*

Se il denominatore contiene una radice distinta $p_i = a$, si può scrivere:

$$F(s) = \frac{A}{s-a} + R(s) \tag{17.50}$$

in cui la funzione residua $R(s)$ non contiene tale radice al denominatore. Per ottenere la costante A si moltiplicano ambo i membri per $s - a$:

$$(s-a)\,F(s) = A + (s-a)\,R(s) \tag{17.51}$$

Ponendo $s = a$ nella precedente espressione si annulla il termine $(s-a)\,R(s)$ e si ottiene:

$$A = (s-a)\,F(s)|_{s=a} \tag{17.52}$$

Il contributo del termine $\frac{A}{s-a}$ nella funzione del tempo risulta un esponenziale:

$$f(t) = Ae^{at}u(t) + \mathcal{L}^{-1}\{R(s)\} \tag{17.53}$$

Esempio 1

Sviluppare in frazioni parziali e fare l'inversa della seguente trasformata:

$$F(s) = 5\frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$

Si esprime $F(s)$ come somma di frazioni parziali:

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

Il grado del numeratore è minore del grado del denominatore e, pertanto, la trasformata non contiene alcun termine costante e l'antitrasformata non contiene alcun impulso. Mediante la (17.52) si valutano le costanti A, B, C:

$$\begin{aligned}
A &= \left(5\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right)\bigg|_{s=0} = \frac{15}{2} \\
B &= \left(5\frac{s+3}{s(s+2)}\right)\bigg|_{s=-1} = -10 \\
C &= \left(5\frac{s+3}{s(s+1)}\right)\bigg|_{s=-2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Con ciò, l'espressione di $F(s)$ espansa in frazioni parziali è:

$$F(s) = \frac{\frac{15}{2}}{s} + \frac{-10}{s+1} + \frac{\frac{5}{2}}{s+2}$$

La funzione del tempo corrispondente a questa trasformata risulta:

$$f(t) = \left(\frac{15}{2} - 10e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

Esempio 2

Effettuare lo sviluppo in frazioni parziali e antitrasformare la seguente funzione trasformata:

$$F(s) = \frac{4s^2+3}{3s^2+12s} = \frac{4}{3}\frac{s^2+\frac{3}{4}}{s(s+4)}$$

Soluzione. La forma dello sviluppo in frazioni parziali è:

$$F(s) = K + \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}$$

Si noti che, essendo l'ordine del numeratore uguale a quello del denominatore, il rapporto fornisce una costante

$$K = \frac{4}{3}$$

I coefficienti delle altre due frazioni sono:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{4s^2+3}{3(s+4)}\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{1}{4} \\ B &= \left(\frac{4s^2+3}{3s}\right)\Bigg|_{s=-4} = -\frac{67}{12} \end{aligned}$$

Pertanto, l'espansione in frazioni parziali risulta:

$$F(s) = \frac{4}{3} + \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{-\frac{67}{12}}{s+4}$$

La funzione del tempo corrispondente a questa trasformata risulta:

$$f(t) = \frac{4}{3}\delta(t) + \left(\frac{1}{4} - \frac{67}{12}e^{-4t}\right)u(t)$$

Si noti che la funzione $f(t)$ contiene un impulso di area pari alla costante K, essendo il grado del numeratore uguale al grado del denominatore.

17.6.2 Radici reali e multiple

Assumendo che una radice $p_i = a$ del denominatore della funzione trasformata $F(s)$ sia multipla con ordine di molteplicità 2, detta funzione può essere scritta nel modo seguente:

$$F(s) = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + R(s) \tag{17.54}$$

dove il residuo $R(s)$ non contiene al denominatore tale radice. Se si moltiplicano ambo i membri della precedente espressione per $(s-a)^2$, si ottiene:

$$(s-a)^2F(s) = (s-a)A_1 + A_2 + (s-a)^2R(s) \tag{17.55}$$

che consente di calcolare il coefficiente A_2:

$$A_2 = (s-a)^2F(s)\big|_{s=a} \tag{17.56}$$

con lo stesso metodo adoperato per calcolare i coefficienti nel caso di radici reali e distinte. Il coefficiente A_1 si ottiene mediante derivazione rispetto a s:

$$A_1 = \lim_{s\to a}\frac{d}{ds}\left[(s-a)^2 F(s)\right] \tag{17.57}$$

La corrispondente funzione del tempo risulta:

$$f(t) = A_1\ e^{at} + A_2\ t\ e^{at} + \mathcal{L}^{-1}(R(s)) \tag{17.58}$$

Esempio 1

Sia

$$F(s) = 5\frac{s^2+4}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{B}{s+1} + \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{(s+2)^2}$$

La radice $p_1 = -1$ è singola mentre la radice $p_2 = -2$ è doppia. Si ha:

$$\begin{aligned}
B &= [(s+1)\,F(s)]\big|_{s=-1} = 5\frac{s^2+4}{(s+2)^2}\bigg|_{s=-1} = 25 \\
A_2 &= (s+2)^2F(s)\big|_{s=-2} = 5\frac{s^2+4}{(s+1)}\bigg|_{s=-2} = -40 \\
A_1 &= \frac{d}{ds}\left[(s+2)^2\,F(s)\right]\bigg|_{s=-2} = \\
&\quad 10\frac{s}{s+1} - \frac{5}{(s+1)^2}\,(s^2+4)\bigg|_{s=-2} \\
&= -20
\end{aligned}$$

Si osservi, comunque che l'operazione di derivata non è necessaria. Infatti, noti due dei coefficienti si può determinare il terzo coefficiente calcolando $F(s)$ per un generico valore di s diverso da tutte le radici del denominatore ed uguagliandone il valore all'espressione di $F(s)$ espressa come somma di frazioni parziali. Ad esempio, ponendo $s = 0$ si ha:

$$F(0) = \frac{25}{1} - \frac{40}{2^2} + \frac{A_1}{2} = 5$$

da cui si ottiene

$$A_1 = -20$$

In definitiva si ha:

$$f(t) = \left(25e^{-t} - 40te^{-2t} - 20e^{-2t}\right) u(t)$$

Esercizio 1

Determinare la trasformata inversa della seguente funzione:

$$F(s) = \frac{3s^2+4}{s^2+6s+9}$$

Risposta: $f(t) = 3\delta(t) + \left(-18e^{-3t} + 31te^{-3t}\right) u(t)$

Esercizio 2

Determinare la trasformata inversa della seguente funzione:

$$F(s) = \frac{3s+4}{2s^2+16s+32}$$

Risposta: $f(t) = \left(\frac{3}{2}e^{-4t} - 4te^{-4t}\right) u(t)$

17.6.3 Radici complesse e coniugate

Il polinomio al denominatore della funzione $F(s)$ abbia due seguenti radici complesse e coniugate:

$$p_1 = \alpha + j\beta; \qquad p_2 = \alpha - j\beta \tag{17.59}$$

con parte reale α negativa nell'analisi di circuiti elettrici stabili.
Lo sviluppo in frazioni parziali di $F(s)$ risulta:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\bar{K}}{s-p_1} + \frac{\bar{K}^*}{s-p_2} = \\ &= \frac{\bar{K}}{(s-\alpha)-j\beta} + \frac{\bar{K}^*}{(s-\alpha)+j\beta} \end{aligned} \tag{17.60}$$

I due numeratori $\bar{K}$ e $\bar{K}^*$ sono pure necessariamente complessi e coniugati, dovendo la corrispondente funzione del tempo $f(t)$ essere reale. Tali coefficienti si determinano esattamente come nel caso di radici reali e distinte:

$$\bar{K} = (s-p_1)\, F(s)\big|_{s=p_1} \tag{17.61}$$

$$\bar{K}^* = (s-p_2)\, F(s)\big|_{s=p_2} \tag{17.62}$$

La trasformata inversa risulta:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left(\bar{K}e^{\alpha t}e^{j\beta t} + \bar{K}^* e^{\alpha t}e^{-j\beta t}\right)u(t) = \qquad (17.63)\\
&= e^{\alpha t}\left(\bar{K}e^{j\beta t} + \bar{K}^* e^{-j\beta t}\right)u(t) = \\
&= e^{\alpha t}\left[\bar{K}\left(\cos\beta t + j\sin\beta t\right) + \bar{K}^*\left(\cos\beta t - j\sin\beta t\right)\right]u(t) \\
&= e^{\alpha t}\left[\left(\bar{K} + \bar{K}^*\right)\cos\beta t + j\left(\bar{K} - \bar{K}^*\right)\sin\beta t\right]u(t) = \\
&= e^{\alpha t}\left[2\operatorname{Re}\bar{K}\cos\beta t + j\left(2j\operatorname{Im}\bar{K}\right)\sin\beta t\right]u(t) = \\
&= e^{\alpha t}\left[2\operatorname{Re}\bar{K}\cos\beta t - 2\operatorname{Im}\bar{K}\sin\beta t\right]u(t) = \\
&= e^{\alpha t}\left[2\left|\bar{K}\right|\cos\left(\beta t + \arctan\frac{\operatorname{Im}(\bar{K})}{\operatorname{Re}(\bar{K})}\right)\right]u(t)
\end{aligned}$$

Esempio 1

Determinare la trasformata inversa di Laplace della seguente funzione:

$$\begin{aligned}
F(s) &= 5\frac{s^2+2s+3}{s^2+4s+13} = \\
&= \frac{-10s-50}{4s+s^2+13} + 5 = \\
&= \frac{-10s-50}{(s-(-2+3j))\,(s-(-2-3j))} + 5
\end{aligned}$$

Le radici del polinomio al denominatore sono:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -2+j3 \\
p_2 &= -2-j3
\end{aligned}$$

Il primo coefficiente complesso dell'espansione in frazioni parziali vale:

$$\bar{K} = (s-(-2+j3))\,F(s)|_{s=-2+j3} = -5+j5$$

Il secondo coefficiente è il coniugato del primo:

$$\bar{K}^* = -5-j5$$

si ha, con la (17.63):

$$\begin{aligned}
f(t) &= 5\delta(t) + (-5+5j)\,e^{(-2+3j)t} + (-5-5j)\,e^{(-2-3j)t} = \\
&= 5\delta(t) - 5e^{-2t}\left((1-j)\,e^{+3jt} + (1+j)\,e^{-3jt}\right) = \\
&= 5\delta(t) - 5e^{-2t}\left(2\cos 3t + 2\sin 3t\right) = \\
&= 5\delta(t) - 10e^{-2t}\left(\cos(3t) + \sin 3t\right) = \\
&= 5\delta(t) - 10\sqrt{2}e^{-2t}\cos\left(3t + \arctan(-1)\right) = \\
&= 5\delta(t) - 10\sqrt{2}e^{-2t}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)u(t)
\end{aligned}$$

Esercizio 1

Determinare la funzione del tempo della seguente trasformata:

$$F(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 17}$$

Risposta: $f(t) = e^{-t}(2 \cdot 1 \cos 4t + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \sin 4t)u(t) = e^{-t}(2 \cos 4t - \frac{1}{2} \sin 4t)u(t)$

Esercizio 2

Determinare la funzione del tempo della seguente trasformata:

$$F(s) = \frac{s+2}{2s^2 + 8s + 40}$$

Risposta: $f(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} (\cos 4t)\, u(t)$

Esercizio 3

Determinare la funzione del tempo della seguente trasformata:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 10}$$

Risposta: $f(t) = (\cos 3t)\, e^{-t}u(t)$

17.7 I componenti elettrici nel dominio di Laplace

Il legame tensione-corrente ed il circuito equivalente nel dominio di Laplace, per i vari elementi circuitali, si ottiene trasformando il corrispondente legame tensione-corrente nel dominio del tempo.

17.7.1 Resistore

Per *un resistore*, nel dominio del tempo, si ha:

$$v_R(t) = R\, i_R(t) \tag{17.64}$$

Trasformando il primo e il secondo membro si ha:

$$V_R(s) = R\, I_R(s) \tag{17.65}$$

Il resistore presenta una impedenza pari a:

$$Z_R(s) = R \tag{17.66}$$

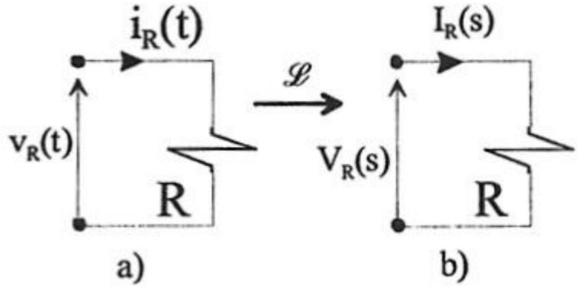

Fig. 17.3. Modello circuitale del resistore nel dominio del tempo e nel dominio di Laplace.

ed un circuito equivalente nel dominio di Laplace uguale a quello del dominio del tempo (vedi Fig. 17.3).

Si noti che nel dominio di Laplace la tensione $V(s)$ ha le dimensioni di un *impulso di tensione* [volt·secondo: $Vs = Wb$] e la corrente ha le dimensioni di un *impulso di corrente* [ampere·secondo: $As = C$], essendo integrali nel tempo delle corrispondenti grandezze.

17.7.2 Induttore

Per un induttore nel dominio del tempo (Fig. 17.4a), si ha:

$$v_L(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt} \tag{17.67}$$

Trasformando il primo e il secondo membro si ha:

$$\begin{aligned} V_L(s) &= L\,\left(sI_L(s) - i_L(0^-)\right) = && (17.68)\\ &= sLI_L(s) - Li_L(0^-) && (17.69)\end{aligned}$$

L'induttore presenta una impedenza pari a:

$$Z_L(s) = sL \tag{17.70}$$

ed un circuito equivalente nel dominio di Laplace costituito da un induttore di impedenza sL in serie ad una sorgente di tensione di valore pari a $-Li_L(0^-)$, ossia sottrattiva, dovuta allo stato iniziale dell'induttore (Fig. 17.4b). Si noti che la tensione della sorgente di tensione in serie all'induttore nel circuito equivalente dell'induttore nel dominio di Laplace è uguale al flusso totale concatenato con l'induttore all'istante iniziale.

Il precedente circuito equivalente di tipo serie dell'induttore può essere trasformato in un circuito equivalente di tipo parallelo (Fig. 17.4c) costituito da un induttore di ammettenza:

$$Y_L(s) = \frac{1}{sL} \tag{17.71}$$

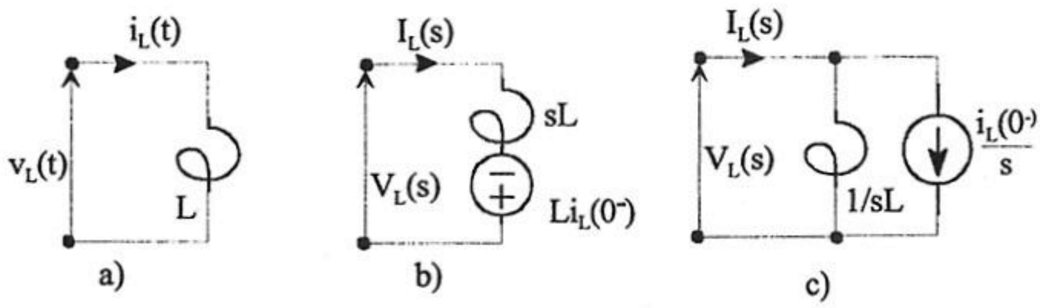

Fig. 17.4. Modello circuitale dell'induttore: a) nel dominio del tempo; b) tipo serie nel dominio di Laplace; c) tipo parallelo nel dominio di Laplace.

in parallelo con una sorgente di corrente di valore pari a:

$$\frac{Li_L(0^-)}{sL} = \frac{i_L(0^-)}{s} \tag{17.72}$$

alla quale si associa la seguente equazione caratteristica:

$$I_L(s) = \frac{1}{sL}V_L(s) + \frac{i_L(0^-)}{s} \tag{17.73}$$

Questi due circuiti equivalenti sono ugualmente utili e si usa l'uno o l'altro secondo convenienza. Se si scrive l'equazione di equilibrio delle tensioni in una maglia, si usa il modello di tipo serie; se, invece, si scrive l'equazione di equilibrio delle correnti in un nodo o in un insieme di taglio, si usa il modello di tipo parallelo.

17.7.3 Condensatore

Per un condensatore nel dominio del tempo (Fig. 17.5a), si ha:

$$i_C(t) = C\,\frac{dv_C(t)}{dt} \tag{17.74}$$

Trasformando il primo e il secondo membro si ha:

$$\begin{aligned} I_C(s) &= C\,\left(sV_C(s) - v_C(0^-)\right) = && (17.75)\\ &= sCV_C(s) - Cv_C(0^-) && (17.76)\end{aligned}$$

Il condensatore presenta una ammettenza pari a:

$$Y_C(s) = sC \tag{17.77}$$

ed un circuito equivalente nel dominio di Laplace costituito da un condensatore di ammettenza sC in parallelo ad una sorgente di corrente di

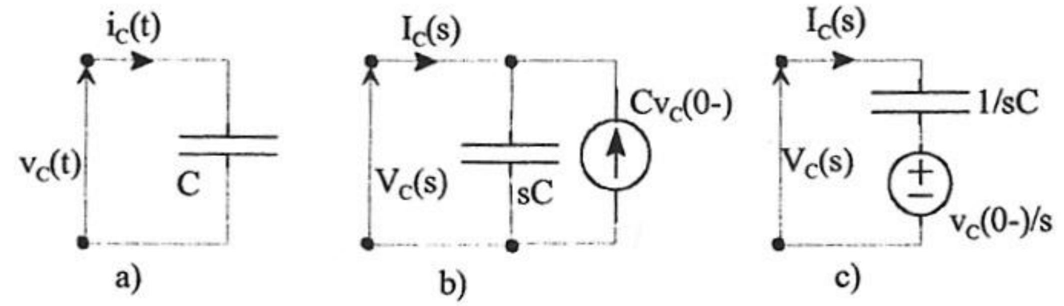

Fig. 17.5. Modello circuitale del condensatore: a) nel dominio del tempo; b) tipo parallelo nel dominio di Laplace; c) tipo serie nel dominio di Laplace.

valore pari a $-Cv_C(0^-)$ dovuta allo stato iniziale del condensatore (Fig. 17.5b). Si noti che la corrente della sorgente di corrente in parallelo al condensatore nel circuito equivalente del condensatore nel dominio di Laplace è uguale alla carica elettrica iniziale presente sulle armature del condensatore all'istante iniziale.

Il precedente circuito equivalente di tipo parallelo del condensatore può essere trasformato in un circuito equivalente di tipo serie (Fig. 17.5c) costituito da un condensatore di impedenza:

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC} \tag{17.78}$$

in serie con una sorgente di tensione di valore pari a:

$$\frac{Cv_C(0^-)}{sC} = \frac{v_C(0^-)}{s} \tag{17.79}$$

al quale si associa la seguente equazione caratteristica:

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{v_C(0^-)}{s} \tag{17.80}$$

Dei due circuiti equivalenti, si usa quello tipo-serie o quello tipo-parallelo, secondo necessità e convenienza.

17.7.4 Due-porta induttivo

Per un due-porta induttivo (o mutuo induttore) le equazioni caratteristiche possono essere espresse a correnti impresse, a flussi impressi e con variabili ibride impresse, secondo necessità.

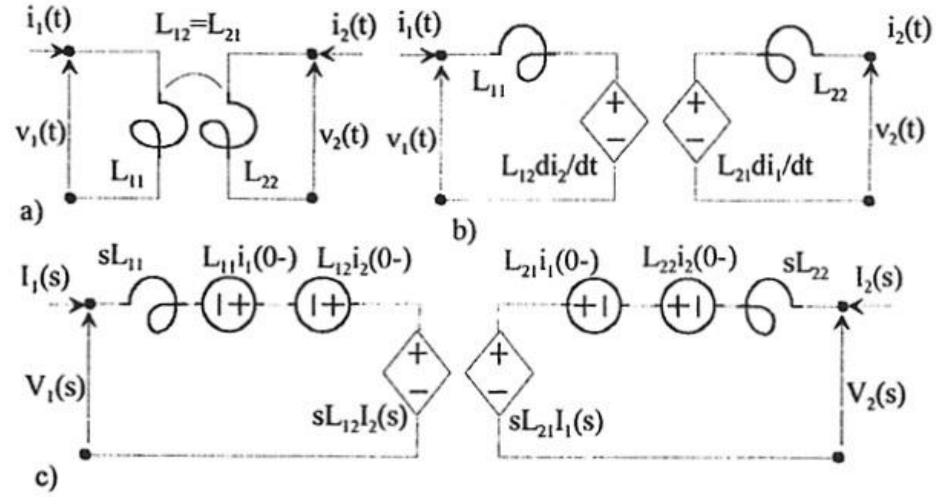

Fig. 17.6. Modello circuitale del due-porta induttivo: a) simbolo generico con parametri tipo serie; b) modello circuitale tipo serie nel dominio del tempo; b) modello circuitale tipo serie nel dominio di Laplace.

Due porta induttivo a correnti impresse

Le equazioni del due-porta induttivo a correnti impresse, nel dominio del tempo (Fig. 17.6a) sono le seguenti:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= L_{11}\frac{di_1(t)}{dt} + L_{12}\frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) &= L_{21}\frac{di_1(t)}{dt} + L_{22}\frac{di_2(t)}{dt} \end{aligned} \quad (17.81)$$

alle quali corrisponde il circuito equivalente tipo serie mostrato in Fig. 17.6b. In tale circuito equivalente sono rappresentate due maglie indipendenti, una per ciascuna porta. Ai terminali della porta 1 sono collegati due elementi in serie: un induttore d'induttanza L_{11} e un generatore di tensione $L_{12}\frac{di_2(t)}{dt}$ pilotato dalla derivata della corrente della porta 2. Analoga descrizione vale per la maglia facente capo alla porta 2.

Alle precedenti equazioni nel dominio del tempo, si possono associare le seguenti equazioni trasformate nel dominio di Laplace, ricordando la regola di derivazione:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= L_{11}\left(sI_1(s) - i_1(0^-)\right) + L_{12}\left(sI_2(s) - i_2(0^-)\right) \\ V_2(s) &= L_{21}\left(sI_1(s) - i_1(0^-)\right) + L_{22}\left(sI_2(s) - i_2(0^-)\right) \end{aligned} \quad (17.82)$$

che possono essere scritte come:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= sL_{11}I_1(s) + sL_{12}I_2(s) - L_{11}i_1(0^-) - L_{12}i_2(0^-) \\ V_2(s) &= sL_{21}I_1(s) + sL_{22}I_2(s) - L_{21}i_1(0^-) - L_{22}i_2(0^-) \end{aligned} \quad (17.83)$$

per evidenziare, al secondo membro, oltre alle auto e mutue impedenze, le sorgenti di tensione associate allo stato iniziale delle variabili impresse.

Le precedenti equazioni esprimono l'equilibrio delle tensioni in due maglie indipendenti associate al due-porta induttivo e possono essere rappresentate graficamente mediante una rete equivalente (Fig.17.6c).

Ai terminali del lato 1 sono collegati quattro elementi circuitali in serie: l'*autoimpedenza* $Z_{11}(s) = sL_{11}$, la sorgente di *tensione* $sL_{12}I_2(s)$ pilotata dalla *corrente* del lato 2, due sorgenti di *tensione* costante associate allo stato iniziale delle variabili impresse:$-L_{11}i_1(0^-) - L_{12}i_2(0^-)$.

Analogamente, ai terminali del lato 2 sono collegati quattro elementi circuitali in serie: l'*autoimpedenza* $Z_{22}(s) = sL_{22}$, la sorgente di *tensione* $sL_{21}I_1(s)$ pilotata dalla *corrente* del lato 1, due sorgenti di *tensione* costante associate allo stato iniziale delle variabili impresse:$-L_{21}i_1(0^-) - L_{22}i_2(0^-)$.

Si noti che il circuito equivalente nel dominio di Laplace del due-porta induttivo a correnti impresse rappresenta direttamente, mediante sorgenti di tensione costante, lo stato iniziale. Ciò a differenza di quanto avviene nel circuito equivalente nel dominio del tempo, nel quale non è esplicita la rappresentazione delle condizioni iniziali.

Due-porta induttivo a flussi concatenati impressi ovvero a tensioni impresse

Le equazioni costitutive del due-porta induttivo a flussi cancatenati impressi (Fig. 17.7a), nel dominio del tempo, sono le seguenti:

$$\begin{aligned} i_1 &= \Gamma_{11}\psi_1 + \Gamma_{12}\psi_2 \\ i_2 &= \Gamma_{21}\psi_1 + \Gamma_{22}\psi_2 \end{aligned} \tag{17.84}$$

Riconoscendo il legame fra flussi concatenati di porta e tensioni di porta:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \int_{0^-}^{t} v_1 dt + \psi_1(0^-) \\ \psi_2 &= \int_{0^-}^{t} v_2 dt + \psi_2(0^-) \end{aligned} \tag{17.85}$$

si ha, ancora nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned} i_1 &= \Gamma_{11}\left(\int_{0^-}^{t} v_1 dt + \psi_1(0^-)\right) + \Gamma_{12}\left(\int_{0^-}^{t} v_2 dt + \psi_2(0^-)\right) \\ i_2 &= \Gamma_{21}\left(\int_{0^-}^{t} v_1 dt + \psi_1(0^-)\right) + \Gamma_{22}\left(\int_{0^-}^{t} v_2 dt + \psi_2(0^-)\right) \end{aligned} \tag{17.86}$$

A queste equazioni corrisponde il circuito equivalente riportato in Fig. 17.7b. Ai terminali della porta 1 sono collegati quattro elementi in parallelo: un induttore di inertanza Γ_{11}, una sorgente di corrente pilotata dalla tensione della porta 2 ($\Gamma_{12}\int_{0^-}^{t} v_2 dt$) e due sorgenti di corrente costante

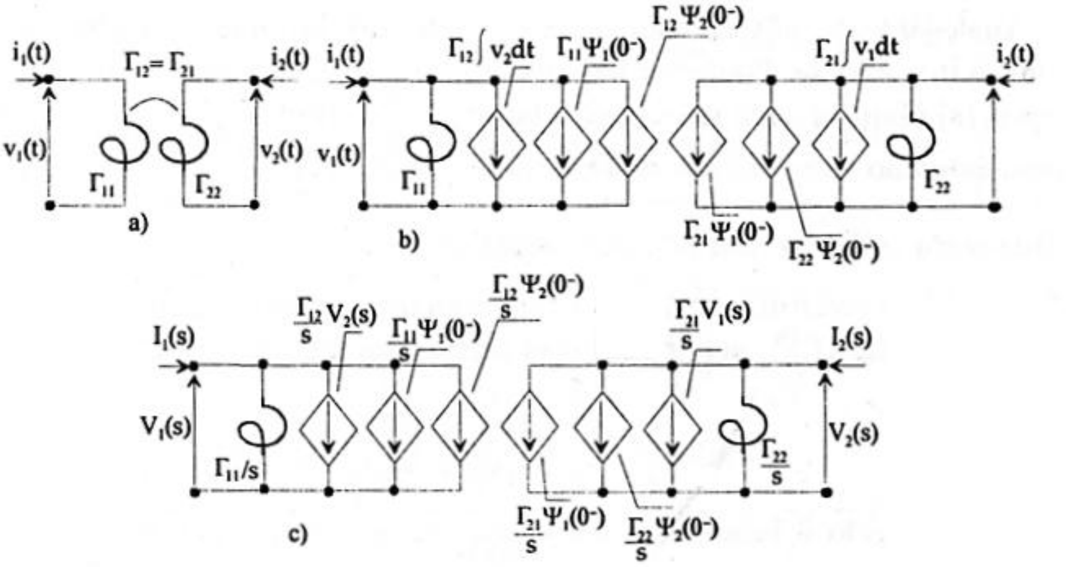

Fig. 17.7. Modello circuitale del due-porta induttivo: a) simbolo generico con parametri tipo parallelo; b) modello circuitale tipo parallelo nel dominio del tempo; b) modello circuitale tipo parallelo nel dominio di Laplace.

rappresentative dello stato iniziale $(\Gamma_{11}\psi_1(0^-) + \Gamma_{12}\psi_2(0^-))$. Analoga descrizione si può dare per il circuito equivalente facente capo ai terminali della porta 2.

Trasformando secondo Laplace le correnti al primo membro, gli integrali delle tensioni e le costanti associate allo stato iniziale del secondo membro, si ha:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \Gamma_{11}\frac{V_1(s)}{s} + \frac{\Gamma_{11}\psi_1(0^-)}{s} + \Gamma_{12}\frac{V_2(s)}{s} + \frac{\Gamma_{12}\psi_2(0^-)}{s} \\ I_2(s) &= \Gamma_{21}\frac{V_1(s)}{s} + \frac{\Gamma_{21}\psi_1(0^-)}{s} + \Gamma_{22}\frac{V_2(s)}{s} + \frac{\Gamma_{22}\psi_2(0^-)}{s} \end{aligned} \quad (17.87)$$

che possono anche essere scritte come:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{\Gamma_{11}}{s}V_1(s) + \frac{\Gamma_{12}}{s}V_2(s) + \frac{\Gamma_{11}\psi_1(0^-)}{s} + \frac{\Gamma_{12}\psi_2(0^-)}{s} \\ I_2(s) &= \frac{\Gamma_{21}}{s}V_1(s) + \frac{\Gamma_{22}}{s}V_2(s) + \frac{\Gamma_{21}\psi_1(0^-)}{s} + \frac{\Gamma_{22}\psi_2(0^-)}{s} \end{aligned} \quad (17.88)$$

per evidenziare, al secondo membro, oltre alle auto e mutue *ammettenze*, le sorgenti di *corrente* associate allo stato iniziale delle variabili impresse. Le precedenti equazioni esprimono l'equilibrio delle correnti in due *nodi* indipendenti associati al due-porta induttivo e possono essere rappresentate graficamente mediante una rete equivalente (Fig. 17.7c).

Ai terminali della porta 1 sono collegati quattro elementi circuitali *in parallelo*: l'*ammettenza* $Y_{11}(s) = \frac{\Gamma_{11}}{s}$, la sorgente di *corrente* $\frac{\Gamma_{12}}{s}V_2(s)$ pilotata dalla *tensione* del lato 2, due sorgenti di *corrente* costante associate allo stato iniziale delle variabili impresse: $\frac{\Gamma_{11}\psi_1(0^-)}{s} + \frac{\Gamma_{12}\psi_2(0^-)}{s}$.

Analogamente, ai terminali del lato 2 sono collegati quattro elementi circuitali in *parallelo*: l'*autoammettenza* $Y_{22}(s) = \frac{\Gamma_{22}}{s}$, la sorgente di *corrente* $\frac{\Gamma_{21}}{s}V_1(s)$ pilotata dalla tensione del lato 1, due sorgenti di *corrente* costante associate allo stato iniziale delle variabili impresse: $\frac{\Gamma_{21}\psi_1(0^-)}{s} + \frac{\Gamma_{22}\psi_2(0^-)}{s}$.

Due-porta induttivo con variabili ibride impresse

Le equazioni costitutive del due-porta induttivo con variabili ibride (ψ_1, i_2) impresse (Fig. 17.8), nel dominio del tempo, sono le seguenti:

$$\begin{aligned} i_1 &= h_{11}\psi_1 + h_{12}i_2 \\ \psi_2 &= h_{21}\psi_1 + h_{22}i_2 \end{aligned} \qquad (17.89)$$

Riconoscendo il legame fra flusso concatenato di porta e tensione corrispondente:

$$\psi_1 = \int_{0^-}^{t} v_1 dt + \psi_1(0^-) \qquad (17.90)$$

e derivando membro a membro la seconda equazione, si ha:

$$\begin{aligned} i_1 &= h_{11}\left(\int_{0^-}^{t} v_1 dt + \psi_1(0^-)\right) + h_{12}i_2 \\ v_2 &= h_{21}v_1 + h_{22}\frac{di_2}{dt} \end{aligned} \qquad (17.91)$$

A queste equazioni si associa il circuito equivalente nel dominio del tempo mostrato in Fig. 17.8b. Tale circuito equivalente prevede tre elementi circuitali in parallelo sulla porta 1: un induttore di inertanza h_{11}, una sorgente di corrente $(h_{12}i_2)$ pilotata dalla corrente della porta 2 ed una sorgente di corrente costante $(h_{11}\psi_1(0^-))$ rappresentativa dello stato iniziale della variabile ψ_1 impressa alla porta 1. Alla porta 2 sono collegati due elementi in serie: un induttore di induttanza h_{22} e una sorgente di tensione $(h_{21}v_1)$ pilotata dalla tensione della porta 1. Le due sorgenti pilotate, $h_{12}i_2$ e $h_{21}v_1$, costituiscono il modello *del trasformatore ideale nel dominio del tempo.* Questo circuito equivalente nel dominio del tempo non esplicita lo stato iniziale della corrente della porta 2.

Trasformando secondo Laplace le variabili al primo membro, l'integrale, la derivata e la costante $(h_{11}\psi_1(0^-))$ del secondo membro, si ha:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= h_{11}\frac{V_1(s)}{s} + \frac{h_{11}\psi_1(0^-)}{s} + h_{12}I_2(s) \\ V_2(s) &= h_{21}V_1(s) + h_{22}\left(sI_2(s) - i_2(0^-)\right) \end{aligned} \qquad (17.92)$$

che possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{h_{11}}{s}V_1(s) + h_{12}I_2(s) + \frac{h_{11}\psi_1(0^-)}{s} \\ V_2(s) &= h_{21}V_1(s) + sh_{22}I_2(s) - h_{22}i_2(0^-) \end{aligned} \qquad (17.93)$$

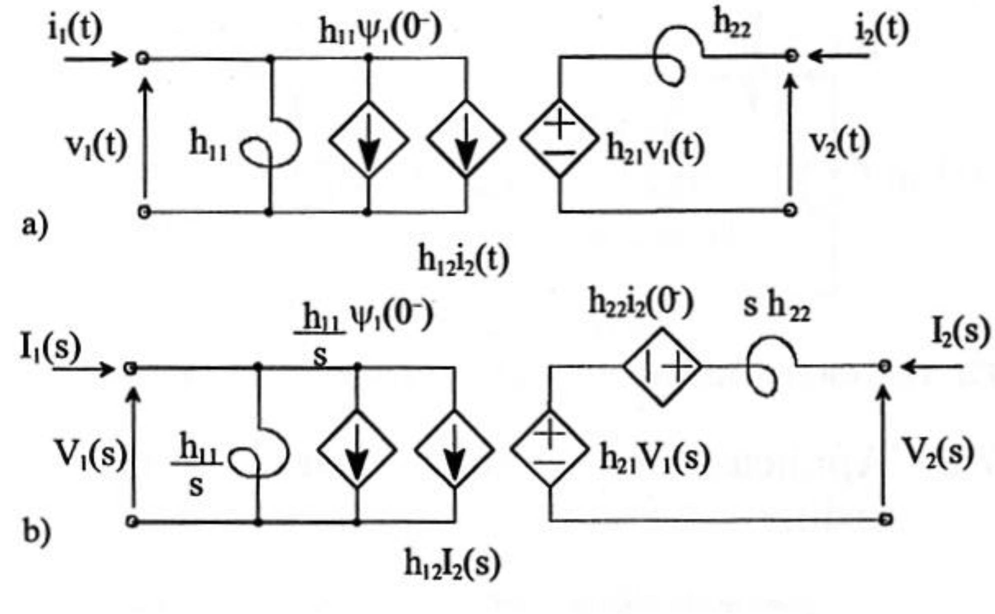

Fig. 17.8. Modello circuitale del due-porta induttivo con variabili ibride (ψ_1, i_2) impresse: a) simbolo generico con parametri tipo ibrido; b) modello circuitale tipo ibrido nel dominio del tempo; b) modello circuitale tipo ibrido nel dominio di Laplace.

per evidenziare, al secondo membro, l'*ammettenza a vuoto* vista dal lato 1: $Y_{1v} = \frac{h_{11}}{s}$, l'impedenza in corto-circuito vista dal lato 2: $Z_{2cc} = sh_{22}$, la sorgente di corrente (tensione) pilotata dalla corrente (tensione) dell'altro lato ($h_{12}I_2(s), h_{21}V_1(s)$) e costituenti il *trasformatore ideale nel dominio di Laplace*, oltreché la sorgente di corrente $\frac{h_{11}\psi_1(0^-)}{s}$ e di tensione $-h_{22}i_2(0^-)$ associate, rispettivamente, allo stato iniziale dell'induttore in parallelo al lato 1 e dell'induttore in serie al lato 2.

La prima delle precedenti equazioni esprime l'equilibrio delle correnti in un *nodo* indipendente mentre la seconda equazione esprime l'equilibrio delle tensioni in una maglia indipendente e possono essere rappresentate graficamente mediante una rete equivalente (Fig. 17.8c).

Ai terminali del lato 1 sono collegati *tre elementi in parallelo*: l'ammettenza a vuoto $Y_{1v}(s) = \frac{h_{11}}{s}$, la sorgente di corrente $h_{12}I_2(s)$ pilotata dalla corrente del lato 2, la sorgente di corrente costante associata all'induttore in parallelo alla porta 1, di inertanza h_{11}:$\frac{h_{11}\psi_1(0^-)}{s}$.

Ai terminali del lato 2 sono collegati *tre elementi in serie*: l'impedenza di corto-circuito $Z_{2cc}(s) = sh_{22}$, la sorgente di tensione $h_{21}V_1(s)$ pilotata dalla tensione del lato 1 e una sorgente di tensione costante per rappresentare lo stato iniziale dell'induttore in serie alla porta 2 di induttanza h_{22}: $-h_{22}i_2(0^-)$

Si noti che tutti e tre i circuiti equivalenti del due-porta induttivo nel dominio di Laplace forniscono una rappresentazione esplicita dello stato iniziale delle variabili di stato impresse alle due porte, a differenza del circuito equivalente nel dominio del tempo.