

LINEE DI TRASMISSIONE

1. Generalità

Quando le cariche elettriche vengono messe in movimento per costituire una corrente elettrica, il campo magnetico prodotto dalla corrente e il campo elettrico dovuto alla presenza delle cariche non si stabiliscono immediatamente in tutto lo spazio circostante, ma si propagano con una velocità finita. Nell'aria questa velocità è approssimativamente uguale a quella della luce nel vuoto, di circa $3 \cdot 10^8$ m/s. Consideriamo una linea costituita da due conduttori paralleli che connettono un generatore ad un carico. La tensione impressa dal generatore ad una estremità della linea non raggiunge il carico nello stesso istante, ma si propaga lungo la linea ad una velocità finita e arriva sul carico dopo un certo tempo. Questo fatto può essere spiegato dall'azione di concatenamento dei campi elettrico e magnetico che sono guidati dai conduttori, dal generatore verso il carico, ma può essere molto più facilmente analizzato in termini di induttanza distribuita e di capacità distribuita dei conduttori. La velocità di propagazione dipende dal mezzo che circonda i conduttori e nel quale esistono i campi elettrico e magnetico; per le linee isolate in aria la velocità è quasi uguale a quella della luce nel vuoto, mentre è alquanto più bassa per le linee con dielettrico solido. Se la tensione del generatore varia sinusoidalmente nel tempo con frequenza f , la distanza che un'onda percorre in un ciclo è uguale alla lunghezza d'onda λ , legata alla frequenza dall'importante relazione: $\lambda = u/f$, dove u è la velocità di propagazione. Assumendo $u = 3 \cdot 10^8$ m/s, possiamo trovare la lunghezza d'onda corrispondente alle varie frequenze; ad esempio, per $f = 50$ Hz, $\lambda = 6000$ km; per $f = 3$ MHz, $\lambda = 100$ m; per $f = 3000$ MHz, $\lambda = 10$ cm.

Il ritardo di tempo della propagazione fra l'inizio della linea e l'estremità ricevente in cui è connesso il carico è importante quando la linea è così lunga o la frequenza così alta che l'onda di tensione e di corrente lungo la linea impiega una apprezzabile parte del ciclo per percorrere la linea in tutta la sua lunghezza. Ciò viene espresso molto convenientemente in termini di lunghezza d'onda: la teoria delle linee di trasmissione deve essere usata ogni volta che la lunghezza della linea è apprezzabile rispetto ad un quarto di lunghezza d'onda. Quando la linea è molto più corta di $\lambda/4$, il ritardo di tempo fra l'inizio e la fine della linea è soltanto una piccola parte di un ciclo del segnale e il

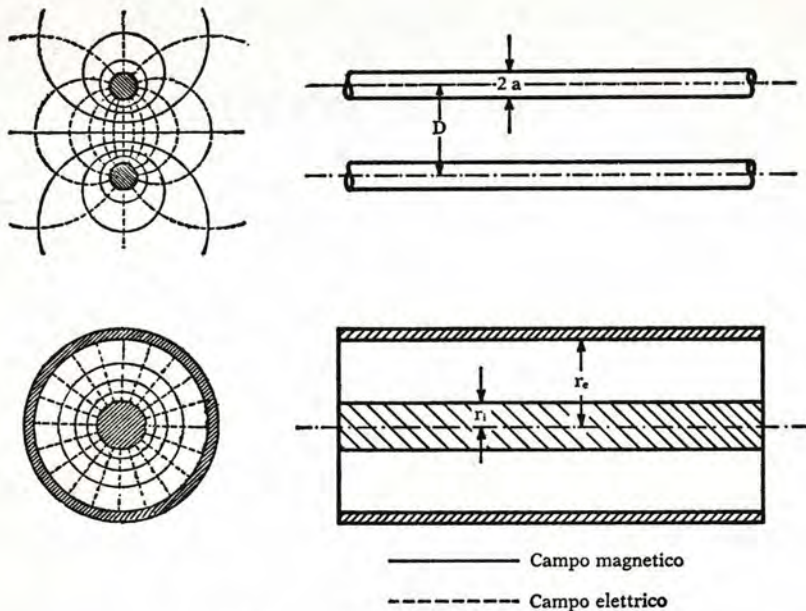


Fig. 1. - Linea bifilare e cavo coassiale.

sistema può essere analizzato con la nota teoria dei *circuiti a costanti concentrate*, cioè dei circuiti di dimensioni molto piccole rispetto alla lunghezza d'onda.

Fra i vari tipi di linee, quelle usate particolarmente alle alte frequenze sono la *linea bifilare* e la *linea coassiale* (cavo coassiale). In figura 1 sono mostrate la disposizione dei conduttori e la configurazione dei campi elettrico e magnetico su una sezione trasversale di queste linee. La *linea bifilare* è di facile costruzione e le sue caratteristiche vengono facilmente regolate variando la distanza fra i conduttori; tuttavia i campi si estendono intorno ai conduttori e alle più alte frequenze radio diventano eccessive le perdite per irradiazione che impediscono l'uso di tale linea per frequenze superiori a qualche centinaio di MHz. La *linea coassiale* consiste di due conduttori concentrici di cui quello esterno è a forma di tubo; il conduttore interno può essere mantenuto fisso o con delle rondelle distanziatrici di materiale isolante o con un dielettrico solido continuo che riempie lo spazio anulare fra i conduttori per tutta la lunghezza della linea. Quando si usa il dielettrico continuo il cavo coassiale può essere fatto flessibile costruendo il conduttore esterno con una trecciola di fili sottili. Il cavo coassiale è autoschermato dal conduttore esterno e i campi sono confinati nella regione anulare compresa fra i conduttori. Per questo motivo la linea coassiale è largamente usata su tutto il campo delle frequenze radio fino anche a 3000 MHz ($\lambda = 10$ cm). La configurazione del campo elettromagnetico rappresentata in figura 1 è quella dovuta al cosiddetto *modo principale di propagazione* lungo la linea e l'onda che si propaga è chiamata *onda trasversa elettromagnetica* o *onda T.E.M.* per il fatto che i campi elettrico e magnetico sono perpendicolari fra loro e perpendicolari alla direzione dei conduttori, per cui le linee di forza sono contenute in piani trasversali ai conduttori. Tuttavia, quando la frequenza diventa molto elevata per cui la corrispondente lunghezza d'onda è paragonabile alla

distanza fra i conduttori, diventano possibili altri tipi di onde, come quelle utilizzate nelle guide d'onda, dove o l'uno o l'altro dei due campi ha una componente diretta secondo la direzione dei conduttori. Queste onde, dovute a modi superiori di propagazione, sono da considerarsi indesiderate nelle linee di trasmissione a due conduttori; pertanto la distanza fra i conduttori viene fatta molto più piccola di un quarto di lunghezza d'onda. Per le linee bifilari un'altra ragione per usare una piccola distanza fra i conduttori è che quando questa si avvicina ad un quarto di lunghezza d'onda la linea si comporta come un'antenna e irradia una considerevole parte dell'energia che essa trasporta. Nella trattazione che segue si assume una distanza fra i conduttori molto piccola in modo da poter trascurare le perdite per irradiazione.

2. Costanti distribuite di una linea

Le linee di trasmissione sono facilmente analizzate, anziché per mezzo della teoria dei campi elettromagnetici, mediante una estensione della teoria dei circuiti a costanti concentrate. Le due costanti più importanti di una linea sono l'induttanza dei conduttori e la capacità fra i conduttori che debbono essere considerate distribuite lungo la linea stessa e di cui interessa il valore per unità di lunghezza di linea. Nel seguito si indicherà con L l'induttanza per unità di lunghezza (Henry/metro) e con C la capacità per unità di lunghezza (Farad/metro). In figura 2 è mostrata una rappresentazione schematica di una linea di trasmissione in termini di induttanza e di capacità distribuite. Quando la linea viene considerata in questo modo non è difficile comprendere come la tensione e la corrente possano variare da punto a punto lungo la linea e che sotto certe condizioni si possano verificare fenomeni di risonanza. L'induttanza e la capacità per unità di lunghezza di una linea dipendono dalla distanza fra i conduttori, dal loro raggio e dal tipo di dielettrico fra essi interposto. Per una linea coassiale si ha:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_e}{r_i} = 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{r_e}{r_i} \quad \text{Henry/metro}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = \frac{\epsilon_r}{18 \ln \frac{r_e}{r_i}} 10^{-9} \quad \text{Farad/metro}$$

dove r_e e r_i sono, rispettivamente, i raggi del conduttore esterno e di quello interno, ϵ_r è la costante dielettrica relativa del dielettrico posto fra i conduttori e \ln è il simbolo di logaritmo naturale in base e .

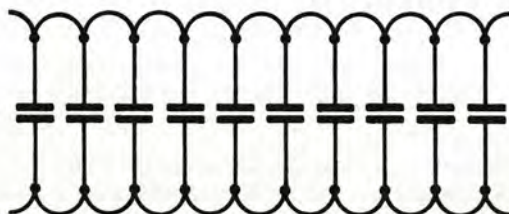
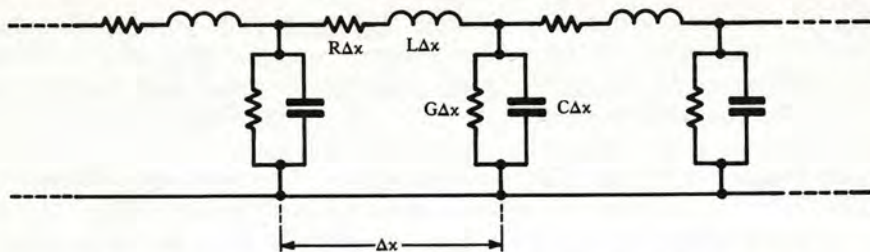


Fig. 2. - Rappresentazione schematica di una linea in termini di induttanza e di capacità «distribuite».

Fig. 3. - Circuito equivalente a elementi concentrati di un tratto Δx di linea.

Oltre all'induttanza e alla capacità, i conduttori della linea hanno anche una resistenza R per unità di lunghezza per il fatto che i fili della linea non sono perfettamente conduttori, ma hanno una conducibilità elettrica di valore finito. La resistenza per unità di lunghezza, oltre a dipendere dalla conducibilità dei conduttori, dipende anche dalla frequenza, a causa dell'effetto pelle che modifica la distribuzione della corrente sulla sezione dei conduttori. Alle alte frequenze la resistenza per unità di lunghezza di una linea coassiale con conduttori di rame è data dall'espressione:

$$R = 4,2 \cdot 10^{-6} \sqrt{f} (1/r_e + 1/r_i) \quad \Omega/\text{metro}$$

Il conduttore interno contribuisce alla maggior parte della resistenza perché ha il raggio più piccolo.

Il dielettrico interposto fra i due conduttori non è un isolante perfetto e, pertanto, una certa corrente di dispersione può scorrere fra un conduttore e l'altro attraverso il dielettrico. Si tiene conto di questa dispersione mediante la conduttanza per unità di lunghezza $G = \omega C \tan \delta$, dove δ è l'angolo di perdita del dielettrico. Per una linea coassiale con dielettrico continuo di conducibilità σ_d si ha:

$$G = 2 \pi \sigma_d / \ln (r_e/r_i) \quad \text{Siemens/metro}$$

Sebbene le costanti L , C , R e G di una linea, dette anche costanti primarie, siano uniformemente distribuite lungo la linea, possiamo avere un'idea approssimata del loro effetto immaginando di suddividere la linea in sezioni molto corte di lunghezza Δx , come è rappresentato in figura 3; ciascuna sezione ha una induttanza uguale a $L \Delta x$, una capacità $C \Delta x$, una resistenza $R \Delta x$ e una conduttanza di dispersione $G \Delta x$. In figura, sebbene l'induttanza e la resistenza siano indicate per ogni tratto Δx concentrate in un solo conduttore, esse rappresentano in realtà l'effetto complessivo dei due conduttori per il tratto Δx . Supponendo di far diventare le lunghezze Δx sempre più piccole e al limite infinitesime, la linea con elementi concentrati di figura 3 si approssima sempre di più alla linea effettiva con costanti distribuite.

3. Equazioni differenziali di una linea di trasmissione

Consideriamo un generico tratto infinitesimo di linea dx , come in figura 4(a), compreso fra due sezioni trasversali AB e CD rispettivamente a distanza x e $(x + dx)$ da un punto di riferimento quale, ad esempio, l'inizio della linea dove è connesso il generatore. Questo tratto infinitesimo di linea può essere rappresentato con il circuito

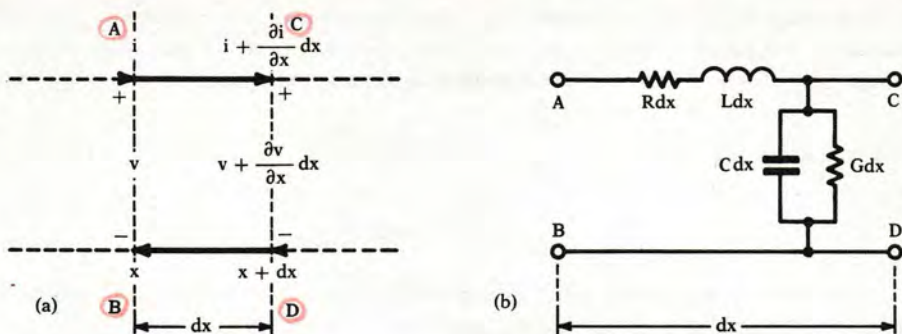


Fig. 4.

equivalente a costanti concentrate indicato in figura 4(b). Alla distanza x siano v e i i valori istantanei della tensione e della corrente nella linea; alla distanza $(x + dx)$ questi valori saranno $v + dv$ e $i + di$. La differenza $-dv$ fra la tensione in x e la tensione in $(x + dx)$ è prodotta dalla corrente i che scorre attraverso la resistenza infinitesima Rdx e dalla rapidità di variazione $\partial i / \partial t$ della corrente stessa nell'induttanza infinitesima Ldx .

Con le notazioni di figura 4 si può scrivere:

$$v - (v + dv) = (Rdx)i + (Ldx)\partial i / \partial t$$

ed essendo: $dv = (\partial v / \partial x) dx$, si ottiene, eliminando dx da entrambi i membri:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

avendo usato il simbolo ∂ per le derivate parziali poiché v e i sono funzioni delle due variabili indipendenti x e t .

La differenza $-di$ fra la corrente alla distanza x e la corrente a $(x + dx)$ è dovuta alla corrente di dispersione prodotta dalla tensione v che agisce sulla conduttanza Gdx e alla corrente capacitiva attraverso la capacità Cdx prodotta dalla variazione della tensione con rapidità $\partial v / \partial t$. Si può scrivere:

$$i - (i + di) = (Gdx)v + (Cdx)\partial v / \partial t$$

essendo: $di = (\partial i / \partial x) dx$, si ottiene:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -Gv - C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

La (1) e la (2) costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che, insieme alle condizioni di chiusura della linea alle sue estremità (condizioni al contorno), possono essere risolte per ottenere la tensione e la corrente in un punto qualunque della linea.

La particolare soluzione di queste equazioni a cui siamo interessati è quella per il caso in cui la tensione v e la corrente i sono funzioni sinusoidali del tempo t ; è allora possibile rappresentare la tensione e la corrente, anziché con il loro valore istantaneo, mediante numeri complessi, facilitando in tal modo la trattazione. Indicando con \bar{V} e \bar{I} la tensione complessa e la corrente complessa in un punto x lungo la linea, i valori

istantanei della tensione v e della corrente i si ottengono moltiplicando i numeri complessi \bar{V} e \bar{I} per il fattore temporale $e^{j\omega t}$ e prendendo poi la parte reale (o la parte immaginaria) di $\bar{V}e^{j\omega t}$ e di $\bar{I}e^{j\omega t}$. Le equazioni (1) e (2) diventano:

$$\frac{d\bar{V}}{dx} = -(R + j\omega L)\bar{I} \quad (3)$$

$$\frac{d\bar{I}}{dx} = -(G + j\omega C)\bar{V} \quad (4)$$

Derivando la (3) rispetto ad x si può eliminare, in base alla (4), l'incognita \bar{I} ; si ottiene una equazione differenziale del secondo ordine nella sola incognita \bar{V} :

$$\frac{d^2\bar{V}}{dx^2} = \gamma^2\bar{V} \quad (5)$$

dove si è indicato con γ la quantità complessa:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$\gamma^2 = \bar{Z}\bar{Y}$$

chiamata costante di propagazione.

4. Soluzione delle equazioni della linea e caratteristiche di propagazione

La soluzione generale dell'equazione (5) è data dall'espressione:

$$\bar{V}(x) = \bar{A}e^{-\gamma x} + \bar{B}e^{+\gamma x} \quad (6)$$

dove A e B sono delle costanti, generalmente complesse, che vengono determinate in base ad opportune condizioni da imporre caso per caso. Derivando la (6) rispetto ad x , dalla (3) si può ottenere l'espressione della corrente complessa \bar{I} . Si ottiene:

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{A}}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma x} - \frac{\bar{B}}{\bar{Z}_0} e^{+\gamma x} \quad (7)$$

avendo posto:

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (8)$$

$$\bar{Z}_0^2 = \frac{\bar{Z}}{\bar{Y}}$$

La quantità \bar{Z}_0 ha le dimensioni di una impedenza ed è chiamata impedenza caratteristica della linea.

Per comprendere il significato fisico delle espressioni (6) e (7) conviene considerare i termini a secondo membro separatamente. Un caso molto importante in pratica è quello in cui la costante B è nulla; ciò si verifica per una linea di lunghezza infinita (*) e, come si vedrà in seguito, per una linea di lunghezza finita chiusa su una impedenza di carico uguale all'impedenza caratteristica. Con $B=0$ la tensione complessa \bar{V} ad una distanza x lungo la linea è: $\bar{V}(x) = \bar{A}e^{-\gamma x}$ e la costante A , in tal caso, rappresenta la tensione

(*) Per x tendente all'infinito il secondo termine a secondo membro della (6) tenderebbe verso infinito, ciò che è fisicamente impossibile da un punto di vista energetico e pertanto deve essere $B=0$ nel caso di linea di lunghezza infinita.

all'inizio della linea in cui $x=0$. La costante di propagazione γ si può porre nella forma: $\gamma = \alpha + j\beta$; la parte reale α è chiamata costante di attenuazione e la parte immaginaria β costante di fase. Il motivo di tali denominazioni apparirà fra breve. Nell'ipotesi suddetta si ha:

$$\bar{V}(x) = Ae^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} \quad (9)$$

Moltiplicando la (9) per $e^{j\omega t}$ e prendendo la parte reale si ottiene la tensione istantanea $v(x, t)$ ad una generica distanza x lungo la linea:

$$v(x, t) = Ae^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) \quad (10)$$

Si deduce da questa espressione che l'ampiezza della tensione lungo la linea, data da $Ae^{-\alpha x}$, diminuisce esponenzialmente con la distanza x a causa delle perdite che si hanno lungo la linea nei conduttori e nel dielettrico. Se V_1 è l'ampiezza della tensione in un punto a distanza x_1 dall'inizio della linea, la tensione in un punto a distanza x_2 ha un'ampiezza uguale a $V_1 e^{-\alpha(x_2 - x_1)}$. Nel passare da x_1 a x_2 vi è, quindi, una attenuazione, espressa in neper, uguale a $\alpha(x_2 - x_1)$; la costante α rappresenta, dunque, l'attenuazione, in neper, per unità di lunghezza lungo la linea, donde il nome di costante di attenuazione (1 neper = 8,686 decibel). Dalla (10) si deduce anche che la tensione nei vari punti lungo la linea ha uno sfasamento in ritardo, rispetto alla tensione per $x=0$, crescente linearmente con la distanza e dato da $-\beta x$; lo sfasamento fra le tensioni in due punti della linea separati da una distanza $(x_2 - x_1)$ è uguale a $\beta(x_2 - x_1)$; la costante β rappresenta, pertanto, lo sfasamento per unità di lunghezza lungo la linea e per questo motivo è chiamata costante di fase.

Per meglio comprendere i fenomeni di propagazione che si hanno lungo una linea conviene considerare il caso ideale di una linea priva di perdite, per la quale, essendo $R=0$ e $G=0$, si ha $\alpha=0$ e $\gamma=j\beta$. Questa ipotesi permette una certa semplificazione nella trattazione e in molti casi pratici è sufficientemente approssimata e i risultati ottenuti si possono considerare soddisfacenti, dato che le perdite nella linea sono, in pratica, abbastanza piccole rispetto all'energia che transita lungo la linea stessa. La tensione istantanea data dalla (10), con $\alpha=0$ diventa:

$$v(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x) \quad (11)$$

La configurazione della tensione lungo la linea in un certo fissato istante t si ottiene rappresentando l'espressione (11) in funzione dell'ascissa x , pensando t costante. In figura 5 sono rappresentati i valori istantanei della tensione lungo la linea per due diversi istanti di tempo t_1 e t_2 . Si osserva che la configurazione di tensione all'istante t_2

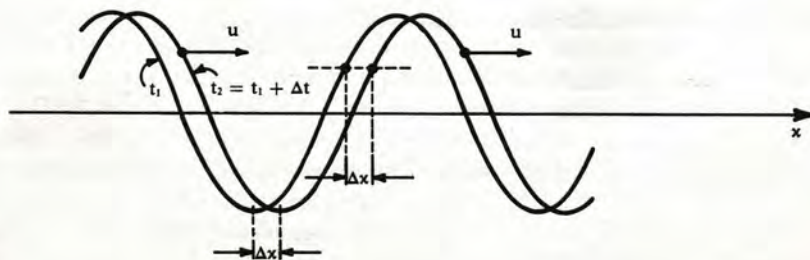


Fig. 5. - Configurazione della tensione lungo la linea in due istanti di tempo successivi.

$=t_1 + \Delta t$ è la stessa di quella all'istante t_1 precedente, eccetto per uno spostamento di posizione Δx verso destra lungo la linea, con:

$$\Delta x = \frac{\omega}{\beta} \Delta t \quad (12)$$

Infatti, se nella (11) si sostituisce simultaneamente t con $t + \Delta t$ e x con $x + \Delta x$, con Δx dato dalla (12), l'espressione (11) rimane inalterata. Si può, pertanto, affermare che la configurazione di tensione lungo la linea in un istante t la si ritrova in un istante successivo $t + \Delta t$ spostata di Δx , avendo percorso una distanza Δx in un intervallo di tempo Δt con una velocità $u = \Delta x / \Delta t$ data da:

$$u = \frac{\omega}{\beta} \quad (13)$$

La configurazione di tensione si propaga, pertanto, lungo la linea con velocità finita u e l'espressione (11), o la sua equivalente sotto forma complessa $Ae^{-j\beta x}$, rappresenta un'onda di tensione viaggiante lungo la linea.

La velocità u è chiamata velocità di propagazione lungo la linea dell'onda di tensione (o di corrente) e anche velocità di fase poiché rappresenta la velocità con cui un osservatore deve spostarsi lungo la linea insieme con l'onda per osservare un valore costante della fase complessiva $(\omega t - \beta x)$ della (11). Se infatti, al variare di t e di x , $(\omega t - \beta x) = \text{costante}$, si ha: $\omega dt - \beta dx = 0$, da cui: $dx/dt = u = \omega/\beta$. La velocità u è anche la velocità con cui si propagano lungo la linea i campi elettrico e magnetico guidati dai conduttori. Per una linea senza perdite, essendo $\gamma = j\omega\sqrt{LC}$ e, quindi, $\beta = \omega\sqrt{LC}$, si ha, dalla (13): $u = 1/\sqrt{LC}$.

Per qualunque tipo di linea, purché uniforme, il prodotto LC è uguale al prodotto fra la costante dielettrica $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ e la permeabilità magnetica $\mu = \mu_r \mu_0$ del dielettrico interposto fra i conduttori. Pertanto: $u = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\epsilon\mu} = 1/\sqrt{\epsilon_r \mu_r \epsilon_0 \mu_0}$; essendo $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ uguale alla velocità della luce nel vuoto c , si ha: $u = c/\sqrt{\epsilon_r}$, essendo per un dielettrico $\mu_r \cong 1$. La velocità di propagazione lungo una linea è, quindi, inferiore alla velocità della luce nel vuoto e per una linea senza perdite è indipendente dalla frequenza. Il rapporto $u/c = 1/\sqrt{\epsilon_r}$ per una data linea è chiamato «fattore di velocità»; per una linea coassiale con dielettrico solido continuo tale fattore può avere un valore compreso fra 0,6 e 0,7, con un valore tipico di 0,66.

La distanza percorsa dall'onda di tensione (o di corrente) lungo la linea durante un intervallo di tempo uguale al periodo T del segnale viene chiamata lunghezza d'onda λ nella linea. Si ha, quindi, $\lambda = uT = u/f$ e, cioè, la relazione fondamentale: $\lambda f = u$; dalla (13) si ottiene l'importante relazione che lega la costante di fase alla lunghezza d'onda in linea: $\beta = 2\pi/\lambda$ radianti/metro.

La lunghezza d'onda può anche essere definita come la distanza fra due massimi consecutivi dell'onda in un istante qualunque (fig. 6): lungo una distanza uguale a λ lo spostamento di fase βx della tensione è uguale a 2π radianti. $\beta\lambda = 2\pi$

Nel caso in cui non si possano considerare trascurabili le perdite nella linea, per cui $\alpha \neq 0$, occorre prendere in considerazione l'espressione (10). Da quanto è stato esposto per la (11) è facile comprendere che l'espressione (10) rappresenta un'onda di tensione che si propaga con velocità $u = \omega/\beta$ lungo la linea nel verso positivo delle ascisse x , ma durante la propagazione si attenua secondo il fattore $e^{-\alpha x}$, come è indicato in figura 7 dove sono rappresentate tre configurazioni della tensione lungo la linea in tre istanti

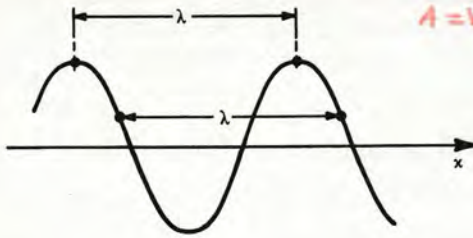


Fig. 6. - Definizione della lunghezza d'onda.

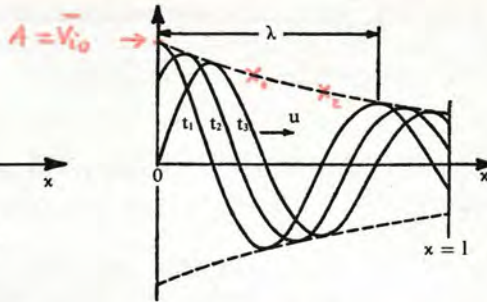


Fig. 7. - Configurazione della tensione in tre istanti successivi in una linea con perdite.

successivi. Nel caso di linea con perdite resta valida la (13) e la relazione $\beta = 2\pi/\lambda$, ma non è più valida la relazione $u = 1/\sqrt{LC} = c/\sqrt{\epsilon_r}$, poiché, con $\alpha \neq 0$, la velocità di propagazione u è funzione della frequenza.

Ritorniamo ora all'espressione generale di \bar{V} data dalla (6). Si è visto da quanto sopra esposto che $Ae^{-\gamma x}$ rappresenta un'onda di tensione, detta onda progressiva, che si propaga con velocità u nel verso positivo delle x lungo la linea; si comprende facilmente, allora, che $Be^{+\gamma x}$, figurando nell'esponente il segno $+$ anziché il segno $-$, rappresenta un'onda di tensione regressiva che si propaga nel verso contrario, cioè nel verso negativo delle x , verso il generatore. L'origine dell'onda regressiva è da attribuirsi al carico su cui è chiusa la linea di lunghezza finita, il quale, come verrà esaminato in seguito, se non è uguale all'impedenza caratteristica della linea, riflette all'indietro, verso il generatore, una parte dell'energia in arrivo. Si può, pertanto, affermare che, in generale, la tensione in un punto generico della linea è dovuta al contributo di una tensione prodotta dall'onda progressiva o diretta e di una tensione prodotta dall'onda regressiva o riflessa.

Analogamente a quanto detto per la (6), si può affermare che il primo termine a secondo membro della (7) rappresenta un'onda di corrente che si propaga lungo la linea dal generatore verso il carico, mentre il secondo termine rappresenta un'onda di corrente riflessa che ha origine dal carico e si propaga verso il generatore. La corrente in un punto qualunque della linea è, pertanto, in generale dovuta ai contributi dell'onda progressiva diretta e dell'onda regressiva riflessa. Il significato fisico del segno meno davanti al secondo termine della (7) può essere compreso in base alla figura 8 che mostra le onde di tensione e di corrente che si spostano nella direzione positiva della x in (a) e nella direzione opposta in (b).

Con le convenzioni di segno della figura 4(a) si osserva che la tensione è positiva per entrambi i casi, mentre la corrente è positiva per l'onda che si propaga verso destra [in

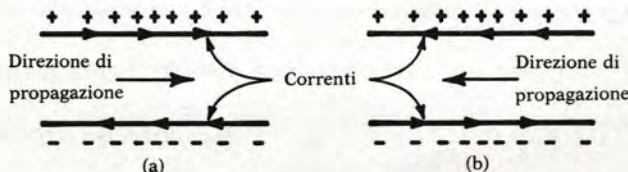


Fig. 8.

(a)] ed è negativa per quella che si propaga verso sinistra [in (b)]: per le onde che si propagano verso destra la tensione e la corrente hanno lo stesso segno, mentre per le onde che si propagano verso sinistra la tensione e la corrente sono di segno opposto.

5. Impedenza caratteristica e costante di propagazione. Condizione di non distorsione

L'impedenza caratteristica della linea, data dalla (8), non dipende dalla lunghezza della linea, né dalla natura del carico a termine della linea, ma è determinata solo dalla frequenza e dalle costanti primarie per unità di lunghezza R , L , C e G . Occorre osservare che l'impedenza caratteristica non è un'impedenza intesa nel senso normale del termine, cioè come rapporto fra una tensione e una corrente che la linea effettivamente possiede; soltanto nel caso in cui l'impedenza di carico è uguale a \bar{Z}_0 l'impedenza $\bar{Z}(x) = \bar{V}/\bar{I}$ in un punto qualunque x della linea è uguale a \bar{Z}_0 , come si vedrà in seguito. Se la linea è priva di perdite, cioè con $R=0$ e $G=0$, l'impedenza caratteristica è puramente reale, cioè resistiva, e data dalla relazione: $Z_0 = \sqrt{L/C}$. Tuttavia, anche non supponendo nulle le perdite, è possibile considerare l'impedenza caratteristica puramente resistiva e uguale a $\sqrt{L/C}$ quando la frequenza è sufficientemente elevata per cui $\omega L \gg R$ e $\omega C \gg G$. Considerando, ad esempio, una linea coassiale con conduttori di rame, con $r_i = 0,05$ cm e $r_e = 0,5$ cm si ha: $R = 9,05 \cdot 10^{-5} \sqrt{f}$, $\omega L = 2,9 \cdot 10^{-6} f$, quindi, $R/\omega L = 31/\sqrt{f}$. Alla frequenza di 100 MHz è $R/\omega L = 3,1 \cdot 10^{-3}$, trascurabile rispetto all'unità e lo sarà maggiormente a frequenze più alte. Inoltre $G/\omega C = \tan \delta$ per i dielettrici normalmente usati è molto piccolo. Pertanto l'impedenza caratteristica, che si può anche chiamare resistenza caratteristica, è data con un alto grado di approssimazione dalla semplice espressione: $Z_0 = \sqrt{L/C}$. Per una linea coassiale è:

$$Z_0 = 60 \sqrt{1/\epsilon_r} \ln (r_e/r_i) \quad \Omega$$

e per una linea bifilare:

$$Z_0 = 120 \sqrt{1/\epsilon_r} \ln (D/a) \quad \Omega$$

dove D è la distanza fra i centri dei conduttori e a è il raggio. I valori normalizzati per l'impedenza caratteristica sono in pratica: 600, 300, 75 e 50 Ω .

I segnali che si hanno in pratica sono di forma qualsiasi e possono essere scomposti mediante l'analisi di Fourier in componenti sinusoidali. Quando un segnale viene applicato ad un sistema di trasmissione, il segnale ricevuto avrà la stessa forma del segnale trasmesso soltanto se tutte le sue componenti sinusoidali sono attenuate ugualmente e se si propagano tutte con la stessa velocità.

Per non avere distorsione del segnale ricevuto è necessario che la costante di attenuazione α sia indipendente dalla frequenza e che la costante di fase β sia variabile linearmente con la frequenza, affinché la velocità di fase $u = \omega/\beta$ sia uguale per tutte le frequenze componenti il segnale. In generale queste condizioni non sono soddisfatte poiché α e β sono funzioni alquanto complicate della frequenza, date dalle relazioni:

$$\alpha = \sqrt{1/2 [\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC)]} \quad \text{neper/metro}$$

$$\beta = \sqrt{1/2 [\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC)]} \quad \text{radianti/metro}$$

Se le costanti primarie R , L , G e C della linea avessero valori tali da soddisfare la condizione: $RC = GL$, detta condizione di non distorsione o condizione di Heaviside, si avrebbe $\alpha = \sqrt{RG}$ e $\beta = \omega \sqrt{LC}$. La linea, allora, sarebbe non distorcente, poiché, supponendo R e G costanti entro il campo di frequenze del segnale, la costante di attenuazione sarebbe costante e la costante di fase sarebbe variabile linearmente con la frequenza; inoltre \bar{Z}_0 sarebbe reale e uguale a $\sqrt{L/C}$ per qualunque frequenza. Un caso particolare di linea non distorcente è la linea senza perdite dato che la condizione di non distorsione è sempre soddisfatta nella forma $0=0$.

Alle frequenze molto elevate per cui $\omega L \gg R$ e $\omega C \gg G$ le espressioni generali di α e di β sopra riportate si riducono alle seguenti:

$$\alpha \cong \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R}{2Z_0} + \frac{GZ_0}{2}$$

$$\beta \cong \omega \sqrt{LC}$$

Il termine $R/2Z_0$ è l'attenuazione causata dalle perdite di energia nei conduttori, mentre il termine $GZ_0/2$ è l'attenuazione dovuta alle perdite nel dielettrico. Alle alte frequenze la costante di fase varia linearmente con la frequenza, come per una linea senza perdite.

6. Linea adattata

In una linea di lunghezza infinita, considerazioni fisiche impongono che la costante B sia nulla nelle espressioni generali di \bar{V} e di \bar{I} date dalla (6) e dalla (7) e, pertanto, si ha: $\bar{V}(x) = Ae^{-\gamma x}$ e $\bar{I}(x) = (A/Z_0)e^{-\gamma x}$. In ogni punto della linea di lunghezza infinita l'impedenza $\bar{Z}(x)$, definita come il rapporto $\bar{V}(x)/\bar{I}(x)$, è uguale all'impedenza caratteristica Z_0 della linea stessa. Riferendosi alla figura 9, supponiamo ora di tagliare la linea infinita in un generico punto $x=l$, come è indicato in (b). La linea che rimane a destra del taglio ha ancora una lunghezza infinita e, pertanto, la sua impedenza in un punto qualsiasi e, quindi, anche al suo ingresso è uguale a Z_0 . Allora, nei riguardi della linea a

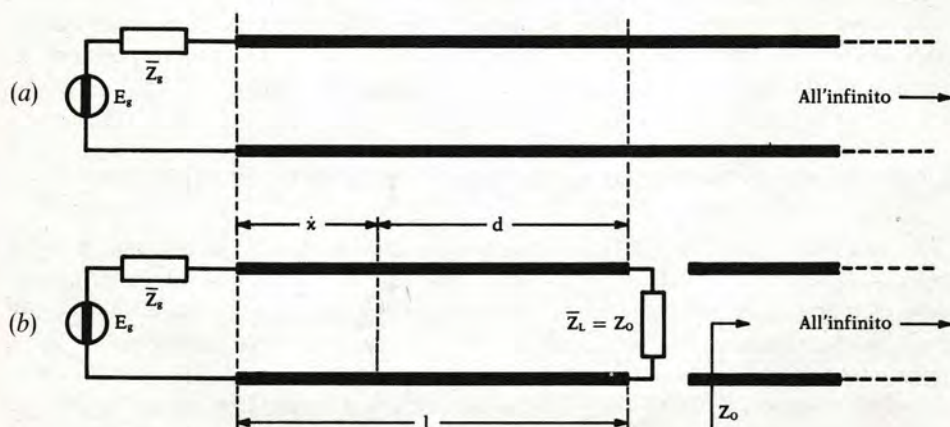


Fig. 9.

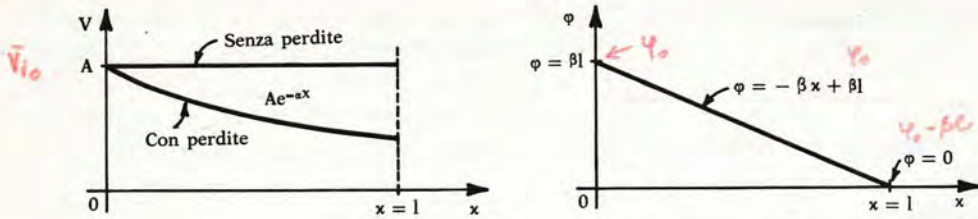


Fig. 10. - Andamenti dell'ampiezza e della fase lungo una linea adattata.

sinistra del taglio, di lunghezza finita uguale a l , la linea di lunghezza infinita di destra può essere sostituita con una impedenza concentrata uguale a Z_0 . Le configurazioni della tensione e della corrente sulla linea di lunghezza l e chiusa su una impedenza di carico uguale all'impedenza caratteristica rimangono quelle che si avrebbero se la linea fosse di lunghezza infinita e valgono, quindi, le relazioni: $\bar{V}(x) = Ae^{-\gamma x}$, $\bar{I}(x) = (A/Z_0)e^{-\gamma x}$ e $\bar{Z}(x) = Z_0$. Una linea chiusa alla estremità ricevente su una impedenza di carico uguale a Z_0 viene detta linea adattata.

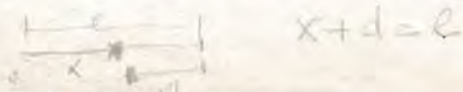
L'impedenza in un punto qualunque e all'ingresso di una linea adattata è uguale a Z_0 , indipendentemente dalla lunghezza della linea e questa impedenza, per una linea a basse perdite, è praticamente una resistenza pura indipendente dalla frequenza e uguale a $\sqrt{L/C}$. Pertanto in qualunque punto lungo la linea la tensione e la corrente sono fra loro in fase; l'energia fluisce dal generatore verso il carico propagandosi in forma di onda elettromagnetica e viene completamente assorbita dal carico. Dall'espressione $\bar{V}(x)$ per una linea adattata si deduce che la costante A è uguale alla tensione all'ingresso della linea ($x=0$) e, quindi, è data dalla relazione: $A = E_g Z_0 / (\bar{Z}_g + Z_0)$, dove E_g e \bar{Z}_g sono, rispettivamente, la forza elettromotrice e l'impedenza interna del generatore di segnale.

Scrivendo \bar{V} nella forma $\bar{V}(x) = Ae^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x}$ si può affermare che l'ampiezza della tensione lungo una linea adattata con perdite diminuisce esponenzialmente e lo sfasamento (ritardo) aumenta linearmente con la distanza x dal generatore. In una linea adattata senza perdite l'ampiezza della tensione è costante in tutti i punti e uguale ad A . Quanto detto per la tensione, vale anche per la corrente. In figura 10 sono rappresentati gli andamenti dell'ampiezza e dello sfasamento φ della tensione in funzione della distanza x ; per la rappresentazione dello sfasamento si è assunta come fase di riferimento, posta uguale a zero, la fase della tensione sul carico.

7. Linea chiusa su un carico qualunque. Coefficiente di riflessione

Per una linea chiusa su un carico qualunque, diverso da Z_0 , la costante B nelle soluzioni generali (6) e (7) è diversa da zero. Come si è già detto, il secondo termine a secondo membro di queste espressioni rappresenta un'onda di tensione e un'onda di corrente che si propagano nella direzione negativa delle x , dal carico verso il generatore, e costituiscono le cosiddette onde riflesse dal carico.

In pratica spesso è molto più conveniente misurare le distanze lungo la linea a partire dal carico, anziché dal generatore. Indicando con d la distanza dal carico e con l la lunghezza della linea, si ha: $x + d = l$ e, quindi, $x = l - d$. Sostituendo $l - d$ al posto di x ,



l'espressione della tensione $\bar{V}(x)$, data dalla (6), si può riscrivere nella forma:

$$\bar{V}(d) = Ae^{-\gamma l}e^{\gamma d} + Be^{\gamma l}e^{-\gamma d} \quad (14)$$

Dalla (14) si osserva che $Ae^{-\gamma l}$ rappresenta la tensione complessa sul carico, cioè per $d=0$, dovuta alla sola onda diretta incidente e $Be^{\gamma l}$ rappresenta la tensione sul carico dovuta alla sola onda riflessa. Indicando queste tensioni rispettivamente con i simboli \bar{V}_L^+ e \bar{V}_L^- la (14) si può riscrivere nella forma più semplice:

$$\bar{V}(d) = \bar{V}_L^+ e^{\gamma d} + \bar{V}_L^- e^{-\gamma d} \quad (15)$$

Analogamente, l'espressione della corrente, data dalla (7), si può riscrivere nella forma:

$$\bar{I}(d) = \bar{I}_L^+ e^{\gamma d} + \bar{I}_L^- e^{-\gamma d} \quad (16)$$

dove si è posto: $\bar{I}_L^+ = \bar{V}_L^+/Z_0$ e $\bar{I}_L^- = \bar{V}_L^-/Z_0$, che rappresentano le correnti sul carico dovute, rispettivamente, alla sola onda incidente e alla sola onda riflessa. Si definisce coefficiente di riflessione di tensione \bar{K}_L sul carico il rapporto complesso fra la tensione riflessa \bar{V}_L^- e la tensione incidente \bar{V}_L^+ sul carico: $\bar{K}_L = \bar{V}_L^-/\bar{V}_L^+ = -\bar{Z}_L/\bar{Z}_0$

Le espressioni (15) e (16) possono essere scritte in una forma più comoda per i successivi sviluppi nella quale appare il coefficiente di riflessione \bar{K}_L . Si ottiene:

$$\bar{V}(d) = \bar{V}_L^+ (e^{\gamma d} + \bar{K}_L e^{-\gamma d}) \quad (17)$$

$$\bar{I}(d) = \frac{\bar{V}_L^+}{Z_0} (e^{\gamma d} - \bar{K}_L e^{-\gamma d}) \quad (18)$$

Il coefficiente di riflessione di corrente sul carico, definito come il rapporto \bar{I}_L^-/\bar{I}_L^+ , è uguale a $-\bar{K}_L$, cioè è uguale, ma di segno opposto, al coefficiente di riflessione di tensione.

Il coefficiente di riflessione \bar{K}_L è funzione dell'impedenza di carico \bar{Z}_L e dell'impedenza caratteristica Z_0 della linea. Sul carico, cioè per $d=0$, deve essere $\bar{V}/\bar{I} = \bar{Z}_L$; facendo il rapporto fra la (17) e la (18) per $d=0$, ponendo tale rapporto uguale a \bar{Z}_L e risolvendo rispetto a \bar{K}_L si ottiene l'importante relazione:

$$\bar{K}_L = \frac{\bar{Z}_L - Z_0}{\bar{Z}_L + Z_0} \quad (19)$$

Dalla (19) risulta che nel caso di linea adattata, cioè con $\bar{Z}_L = Z_0$, il coefficiente di riflessione è nullo e non si hanno, come sappiamo, onde riflesse.

Per determinare le costanti A e B nella (6) e nella (7) è necessario imporre le condizioni alle estremità della linea, cioè al suo ingresso e sul carico. Sul carico deve essere $\bar{V} = \bar{Z}_L \bar{I}$ e all'ingresso della linea deve essere: $\bar{V} = E_g - \bar{Z}_g \bar{I}$. Per determinare \bar{V}_L^+ nella (17) e nella (18), dopo aver determinato \bar{K}_L mediante la (19), è sufficiente imporre la condizione all'ingresso della linea, dato che la condizione sul carico è stata già imposta per ottenere la (19). Tuttavia, invece di determinare A e B o \bar{V}_L^+ imponendo direttamente le condizioni alle estremità, è molto istruttivo arrivare agli stessi risultati considerando il periodo transitorio che si verifica sulla linea immediatamente dopo aver connesso il generatore e esaminando come si giunge alla situazione di regime, rappresentata dalle relazioni (6) e (7) o dalle (17) e (18). Immediatamente dopo aver connesso il generatore all'ingresso della linea e fino all'istante di ritorno in ingresso dell'onda riflessa dal carico, la linea appare al suo ingresso e, quindi, al generatore come se fosse di lunghezza infinita

e la sua impedenza di ingresso è uguale all'impedenza caratteristica Z_0 . Pertanto, nei primi istanti successivi all'applicazione del generatore la tensione all'ingresso della linea è $E_g Z_0 / (\bar{Z}_g + Z_0)$. Questa tensione si propaga come onda lungo la linea e a una distanza x , prima di giungere sul carico, è uguale a:

$$1^a \text{ onda} \quad \frac{E_g Z_0}{\bar{Z}_g + Z_0} e^{-\gamma x} \quad (20)$$

All'istante $t = l/u$ quest'onda raggiunge il carico e viene riflessa con un coefficiente di riflessione \bar{K}_L dato dalla (19); si produce, allora, un'onda riflessa regressiva che si propaga dal carico verso il generatore. Alla distanza x dal generatore, cioè alla distanza $(l-x)$ dal carico la tensione riflessa è espressa dalla relazione:

$$1^a \text{ riflessa} \quad \frac{E_g Z_0}{\bar{Z}_g + Z_0} e^{-\gamma l} \cdot \bar{K}_L \cdot e^{-\gamma(l-x)} \quad (21)$$

Quest'onda raggiunge il generatore all'istante $t = 2l/u$ con un valore ottenuto ponendo $x=0$ nella (21). Una volta raggiunto il generatore tale onda viene riflessa, se \bar{Z}_g è diversa da Z_0 , con un coefficiente di riflessione \bar{K}_g sul generatore dato dalla relazione $\bar{K}_g = (\bar{Z}_g - Z_0) / (\bar{Z}_g + Z_0)$ e si produce una seconda onda diretta che dal generatore si propaga verso il carico. Alla distanza x la tensione dovuta alla seconda onda diretta è:

$$2^a \text{ diretta} \quad \frac{E_g Z_0}{\bar{Z}_g + Z_0} e^{-\gamma l} \cdot \bar{K}_L \cdot e^{-\gamma l} \cdot \bar{K}_g \cdot e^{-\gamma x} \quad (22)$$

Continuando in questo modo si ottiene una serie infinita di riflessioni successive che danno luogo ad un numero infinito di onde dirette e di onde regressive, ciascuna più piccola della precedente, fino a raggiungere la situazione di regime con la tensione risultante ad una distanza x data dalla serie infinita, ma convergente:

$$\bar{V}(x) = \frac{E_g Z_0}{\bar{Z}_g + Z_0} \{ e^{-\gamma x} + \bar{K}_L e^{-2\gamma l} e^{\gamma x} + \bar{K}_L \bar{K}_g e^{-2\gamma l} \cdot e^{-\gamma x} + \dots \} \quad (23)$$

ottenuta sommando le espressioni (20), (21), (22), ecc. La (23) si può riscrivere nella forma:

$$\bar{V}(x) = \frac{E_g Z_0}{\bar{Z}_g + Z_0} \{ (e^{-\gamma x} + \bar{K}_L e^{-2\gamma l} e^{\gamma x}) [1 + \bar{K}_g \bar{K}_L e^{-2\gamma l} + (\bar{K}_g \bar{K}_L e^{-2\gamma l})^2 + \dots] \} \quad (24)$$

L'espressione fra parentesi quadra è una serie geometrica della forma $1 + a + a^2 + \dots$, che converge al valore $1/(1-a)$ per $|a| < 1$. Pertanto, la (24) diventa:

$$\bar{V}(x) = \frac{E_g Z_0}{\bar{Z}_g + Z_0} \frac{1}{1 - \bar{K}_g \bar{K}_L e^{-2\gamma l}} (e^{-\gamma x} + \bar{K}_L e^{-2\gamma l} e^{\gamma x}) \quad (25)$$

che è della forma $Ae^{-\gamma x} + Be^{+\gamma x}$ stabilita nella (6). Si osserva dalla (25) che la forma della distribuzione della tensione lungo la linea è completamente determinata dalla prima onda diretta e dalla prima onda riflessa, cioè dal coefficiente di riflessione \bar{K}_L sul carico, e che l'effetto della serie infinita di riflessioni successive è contenuto nel fattore $(1 - \bar{K}_g \bar{K}_L e^{-2\gamma l})$. Dall'analisi fatta risulta che l'onda diretta complessiva, rappresentata nella (6) dal termine $Ae^{-\gamma x}$, è la risultante di un numero infinito di onde dirette che si propagano dal generatore verso il carico e l'onda riflessa complessiva, data dal termine

$Be^{+\gamma x}$, è la risultante di un numero infinito di onde regressive che si propagano dal carico verso il generatore. Nel caso in cui $\bar{Z}_g = Z_0$, essendo $\bar{K}_g = 0$, non si hanno riflessioni dal lato del generatore e lungo la linea si ha effettivamente una sola onda diretta e una sola onda riflessa espresse, rispettivamente, dalla (20) e dalla (21). Se infine la linea è adattata, cioè $\bar{Z}_L = Z_0$, è $\bar{K}_L = 0$ e si ha soltanto l'onda diretta espressa dalla (20), qualunque sia \bar{Z}_g .

Esprimendo le distanze a partire dal carico, la (25) si riscrive, ponendo $x = l - d$, nella forma più comoda spesso in pratica:

$$\bar{V}(d) = \frac{E_g Z_0 e^{-\gamma l}}{\bar{Z}_g + Z_0} (e^{\gamma d} + \bar{K}_L e^{-\gamma d}) \quad (26)$$

che confrontata con la (17) ci permette di ottenere \bar{V}_L^+ .

Spesso è comodo conoscere le espressioni di $\bar{V}(d)$ e di $\bar{I}(d)$ supposta nota la tensione \bar{V}_L sul carico. Le espressioni sono particolarmente semplici se si suppone la linea priva di perdite; in base alle (17), (18) e (19), con $\gamma = j\beta$, ricordando che $e^{\pm j\beta d} = \cos \beta d \pm j \sin \beta d$ si ottiene, dopo alcuni passaggi:

$$\bar{V}(d) = \bar{V}_L \left(\cos \beta d + j \frac{Z_0}{\bar{Z}_L} \sin \beta d \right) \quad (27)$$

$$\bar{I}(d) = \frac{\bar{V}_L}{\bar{Z}_L} \left(\cos \beta d + j \frac{\bar{Z}_L}{Z_0} \sin \beta d \right) \quad (28)$$

8. Interferenza fra l'onda incidente e l'onda riflessa. Onde stazionarie e rapporto d'onda stazionaria

Si è visto che quando non vi è riflessione dal carico, cioè nel caso di linea adattata, l'ampiezza della tensione e della corrente diminuisce esponenzialmente lungo la linea dal generatore verso il carico o, se la linea è senza perdite, ha un valore costante su tutta la linea. Invece, quando il carico riflette parte dell'energia incidente, cioè quando vi è l'onda riflessa, l'ampiezza della tensione e della corrente varia periodicamente con la distanza lungo la linea a causa dell'interferenza, punto per punto, fra l'onda incidente e l'onda riflessa e la variazione risultante è chiamata onda stazionaria. Vi sono punti lungo la linea in cui l'onda incidente e quella riflessa hanno la stessa fase e, pertanto, in tali punti l'ampiezza della tensione (o della corrente) assume il valore massimo; in altri punti, invece, l'onda incidente e quella riflessa sono in opposizione di fase e, quindi, l'ampiezza risultante ha un valore minimo. Negli altri punti della linea le due onde sono fra loro sfasate di un angolo compreso fra 0° e 180° e l'ampiezza assume valori intermedi fra il massimo e il minimo. Si vedrà fra breve che la distanza fra un punto in cui l'ampiezza è massima e un punto adiacente in cui l'ampiezza è minima è uguale ad un quarto della lunghezza d'onda nella linea e che nei punti in cui la tensione ha l'ampiezza massima, la corrente ha l'ampiezza minima e viceversa.

Il caso estremo si ha quando vi è riflessione totale, cioè quando l'onda riflessa ha l'ampiezza uguale a quella dell'onda incidente. Questo caso si verifica quando la linea è chiusa in corto circuito, oppure è aperta all'estremità ricevente, o quando il carico è una reattanza pura; in queste condizioni, infatti, il modulo del coefficiente di riflessione è

uguale a 1 e, di conseguenza, nei punti di ampiezza massima, supponendo la linea senza perdite, l'ampiezza è doppia di quella che produrrebbe l'onda incidente o l'onda riflessa separatamente, mentre nei punti in cui queste onde si trovano in opposizione di fase la tensione è nulla in ogni istante.

Consideriamo, ad esempio, il caso di una linea senza perdite (in pratica con perdite trascurabili) chiusa in corto circuito. Dalla (19), con $\bar{Z}_L = 0$, si ha $\bar{K}_L = -1$ e le espressioni (17) e (18), con $\gamma = j\beta$, diventano:

$$\bar{V}(d) = j 2 \bar{V}_L^+ \sin \beta d \quad (29)$$

$$\bar{I}(d) = 2 (\bar{V}_L^+ / Z_0) \cos \beta d \quad (30)$$

In figura 11(b) e (c) sono rappresentate le onde incidente e riflessa di tensione e di corrente in un certo istante. La tensione (o la corrente) in ogni punto della linea, che è data dalla somma delle due onde di tensione (o di corrente), varia nel tempo man mano che queste onde si muovono in direzioni opposte lungo la linea stessa. Ad un certo istante t_1 , successivo a quello della situazione in (b), la cresta dell'onda incidente di tensione si trova sul corto circuito all'estremità della linea e le tensioni componenti, incidente e riflessa, hanno lo stesso valore, ma polarità opposta, in ogni punto della linea; pertanto, in questo istante, la tensione risultante è uguale a zero in tutti i punti della linea, come è rappresentato dalla retta coincidente con l'asse delle distanze d e marcata con t_1 in (d). Ad un istante t_2 dopo un quarto di periodo da t_1 , le due onde di tensione si sovrappongono esattamente e la tensione risultante lungo la linea ha, in questo istante, una distribuzione di forma sinusoidale con ampiezza massima uguale al doppio dell'ampiezza di ciascuna onda componente, come è rappresentato in (d) dalla curva marcata con t_2 . All'istante t_3 , dopo un quarto di periodo da t_2 , le due onde di nuovo si cancellano a vicenda in ogni punto e lungo tutta la linea la tensione risulta uguale a zero. Dopo un altro quarto di periodo, all'istante t_4 , le due onde si ritrovano di nuovo sovrapposte e la distribuzione sinusoidale della tensione lungo la linea, marcata con t_4 in (d), ha di nuovo un'ampiezza massima uguale al doppio dell'ampiezza di ciascuna onda componente, ma è di polarità opposta rispetto alla distribuzione che si aveva all'istante t_2 . La distribuzione della tensione lungo la linea, rappresentata nei vari istanti in (d), viene chiamata *onda stazionaria*, in quanto la configurazione risultante non si sposta lungo la linea, ma varia nel senso delle ordinate, come si verifica per la configurazione di una corda vibrante vincolata agli estremi. I punti della linea in cui la tensione è sempre nulla si chiamano *nodi di tensione* o *punti nodali* e i punti in cui la tensione ha la massima ampiezza, situati a metà fra i nodi, sono denominati *antinodi* o *ventri di tensione*. Si osserva dalla figura 11 che la distanza fra un nodo e un ventre adiacenti è uguale ad un quarto di lunghezza d'onda. Ragionamenti analoghi a quelli fatti per la tensione possono farsi per la corrente le cui onde incidente e riflessa sono rappresentate in figura 11(c) in un certo istante, mentre in (e) è rappresentata la configurazione lungo la linea nei vari istanti. Si osserva che i nodi di corrente corrispondono ai ventri di tensione e viceversa e che in ogni punto la tensione e la corrente sono fra loro in quadratura, come può anche dedursi in base alle (29) e (30). La (29) indica che l'ampiezza della tensione varia lungo la linea proporzionalmente al valore assoluto di $\sin \beta d$ e il diagramma dell'ampiezza è costituito da una serie di semisinusoidi, come è rappresentato in figura 12(a). La (30) indica, invece, che l'ampiezza della corrente varia lungo la linea secondo il valore assoluto di $\cos \beta d$, come è indicato dalla curva a tratteggio della stessa figura. In (b) è rappresentata la fase della

tensione e della corrente rispetto alla fase di \bar{V}_L^+ assunta uguale a zero. Si osserva che in tutti i tratti di linea lunghi $\lambda/4$ e di posto dispari a partire dal corto circuito la corrente è in ritardo di 90° sulla tensione a causa dell'operatore j nella (29) e la fase cambia bruscamente di 180° in ciascuno dei punti nodali a causa del cambiamento del segno di $\sin \beta d$ o di $\cos \beta d$.

Il caso duale a quello ora esaminato si ha quando la linea è aperta all'estremità

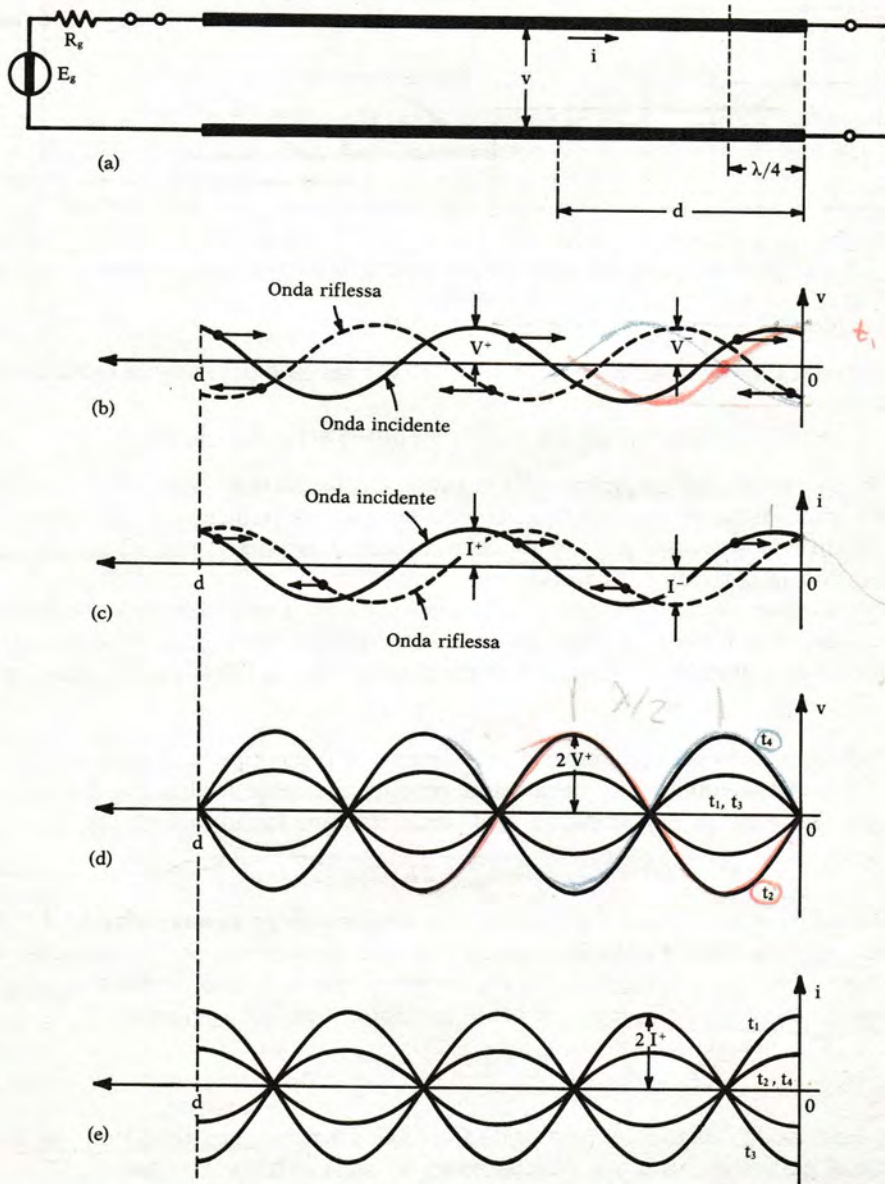


Fig. 11. - Onde incidenti e riflesse di tensione e di corrente e onde stazionarie lungo una linea chiusa in corto circuito.

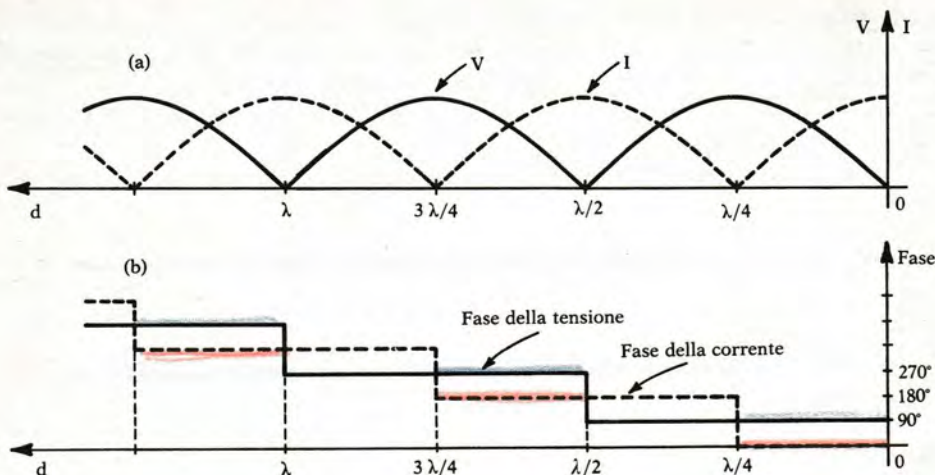


Fig. 12. - Andamento dell'ampiezza e della fase della tensione e della corrente lungo una linea chiusa in corto circuito.

ricevente; con $\bar{Z}_L = \infty$ si ha: $\bar{K}_L = +1$ e le (17) e (18), nel caso di una linea senza perdite, diventano:

$$\bar{V}(d) = 2 \bar{V}_L^+ \cos \beta d \quad \bar{I}(d) = j 2 (\bar{V}_L^+ / Z_0) \sin \beta d$$

Gli andamenti dell'ampiezza della tensione e della corrente sono identici a quelli per una linea chiusa in corto circuito, eccetto per uno spostamento di $\lambda/4$ lungo l'asse delle distanze, mentre gli andamenti delle fasi sono gli stessi, pur di scambiare la tensione con la corrente e viceversa.

Consideriamo ora il caso generale di una linea chiusa su una impedenza di carico \bar{Z}_L qualsiasi. Per trovare la legge di variazione dell'ampiezza della tensione e della corrente lungo la linea è conveniente scrivere il coefficiente di riflessione \bar{K}_L nella forma:

$$\bar{K}_L = K_L e^{j\theta_L} \quad (31)$$

dove K_L è il modulo del coefficiente di riflessione e θ_L il suo angolo. Sostituendo la (31) nella (17) e considerando una linea senza perdite, si ottiene facilmente, dopo alcuni passaggi, l'espressione dell'ampiezza $V(d)$ della tensione lungo la linea. Si ha:

$$V(d) = V_L^+ \sqrt{1 + K_L^2 + 2 K_L \cos(2\beta d - \theta_L)} \quad (32)$$

Dalla (32) si deduce che l'ampiezza della tensione lungo la linea assume il valore massimo V_{\max} , uguale a $V_L^+ (1 + K_L)$, nei punti (ventri di tensione) per cui $\cos(2\beta d - \theta_L) = +1$, cioè per $2\beta d - \theta_L = \pm 2n\pi$, con n intero uguale a 0, 1, 2, ... Le posizioni dei massimi di ampiezza della tensione sono, pertanto, date dalla relazione:

$$d_{(\max)} = \frac{\theta_L \pm 2n\pi}{2\beta} = \frac{\theta_L}{\pi} \frac{\lambda}{4} \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (33)$$

con θ_L espresso in radianti, avendo posto $\beta = 2\pi/\lambda$. La posizione del primo massimo di tensione a partire dal carico si ottiene ponendo nella (33) $n=0$; si ha:

$$d_{(1^\circ \max)} = \frac{\theta_L}{\pi} \frac{\lambda}{4} \quad (34)$$

Sempre dalla (32) si deduce che l'ampiezza minima V_{\min} , uguale a $V_L^+ (1 - K_L)$, si ha nei punti lungo la linea per cui $\cos(2\beta d - \theta_L) = -1$, cioè per $2\beta d - \theta_L = \pm(2n+1)\pi$, con n intero uguale a 0, 1, 2, ... Le posizioni dei minimi di ampiezza sono, quindi, date dalla relazione:

$$d_{(\min)} = \frac{\theta_L \pm (2n+1)\pi}{2\beta} = \frac{\theta_L}{\pi} \frac{\lambda}{4} \pm \left(n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \right) \quad (35)$$

Confrontando la (33) con la (35) si deduce che i massimi e i minimi successivi sono separati da una distanza uguale a $\lambda/4$; la distanza fra due massimi consecutivi e fra due minimi consecutivi è uguale a $\lambda/2$.

Poiché il coefficiente di riflessione di corrente differisce da quello di tensione soltanto nel segno, l'ampiezza della corrente lungo la linea è data da una espressione come la (32) nella quale al posto di V_L^+ va sostituito V_L^+/Z_0 e al posto di K_L va sostituito $-K_L$. Risulta, allora, che i massimi di ampiezza della corrente si hanno nei punti di minimo di tensione e viceversa. Il diagramma che rappresenta l'ampiezza della tensione (o della corrente) lungo la linea è chiamato *diagramma delle onde stazionarie*. Una grandezza che descrive l'entità della variazione dell'ampiezza della tensione (o della corrente) lungo la linea è il *rapporto d'onda stazionaria* (chiamato R.O.S. o S.W.R. = *Standing Wave Ratio*) che indicheremo con ρ e definito come il *rapporto fra l'ampiezza massima e l'ampiezza minima della tensione* (o della corrente) sulla linea; si ha:

$$\rho = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + K_L}{1 - K_L} \quad (36)$$

La (36) mostra che il R.O.S. dipende soltanto dal modulo del coefficiente di riflessione; eseguendo, quindi, una misura del R.O.S. sulla linea (misurando V_{\max} e V_{\min}) è possibile determinare il modulo del coefficiente di riflessione risolvendo la (36) rispetto a K_L ottenendo:

$$K_L = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \quad (37)$$

Misurando poi la distanza del primo massimo di tensione dal carico si può determinare, tramite la (34) l'angolo θ_L e conoscere, quindi, completamente il coefficiente di riflessione sotto forma complessa.

Il valore del R.O.S. varia tra 1 e infinito al variare di K_L fra 0 e 1. Per una linea adattata si ha: $\rho = 1$, mentre nel caso di riflessione totale (linea chiusa in corto circuito o aperta o con carico puramente reattivo) il R.O.S. assume il valore infinito.

In figura 13 sono rappresentati gli andamenti dell'ampiezza e della fase della tensione e della corrente, in funzione della distanza dal carico, nel caso di una linea con perdite trascurabili chiusa su un carico puramente resistivo R_L maggiore di Z_0 e, in particolare, con $R_L = 3Z_0$. In tal caso si ha: $K_L = 0,5$, $\theta_L = 0$ e $\rho = 3$.

Si osserva dalla figura e dalla (34) che, con un carico resistivo maggiore dell'impedenza caratteristica, il primo massimo di tensione si ha sul carico stesso, essendo $\theta_L = 0$; in tal caso è anche facile dedurre che il R.O.S. è dato dal rapporto fra la resistenza di carico e l'impedenza caratteristica ($\text{R.O.S.} = R_L/Z_0$). L'andamento della fase è intermedio fra l'andamento lineare che si ha nel caso di linea adattata e l'andamento a gradinata che si ha nel caso di riflessione totale. Una proprietà molto importante dell'andamento della fase è che, qualunque sia il carico su cui è chiusa la

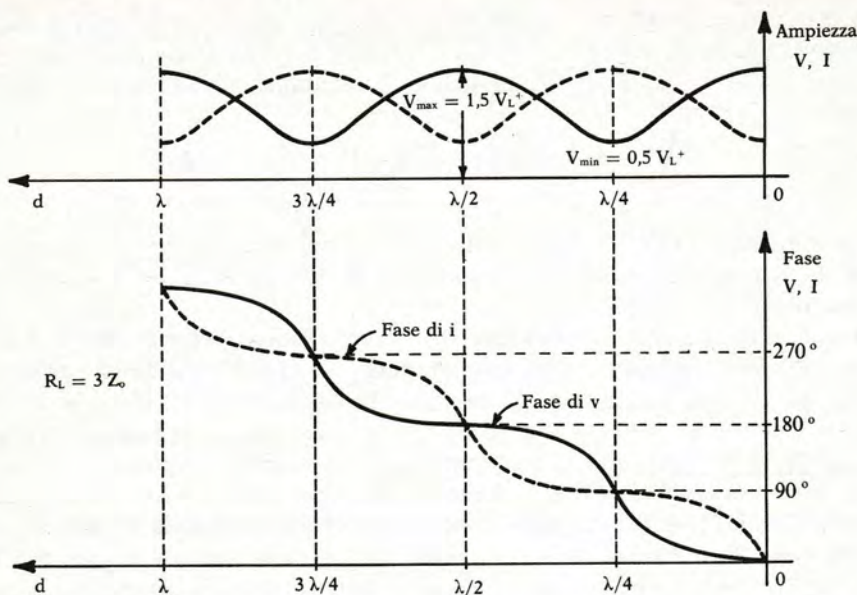


Fig. 13. - Andamenti dell'ampiezza e della fase della tensione e della corrente lungo una linea chiusa su un carico resistivo.

linea, due punti della stessa linea separati da una distanza uguale a mezza lunghezza d'onda hanno tensioni (o correnti) fra loro in opposizione di fase.

Nel caso di una linea chiusa su un carico puramente resistivo di valore inferiore all'impedenza caratteristica si ha $\theta_L = \pi$ rad; in base alla (34) si deduce che il primo massimo dista dal carico di $\lambda/4$ e, quindi, sul carico vi è un minimo di tensione. Si deduce facilmente che, con $R_L < Z_0$, il R.O.S. è dato dal rapporto fra l'impedenza caratteristica e la resistenza di carico (R.O.S. = Z_0/R_L).

In figura 14 è rappresentato il diagramma delle onde stazionarie nel caso generico di impedenza di carico qualunque. Il diagramma è stato tracciato nell'ipotesi di una impedenza di carico tale da dare un coefficiente di riflessione di modulo 0,5, come nella figura 13, e con un angolo $\theta_L = 60^\circ$. Il R.O.S. è allora, come nel caso di figura 13, uguale a 3. Sul carico si ha un valore di ampiezza della tensione e della corrente intermedio fra il valore massimo e quello minimo e la distanza del primo massimo di tensione dal carico, con $\theta_L = 60^\circ = \pi/3$ rad, è uguale a $\lambda/12$. Si osserva che gli andamenti dell'ampiezza in

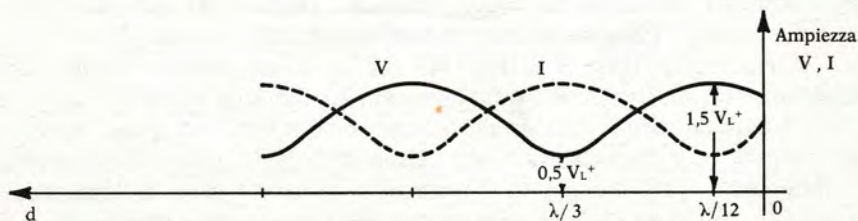


Fig. 14. - Diagramma d'onda stazionaria su una linea con impedenza di carico generico.

figura 14 differiscono da quelli di figura 13 soltanto per uno spostamento di posizione lungo l'asse delle distanze e il motivo è che K_L è lo stesso per entrambe le figure. In generale si può affermare che *la forma del diagramma delle onde stazionarie dipende dal valore del modulo del coefficiente di riflessione, mentre la posizione del diagramma stesso lungo la linea dipende dall'angolo del coefficiente di riflessione.*

Per ottenere l'ampiezza della tensione o della corrente in un punto generico della linea e per tracciare il diagramma delle onde stazionarie, anziché procedere per via analitica usando la relazione (32) per diversi valori di d , in pratica è molto più conveniente usare il metodo grafico mediante la rappresentazione vettoriale delle tensioni (o delle correnti) incidente, riflessa e risultante per ogni dato punto sulla linea. Riferendosi alla (17) e indicando, per comodità, con \bar{V}^+ la quantità $\bar{V}_L^+ e^{-\gamma d}$ e con \bar{V}^- la quantità $\bar{K}_L \bar{V}_L^+ e^{-\gamma d}$, rappresentanti rispettivamente la tensione incidente e la tensione riflessa in un punto generico della linea, si può scrivere: $\bar{V}(d) = \bar{V}^+ + \bar{V}^- = \bar{V}^+ + \bar{K}_L \bar{V}^+$. Si rappresentano, per diversi valori di d , i vettori rappresentativi di \bar{V}^+ e \bar{V}^- ; il vettore risultante dalla somma vettoriale rappresenta con la sua lunghezza e con la sua posizione l'ampiezza e la fase della tensione nel punto considerato. Analogamente si procede per i vettori rappresentativi della corrente, \bar{I}^+ , \bar{I}^- e \bar{I} , tenendo conto che per la corrente il coefficiente di riflessione è $-\bar{K}_L$. Si parte rappresentando la situazione vettoriale sul carico, cioè per $d=0$. Supponendo la linea senza perdite, la situazione vettoriale in un punto generico della linea a distanza d dal carico si ottiene ruotando il

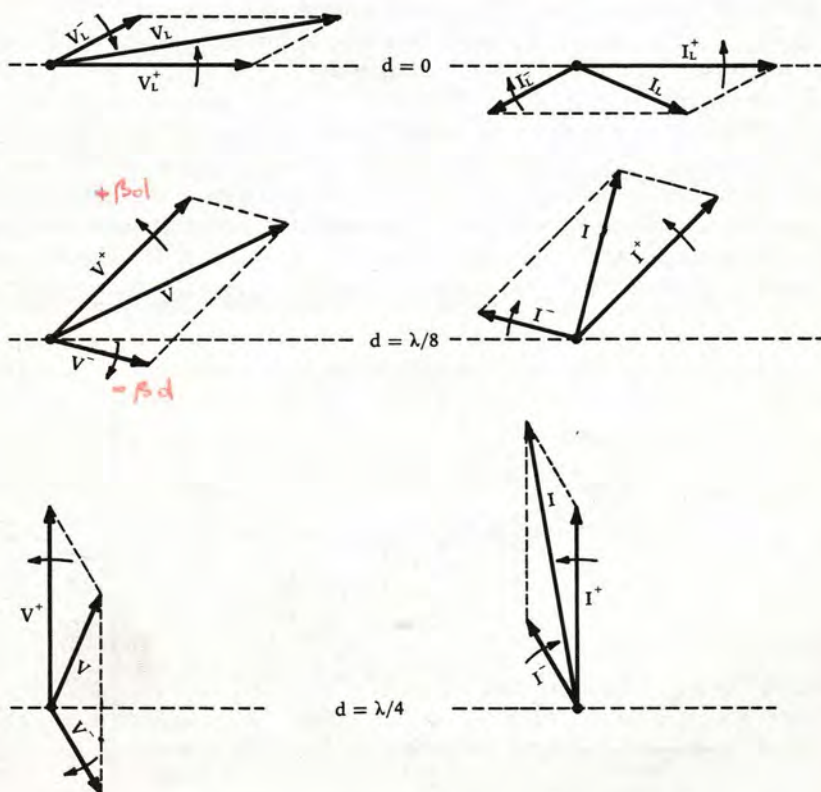


Fig. 15. - Diagrammi vettoriali per tre diversi punti della linea.

vettore \bar{V}_L^+ di un angolo uguale a βd in senso antiorario per ottenere il vettore \bar{V}^+ e ruotando il vettore $\bar{K}_L \bar{V}_L^+$ di un angolo uguale a $-\beta d$, cioè di un angolo βd in senso orario, per ottenere il vettore \bar{V}^- . La costruzione grafica è mostrata in figura 15 per $d=0$, $d=\lambda/8$ e $d=\lambda/4$. I vettori \bar{V}^+ e \bar{V}^- ruotano di 45° per ogni spostamento di $\lambda/8$ lungo la linea e di 360° per ogni spostamento uguale alla lunghezza d'onda, riprendendo la stessa posizione che avevano per $d=0$ alle distanze uguali a λ , 2λ , 3λ , ...

Se le perdite della linea non sono trascurabili occorre tener conto del fattore $e^{\alpha d}$ per il vettore \bar{V}^+ e del fattore $e^{-\alpha d}$ per il vettore \bar{V}^- ; l'ampiezza dell'onda incidente, e quindi la lunghezza del vettore \bar{V}^+ , va aumentando allontanandosi dal carico verso il generatore, mentre l'ampiezza dell'onda riflessa, e quindi la lunghezza del vettore \bar{V}^- , diminuisce. Pertanto, sia i valori massimi sia quelli minimi dell'ampiezza della tensione e della corrente non rimangono costanti lungo la linea, ma tendono ad aumentare man mano che ci si allontana dal carico e i valori massimi e minimi tendono ad avvicinarsi fra loro, come è rappresentato in figura 16. Il rapporto d'onda stazionaria non è più, quindi, una quantità ben definita, ma varia lungo la linea avvicinandosi al valore 1 ad una sufficiente distanza dal carico poiché a tale distanza la tensione (e la corrente) riflessa diventa molto piccola, fino a diventare trascurabile, e la variazione dell'ampiezza tende ad assumere l'andamento esponenziale come nel caso di una linea senza riflessioni, cioè adattata.

Nel caso di una linea con perdite trascurabili, il diagramma delle onde stazionarie può essere determinato più facilmente con un diagramma vettoriale in cui, anziché far ruotare entrambi i vettori \bar{V}^+ e \bar{V}^- al variare della distanza dal carico, come in figura 15, il vettore \bar{V}^+ viene mantenuto fisso, dato che ai fini dell'ampiezza della tensione risultante interessa soltanto la posizione relativa dei due vettori \bar{V}^+ e \bar{V}^- . Affinché la posizione relativa rimanga la stessa di quella che si ha quando entrambi i vettori vengono fatti ruotare, è necessario che, con \bar{V}^+ fisso, il vettore \bar{V}^- ruoti in senso orario di un angolo uguale a $2\beta d$ rispetto alla posizione assunta per $d=0$. Per costruire il diagramma vettoriale, la posizione di \bar{V}^+ , da mantenere fissa, è quella che si ha per $d=0$, cioè quella del vettore \bar{V}_L^+ che viene rappresentato orizzontalmente con una scala arbitraria. Si traccia poi, dalla punta del vettore \bar{V}_L^+ , il vettore $\bar{K}_L \bar{V}_L^+$ (corrispondente a \bar{V}^- per $d=0$) di lunghezza $K_L V_L^+$ e formante un angolo θ_L rispetto all'orizzontale, come

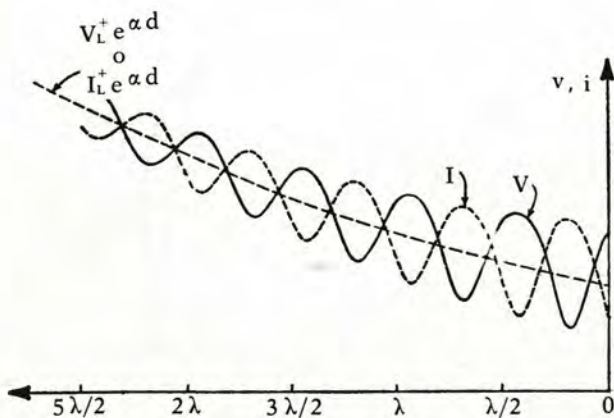


Fig. 16. - Andamento delle ampiezze della tensione e della corrente lungo una linea disadattata con perdite.

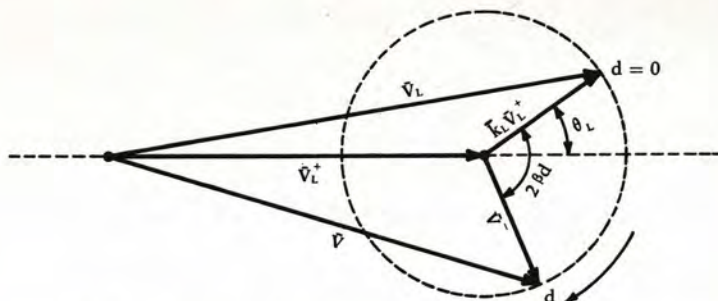


Fig. 17. - Diagramma vettoriale «a manovella» (Crank diagram).

è indicato in figura 17. La lunghezza del vettore risultante dà l'ampiezza della tensione sul carico che, se è inizialmente nota, fissa la scala per l'intero diagramma. Per ottenere l'ampiezza della tensione ad una distanza d si ruota il vettore $\bar{K}_L \bar{V}_L^+$ di un angolo pari a $2\beta d$ in senso orario e si costruisce il vettore risultante la cui lunghezza fornisce l'ampiezza cercata. Si osserva che il vettore ruotante compie una rotazione completa di 360° per ogni spostamento di $\lambda/2$ lungo la linea verso il generatore, ritornando nella posizione che aveva per $d=0$ alle distanze multiple di $\lambda/2$ dal carico. La lunghezza del vettore risultante presenta una variazione ciclica fra il valore minimo $V_L^+(1-K_L)$, quando il vettore ruotante si sovrappone a quello fisso con verso discorde, e il valore massimo $V_L^+(1+K_L)$, che si ha quando il vettore ruotante è allineato e di verso concorde con quello fisso. La distanza dal carico può essere riportata sul diagramma come ascissa curvilinea lungo la circonferenza descritta dalla punta del vettore ruotante. Il diagramma vettoriale di figura 17 prende il nome di «diagramma a manovella» (Crank diagram) per il fatto che il movimento del vettore ruotante visualizza assai bene quello di una manovella.

9. Impedenza in un punto qualunque della linea

L'impedenza in un qualsiasi punto della linea è data dal rapporto $\bar{Z}(d) = \bar{V}(d)/\bar{I}(d)$ fra la tensione e la corrente complessa. Dalle (17) e (18) si ottiene:

$$\bar{Z}(d) = Z_0 \frac{e^{\gamma d} + \bar{K}_L e^{-\gamma d}}{e^{\gamma d} - \bar{K}_L e^{-\gamma d}} \quad (38)$$

Definendo come coefficiente di riflessione di tensione $\bar{K}(d)$ in un punto generico della linea il rapporto \bar{V}^-/\bar{V}^+ fra la tensione riflessa $\bar{V}^- = \bar{K}_L \bar{V}_L^+ e^{-\gamma d}$ e la tensione diretta $\bar{V}^+ = \bar{V}_L^+ e^{\gamma d}$ si ottiene:

$$\bar{K}(d) = \bar{K}_L e^{-2\gamma d} \quad (39)$$

che è la relazione che lega il coefficiente di riflessione in un punto qualunque della linea al coefficiente di riflessione sul carico. In base alla (39), la (38) si può riscrivere nella forma:

$$\bar{Z}(d) = Z_0 \frac{1 + \bar{K}(d)}{1 - \bar{K}(d)} \quad (40)$$

che costituisce la relazione fra il coefficiente di riflessione e l'impedenza in un punto qualunque della linea. Dalla (40) si ha:

$$\bar{K}(d) = \frac{\bar{Z}(d) - Z_0}{\bar{Z}(d) + Z_0} \quad (41)$$

analoga alla (19) valida sul carico.

Per una linea senza perdite, sostituendo nella (38) a \bar{K}_L l'espressione data dalla (19) e ponendo $\gamma = j\beta$, si ottiene:

$$\bar{Z}(d) = Z_0 \frac{\bar{Z}_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + j\bar{Z}_L \tan \beta d} \quad (42)$$

Analogamente si dimostra che l'ammettenza $\bar{Y}(d)$ in un punto generico della linea, data dal rapporto $\bar{I}(d)/\bar{V}(d)$, ha l'espressione:

$$\bar{Y}(d) = Y_0 \frac{\bar{Y}_L + jY_0 \tan \beta d}{Y_0 + j\bar{Y}_L \tan \beta d} \quad (43)$$

in cui $\bar{Y}_L = 1/\bar{Z}_L$ e $Y_0 = 1/Z_0$ sono, rispettivamente, l'ammettenza di carico e l'ammettenza caratteristica della linea.

Per ottenere l'impedenza di ingresso alla linea basta porre nella (42) $d = l$, dove l è la lunghezza della linea.

Dalla (42) si deduce che, essendo $\tan \beta d$ una funzione periodica con periodo uguale a π , anche l'impedenza $\bar{Z}(d)$ è una funzione periodica della distanza d e assume lo stesso valore per ogni spostamento di $\lambda/2$ lungo la linea. Pertanto, a distanze dal carico uguali a multipli interi di $\lambda/2$, l'impedenza ha lo stesso valore dell'impedenza di carico. Considerando una linea di lunghezza $l = \lambda/2$, la sua impedenza di ingresso è uguale all'impedenza di carico, la tensione all'ingresso ha lo stesso valore della tensione sul carico, ma è rispetto a quest'ultima in opposizione di fase. Un tronco di linea lungo $\lambda/2$ può essere, quindi, considerato come un trasformatore con rapporto 1:1 usato solo per ottenere una inversione di fase.

La (38) per una linea senza perdite può anche scriversi nella forma:

$$\bar{Z}(d) = Z_0 \frac{1 + K_L e^{-j(2\beta d - \theta_L)}}{1 - K_L e^{-j(2\beta d - \theta_L)}} \quad (44)$$

dalla quale si deduce che nei punti della linea in cui la tensione ha la massima ampiezza, cioè in cui $(2\beta d - \theta_L) = 2n\pi$, l'impedenza è puramente resistiva, poiché in tali punti gli esponenziali nella (44) assumono il valore 1. Tale impedenza resistiva è l'impedenza massima che si ha sulla linea dato che nei punti di massima ampiezza della tensione l'ampiezza della corrente è minima; si ha:

$$R_{\max} = Z_0 \frac{1 + K_L}{1 - K_L} = \rho Z_0 \quad (45)$$

Analogamente si deduce che anche nei punti della linea in cui la tensione ha ampiezza minima, l'impedenza è puramente resistiva, dato che in tali punti, essendo $(2\beta d - \theta_L) = (2n + 1)\pi$, gli esponenziali nella (44) assumono il valore -1 . Tale impedenza resistiva è l'impedenza minima che si ha sulla linea dato che nei punti di ampiezza

minima della tensione la corrente ha l'ampiezza massima; si ha:

$$R_{\min} = Z_0 \frac{1 - K_L}{1 + K_L} = Z_0 / \rho \quad (46)$$

Dalle (45) e (46) risulta, quindi, $R_{\max} \cdot R_{\min} = Z_0^2$.

Consideriamo alcuni casi particolarmente interessanti:

- a) linea chiusa in cortocircuito: essendo $\bar{Z}_L = 0$ la (42) diventa:

$$\bar{Z}(d) = jZ_0 \tan \beta d$$

L'impedenza in ogni punto è una reattanza pura che varia come $\tan \beta d$; se la linea ha una lunghezza compresa fra 0 e $\lambda/4$ la sua impedenza di ingresso è una reattanza positiva, cioè induttiva, mentre se la sua lunghezza è compresa fra $\lambda/4$ e $\lambda/2$ l'impedenza di ingresso è una reattanza negativa, cioè capacitiva. In figura 18 è rappresentato l'andamento della reattanza in funzione della distanza dall'estremità in corto circuito. In particolare, per $d = \lambda/8$, si ha $\bar{Z}(\lambda/8) = jZ_0$.

- b) linea aperta all'estremità ricevente: essendo $\bar{Z}_L = \infty$, la (42) diventa:

$$\bar{Z}(d) = -jZ_0 / \tan \beta d = -jZ_0 \cot \beta d$$

L'impedenza è una reattanza pura e il comportamento della linea è duale di quello del caso precedente. Se la linea ha una lunghezza minore di $\lambda/4$ la sua impedenza di ingresso è una reattanza capacitiva, mentre se la sua lunghezza è compresa fra $\lambda/4$ e $\lambda/2$ si ha una reattanza induttiva.

- c) linea di lunghezza uguale a $\lambda/4$: l'impedenza di ingresso \bar{Z}_i ottenuta dalla (42) dividendo numeratore e denominatore per $\tan \beta d$ e facendo il limite per

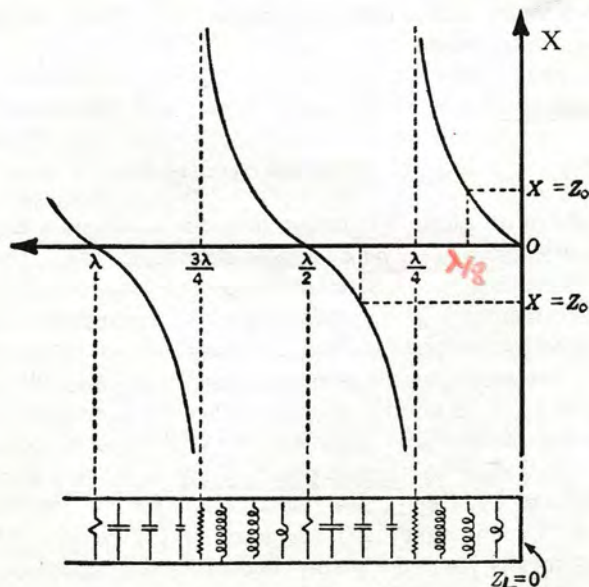


Fig. 18. - Andamento della reattanza lungo una linea chiusa in corto circuito.

$d \rightarrow \lambda/4$ è: $\bar{Z}_i = Z_0^2 / \bar{Z}_L$. Questa espressione indica che una linea lunga $\lambda/4$ trasforma una impedenza di grande valore in un'altra di valore più piccolo e viceversa; se il carico della linea è una resistenza, anche l'impedenza di ingresso alla linea è una resistenza, mentre se il carico è una reattanza induttiva in ingresso si ha una reattanza capacitiva e viceversa. La proprietà espressa dalla relazione $\bar{Z}_i = Z_0^2 / \bar{Z}_L$ rende la linea lunga $\lambda/4$ utile come trasformatore di impedenza e per tale applicazione la linea viene chiamata *trasformatore in quarto d'onda*. Poiché l'impedenza di ingresso non viene modificata aggiungendo tratti di linea di lunghezza multipla di $\lambda/2$ (naturalmente se le perdite sono piccole o nulle), la proprietà espressa dalla precedente relazione è valida anche per linee di lunghezza uguale ad un multiplo dispari di $\lambda/4$.

10. Diagramma circolare di Smith

Tra i diversi problemi che si incontrano nelle linee di trasmissione uno dei più importanti è quello che riguarda la trasformazione che l'impedenza subisce lungo la linea. L'applicazione diretta della (42) comporta in genere difficoltà negli sviluppi analitici data la natura alquanto complicata della relazione stessa e, molto spesso, è più semplice e vantaggioso usare un procedimento consistente nell'applicazione della (19), della (39) e della (40) per ottenere l'impedenza in un punto qualunque della linea, nota l'impedenza di carico o viceversa. La relazione fra il coefficiente di riflessione e l'impedenza in un punto qualunque della linea è di tale importanza nei calcoli sulle linee di trasmissione che, allo scopo di semplificare la risoluzione numerica, sono stati costruiti vari tipi di diagrammi per poter risolvere il problema con metodi grafici. Tali diagrammi rappresentano graficamente le trasformazioni del coefficiente di riflessione e dell'impedenza lungo la linea e sono molto utili agli scopi pratici. Fra i diversi tipi di diagrammi, quello più largamente usato è il *diagramma circolare di Smith*, detto anche semplicemente «*Carta di Smith*».

Consideriamo innanzitutto la trasformazione che subisce il coefficiente di riflessione lungo una linea senza perdite, espressa dalla (39) con $\gamma = j\beta$. Questa relazione può essere posta nella forma:

$$\bar{K}(d) = K_L e^{-j(2\beta d - \theta_L)} = K e^{j\theta} \quad (47)$$

in cui K è il modulo in un punto qualunque della linea, uguale a K_L essendo la linea supposta senza perdite, e $\theta = \theta_L - 2\beta d$ è l'angolo del coefficiente di riflessione. Essendo $\bar{K}(d)$ una quantità complessa, può essere anche espressa nella forma: $\bar{K}(d) = a + jb$, dove a e b sono, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria del coefficiente di riflessione, variabili entrambe lungo la linea. Considerando un piano complesso (fig. 19) con l'asse reale e l'asse immaginario associati, rispettivamente, alla parte reale e alla parte immaginaria di $\bar{K}(d)$, su questo piano il coefficiente di riflessione è rappresentato da un vettore uscente dall'origine degli assi e individuato mediante le coordinate cartesiane a e b , oppure dalle coordinate polari K e θ . Il modulo K non supera mai il valore 1, dato che l'ampiezza dell'onda riflessa è inferiore, o al più uguale, a quella dell'onda incidente. Di conseguenza il diagramma che verrà costruito sul piano complesso è confinato alla parte del piano circoscritta dal cerchio di raggio $K = 1$. È evidente che per esaminare la trasformazione di $\bar{K}(d)$ lungo la linea, data dalla (47), le coordinate polari K e θ nel piano complesso sono molto più appropriate e più comode

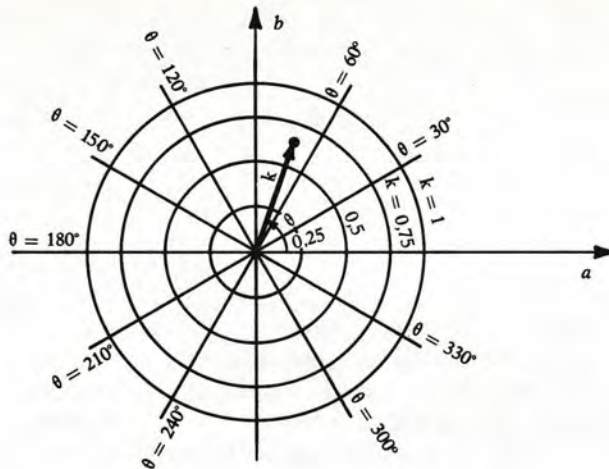


Fig. 19. - Piano complesso del coefficiente di riflessione.

delle coordinate cartesiane a e b . La famiglia di cerchi concentrici con centro nell'origine costituisce l'insieme delle curve $K = \text{costante}$ e, per la (36), anche l'insieme delle curve su ciascuna delle quali è costante il R.O.S. Le curve $\theta = \text{costante}$ costituiscono una famiglia di rette uscenti dall'origine. Individuata sul piano complesso la posizione del vettore $\bar{K}_L = K_L e^{j\theta_L}$, rappresentativo del coefficiente di riflessione sul carico, la trasformazione data dalla (47) corrisponde ad una rotazione di tale vettore di un angolo uguale a $2\beta d$ in senso orario, senza variazione della sua lunghezza. Il vettore così ottenuto rappresenta il coefficiente di riflessione in un punto della linea a distanza d dal carico. Uno spostamento lungo la linea verso il generatore corrisponde ad una rotazione del vettore $\bar{K}(d)$ in senso orario, mentre uno spostamento verso il carico corrisponde ad una rotazione del vettore in senso antiorario. Una rotazione completa di 360° rispetto alla posizione iniziale corrisponde ad uno spostamento lungo la linea uguale a $\lambda/2$. Le curve coordinate polari $K = \text{costante}$ e $\theta = \text{costante}$ sono di forma molto semplice da tracciare e, pertanto, non vengono esplicitamente disegnate sul piano complesso. Su questo piano vengono tracciate due famiglie di curve per rappresentare l'impedenza normalizzata in un punto qualunque della linea.

Per impedenza normalizzata $\bar{z}(d)$ si intende il rapporto fra l'impedenza $\bar{Z}(d)$ e l'impedenza caratteristica Z_0 della linea. Si può scrivere:

$$\bar{z}(d) = \frac{\bar{Z}(d)}{Z_0} = \frac{R}{Z_0} + j \frac{X}{Z_0} = r + jx \quad (48)$$

dove R e X sono le componenti resistiva e reattiva dell'impedenza $\bar{Z}(d)$ e r e x sono le componenti resistiva e reattiva dell'impedenza normalizzata, dette anche resistenza normalizzata e reattanza normalizzata. Una delle due famiglie di curve tracciate sul piano complesso di $\bar{K}(d)$ è costituita dai luoghi sui quali si ha $r = \text{costante}$, mentre l'altra famiglia è l'insieme dei luoghi sui quali si ha $x = \text{costante}$. Per la (48), ponendo $\bar{K}(d) = a + jb$ nella (40), si ha:

$$r + jx = \frac{1 + a + jb}{1 - a - jb} \quad (49)$$

Razionalizzando il denominatore della (49) e uguagliando le parti reali e le parti immaginarie dei due membri si ottengono le seguenti relazioni:

$$\left(a - \frac{r}{1+r}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \quad (50)$$

$$(a-1)^2 + \left(b - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad (51)$$

Supponendo $r = \text{costante}$ e a e b variabili intese come coordinate cartesiane, la (50) è l'equazione di un cerchio con centro sull'asse reale positivo di ascissa $r/(1+r)$ e con raggio uguale a $1/(1+r)$. Pertanto, i luoghi $r = \text{costante}$ sono dei cerchi come è rappresentato in figura 20(a), tutti tangenti alla retta verticale $a=1$ nel punto di intersezione di questa con l'asse reale. Il cerchio corrispondente a $r=1$ passa per l'origine del sistema di coordinate a e b e racchiude tutti i cerchi per i quali è $r > 1$. Il cerchio $r=0$ coincide con il luogo $K=1$ e costituisce il contorno del diagramma. Analogamente, supponendo $x = \text{costante}$, si osserva che anche la (51) è l'equazione di un cerchio con il centro di coordinate $(1, 1/x)$ e di raggio $|1/x|$. Quindi, anche i luoghi $x = \text{costante}$ sono cerchi, di cui interessa soltanto la parte contenuta entro il cerchio $r=0$; questi cerchi sono tangenti all'asse reale nel punto $a=1$ [fig. 20(b)]. I cerchi $x = \text{costante}$ che si trovano nella parte superiore del piano corrispondono a valori di reattanza normalizzata positivi (reattanza induttiva), mentre quelli nella parte inferiore corrispondono a valori di reattanza normalizzata negativi (reattanza capacitiva). Il luogo $x=0$ coincide con l'asse reale poiché il cerchio ha raggio infinito. Il diagramma ottenuto dalla sovrapposizione delle curve di figura 20(a) e (b) è noto come *carta circolare di Smith*. Su di essa si debbono pensare sovrapposti i cerchi concentrici $K = \text{costante}$ e le rette $\theta = \text{costante}$ che, tuttavia, non vengono disegnate per semplicità di rappresentazione.

Dal diagramma di Smith risulta graficamente evidente la relazione fra il coefficiente di riflessione e l'impedenza normalizzata in un punto generico della linea poiché per ogni punto del diagramma, corrispondente ad un punto sulla linea, passa un luogo $K = \text{costante}$ e un luogo $\theta = \text{costante}$, che definiscono il coefficiente di riflessione, e un

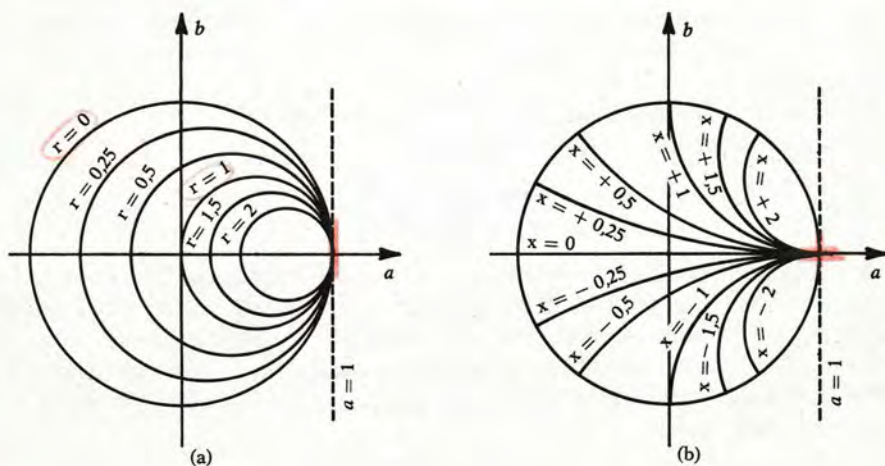


Fig. 20. - Luoghi $r = \text{costante}$ e $x = \text{costante}$ nella carta di Smith.

luogo $r=\text{costante}$ e un luogo $x=\text{costante}$, che determinano l'impedenza normalizzata nel punto corrispondente della linea. Sulla carta di Smith tutti i punti di una linea adattata sono rappresentati dal punto al centro della carta in quanto, con $Z_L = Z_0$, si ha $K=0$ su tutta la linea e, quindi, $r=1$ e $x=0$. Tutti i punti di una linea su cui si ha riflessione totale sono rappresentati da punti sulla carta appartenenti al cerchio più esterno $r=0$, poiché in tal caso si ha $K=1$ su tutta la linea.

Per facilitare l'uso della carta di Smith nella risoluzione dei problemi sulle linee, la carta stessa viene completata rappresentando sul bordo periferico i valori dell'angolo θ e riportando, sempre sul bordo, due scale delle distanze lungo la linea, espresse in termini di lunghezza d'onda, una delle quali viene usata quando lo spostamento avviene verso il generatore e l'altra quando ci si sposta verso il carico. Una carta di Smith completa è rappresentata in figura 21. Per la scala delle distanze sul bordo della carta il punto di origine delle distanze viene fissato arbitrariamente in quanto la scala delle distanze sul bordo della carta è intesa soltanto per indicare la variazione di posizione da un punto ad un altro lungo la linea; l'origine della scala delle distanze nella carta di figura 21 è stata fissata nel punto del bordo per il quale $\theta = 180^\circ$, corrispondente ad un punto sulla linea in cui l'impedenza ha il valore minimo.

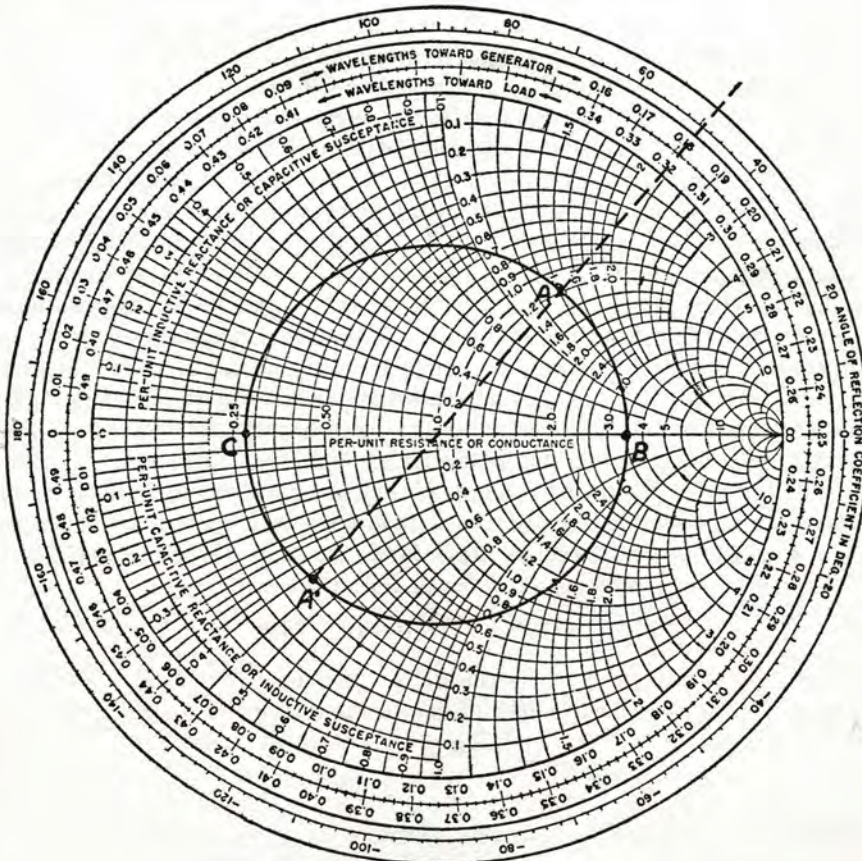


Fig. 21. - Carta di Smith.

Si supponga di avere una linea di impedenza caratteristica $50\ \Omega$ con perdite trascurabili, chiusa su una impedenza di carico $\bar{Z}_L = 60 + j70\ \Omega$ e di lunghezza maggiore di $\lambda/2$. L'impedenza normalizzata di carico è $\bar{z}_L = 1,2 + j1,4$. Sulla carta di Smith si cerca il punto di intersezione del luogo $r = 1,2$ con il luogo $x = 1,4$ e si trova il punto indicato con A in figura 21 che rappresenta il carico. Le coordinate polari di questo punto danno direttamente il modulo K_L e l'angolo θ_L del coefficiente di riflessione sul carico; dalla distanza del punto A dal centro della carta e dalla scala graduata degli angoli sul bordo si trova $K_L = 0,54$ e $\theta_L \cong 50^\circ$.

Spostandosi lungo la linea dal carico verso il generatore, il punto rappresentativo sulla carta si muove, partendo da A , in senso orario lungo il cerchio $K = 0,54$, poiché, come risulta dalla (47), il modulo K rimane costante e uguale a K_L e soltanto l'angolo θ varia con la distanza d dal carico. Dopo uno spostamento lungo la linea corrispondente ad una rotazione di 50° in senso orario, il punto rappresentativo sulla carta si trova sull'asse reale positivo, nel punto B in figura 21. In questo punto si ha $r = r_{\max} = 3,4$ e $x = 0$ e, quindi, nel punto corrispondente sulla linea l'impedenza è puramente resistiva e di valore massimo, uguale a:

$$R_{\max} = r_{\max} \cdot Z_0 = 3,4 \cdot 50 = 170\ \Omega$$

Il punto B è rappresentativo del primo massimo di tensione che si incontra lungo la linea a partire dal carico e si deduce facilmente il R.O.S. sulla linea, essendo in un massimo di tensione: $\rho = R_{\max}/Z_0 = r_{\max}$. Nell'esempio in considerazione si ha $r_{\max} = 3,4$ e, pertanto, sulla linea si ha un R.O.S. uguale a 3,4. In generale, il R.O.S. può essere determinato cercando sulla carta il cerchio $r = \text{costante}$ che risulta tangente, sull'asse reale positivo, al cerchio di raggio K descritto dal punto rappresentativo: il valore di r corrispondente al cerchio così trovato è uguale al R.O.S. sulla linea. Per tutti i punti della linea corrispondenti ai punti sulla carta compresi nell'arco di cerchio da A a B , l'impedenza è una combinazione di una resistenza e di una reattanza induttiva; la resistenza aumenta da $60\ \Omega$ sul carico (punto A) fino a $170\ \Omega$ sul primo massimo di tensione (punto B), mentre la reattanza induttiva sullo stesso tratto di linea diminuisce da $70\ \Omega$ (punto A) fino a zero (punto B). Continuando a percorrere la linea verso il generatore, il punto rappresentativo sulla carta, descrivendo il cerchio di raggio $K = 0,54$, entra nella parte in cui x assume valori negativi; pertanto, in tutti i punti della linea rappresentati sulla carta dai punti del cerchio compresi fra B e C (fig. 21), l'impedenza della linea è una combinazione di una resistenza e di una reattanza capacitiva. Il punto A' , simmetrico e diametralmente opposto ad A rispetto al centro della carta, corrisponde ad una distanza dal carico uguale a un quarto di lunghezza d'onda, avendo percorso, da A ad A' , un arco di cerchio di 180° . In A' si ha: $r = 0,35$ e $x = -0,41$; quindi sul punto corrispondente della linea si ha:

$$\bar{Z} = 0,35 \cdot 50 - j0,41 \cdot 50 = 17,5 - j20,5\ \Omega$$

ed è possibile constatare che è verificata la relazione: $\bar{Z} = Z_0^2/\bar{Z}_L$. Nel punto C l'impedenza è di nuovo resistiva, ma di valore minimo. In C , corrispondente ad un minimo di tensione, si ha $r = r_{\min} \cong 0,3$ e $x = 0$, per cui la resistenza sulla linea è:

$$R_{\min} = r_{\min} \cdot Z_0 = 0,3 \cdot 50 = 15\ \Omega$$

Proseguendo lungo la linea verso il generatore il punto rappresentativo sulla carta entra di nuovo nella regione in cui x è positiva e nei corrispondenti punti sulla linea l'impedenza è di nuovo costituita da una resistenza e da una reattanza induttiva.

Arrivati al punto A si è percorso lungo la linea una distanza uguale a mezza lunghezza d'onda e il valore dell'impedenza in tale punto è la stessa di quella che si ha sul carico.

Circa l'utilizzazione della scala delle distanze sul bordo della carta, possiamo farne uso, ad esempio, per calcolare la distanza del primo massimo di tensione dal carico, corrispondente al punto B in figura 21. Tracciando una retta per il centro della carta passante per il punto A fino ad intersecare la scala delle distanze verso il generatore, si legge che il punto A è caratterizzato da una distanza uguale a $0,182 \lambda$ a partire dall'origine della scala; la retta per l'origine e passante per B incontra la scala delle distanze nel punto che dista di $0,25 \lambda$ rispetto alla stessa origine. La distanza lungo la linea dei punti corrispondenti ad A e B , e quindi la distanza del primo massimo di tensione dal carico, è allora: $0,25 \lambda - 0,182 \lambda = 0,068 \lambda$. 285

La carta di Smith può essere anche usata per la risoluzione di problemi su una linea con perdite. A tale scopo occorre ricordare che, in una linea con perdite, non soltanto l'angolo θ , ma anche il modulo K del coefficiente di riflessione è funzione della posizione lungo la linea secondo il fattore $e^{-2\alpha d}$. Tutti i procedimenti eseguiti sulla carta di Smith per una linea senza perdite possono essere applicati ad una linea con perdite con una sola variante: per determinare il coefficiente di riflessione in un punto della linea rispetto a quello in un altro punto, il punto rappresentativo sulla carta deve essere mosso non più lungo un cerchio di raggio costante, ma lungo una spirale. Il raggio della spirale varia secondo il fattore $e^{-2\alpha d}$ e diminuisce per una rotazione in senso orario, corrispondente sulla linea ad uno spostamento verso il generatore: sul carico il punto rappresentativo ha coordinate polari date da K_L e θ_L , mentre ad una distanza d dal carico le coordinate polari del punto rappresentativo sono $K_L e^{-2\alpha d}$ e $\theta_L - 2\beta d$. linea con perdite

Frequentemente nei problemi sulle linee di trasmissione si richiede di passare dal valore dell'impedenza a quello dell'ammettenza nello stesso punto della linea; questa operazione consiste nel calcolare il reciproco di un dato numero complesso e può essere eseguita immediatamente con la carta di Smith. Localizzato il punto rappresentativo dell'impedenza normalizzata, si cerca il punto diametralmente opposto e simmetrico rispetto al centro della carta: il punto così trovato determina l'ammettenza normalizzata se si interpretano i cerchi della carta non più come cerchi $r = \text{costante}$ e $x = \text{costante}$, ma come cerchi $g = \text{costante}$ e $b = \text{costante}$, dove g e b sono le componenti dell'ammettenza normalizzata, cioè la conduttanza normalizzata e la suscettanza normalizzata. Per ottenere l'ammettenza \bar{Y} si moltiplica l'ammettenza normalizzata così trovata per l'ammettenza caratteristica $Y_0 = 1/Z_0$.

La proprietà ora espressa è dovuta alla considerazione che la carta di Smith, oltre ad essere una rappresentazione grafica della relazione esistente fra l'impedenza normalizzata \bar{z} e il coefficiente di riflessione \bar{K} , è anche una rappresentazione grafica della identica relazione che esiste fra l'ammettenza normalizzata $\bar{y} = 1/\bar{z}$ e $-\bar{K}$.

11. Adattamento di impedenza in una linea

Il trasferimento di potenza da un generatore ad un carico attraverso una linea di trasmissione dipende dalle impedenze alle due estremità della linea. All'estremità del generatore, l'impedenza di ingresso della linea influisce sulla potenza erogata dal generatore e, spesso, sulla sua stabilità in frequenza, mentre all'estremità del carico l'impedenza di quest'ultimo determina il R.O.S. sulla linea. Oltre allo scopo di ottenere la massima potenza sul carico, vi sono altri motivi per giustificare la necessità

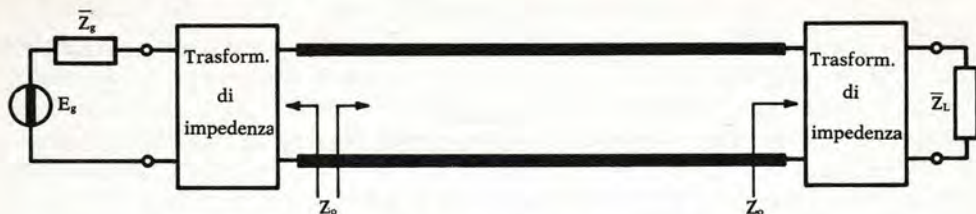


Fig. 22. - Adattamento di una linea con trasformatori di impedenza.

dell'adattamento di impedenza in una linea di trasmissione. Una linea adattata ha un R.O.S. uguale a 1 e trasporta una data potenza con un valore di picco della tensione più basso di quello che si avrebbe se la linea non fosse adattata; di conseguenza vi è meno pericolo di scariche fra i conduttori della linea per grandi valori di potenza. Inoltre il rendimento o efficienza di trasmissione, cioè il rapporto $\eta = P_L/P_i$ fra la potenza sul carico e la potenza di ingresso alla linea, è più grande quando la linea è adattata ed è uguale a: $\eta_0 = e^{-2\alpha l}$. Per una linea non adattata si ha un rendimento minore e uguale a:

$$\eta = \eta_0 (1 - K_L^2) / (1 - \eta_0^2 K_L^2)$$

Infine, in una linea adattata l'impedenza di ingresso rimane al valore Z_0 quando la frequenza cambia. Una linea non adattata e lunga diverse lunghezze d'onda è molto sensibile alla frequenza se l'onda riflessa è grande, poiché la fase dell'onda riflessa che arriva all'estremità del generatore varia rapidamente con la frequenza. Se la lunghezza della linea contiene N lunghezze d'onda si può scrivere: $l = N\lambda = Nu/f$, cioè $N = (l/u)f$. Se la frequenza varia di una quantità Δf , il numero di lunghezze d'onda contenute lungo la linea varia di $\Delta N = (l/u)\Delta f$, quindi, si ha: $\Delta N = N\Delta f/f$. Se la linea è molto lunga rispetto alla lunghezza d'onda N è grande e ΔN può essere uguale ad una notevole frazione della lunghezza d'onda, anche se la variazione relativa $\Delta f/f$ della frequenza è piccola. Ad esempio, se la linea è lunga 250 lunghezze d'onda, una variazione della frequenza di una parte su mille dà: $\Delta N = 250 \cdot 0,001 = 0,25$, cioè la lunghezza della linea misurata in lunghezze d'onda varia di un quarto di lunghezza d'onda e, di conseguenza, l'impedenza di ingresso della linea subisce una variazione notevole, a meno che il R.O.S. non sia molto vicino a 1.

Di solito vengono impiegati due dispositivi di adattamento, detti trasformatori di impedenza, ciascuno connesso ad una estremità della linea, come è indicato in figura 22, allo scopo di ottenere le desiderate relazioni di impedenza. Il trasformatore di impedenza posto fra la linea e il carico permette di regolare il R.O.S. sulla linea al valore unitario, indipendentemente dal valore dell'impedenza di carico. L'altro trasformatore, posto fra il generatore e la linea, permette di adattare l'impedenza di ingresso della linea all'impedenza interna del generatore.

Adattamento di impedenza con trasformatore in quarto d'onda

Si è visto che un tratto di linea lungo $\lambda/4$ trasforma una impedenza \bar{Z}_L in una impedenza di valore Z_0^2/\bar{Z}_L . Se l'impedenza di carico è una resistenza R_L , anche l'impedenza di ingresso del tratto di linea a $\lambda/4$ è una resistenza data da $R_i = Z_0^2/R_L$. Con un carico resistivo è possibile, pertanto, utilizzare un tratto di linea lungo $\lambda/4$ e di

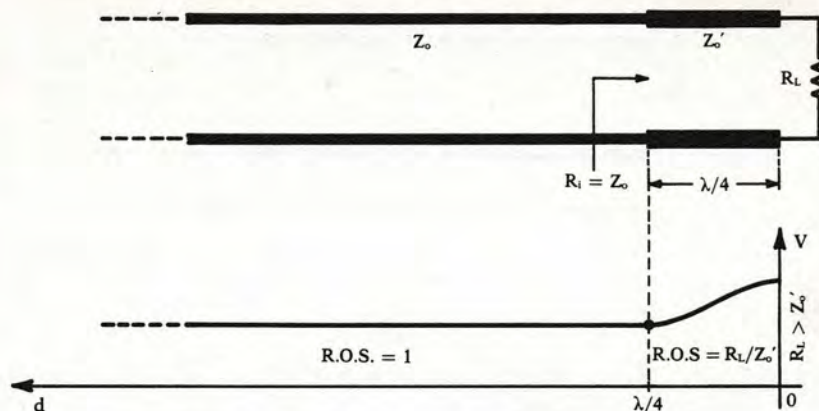


Fig. 23. - Adattamento di una linea mediante trasformatore in quarto d'onda e diagramma d'onda stazionaria risultante.

opportuna impedenza caratteristica Z'_0 per adattare la linea di trasmissione di impedenza caratteristica Z_0 al carico R_L , inserendo il tratto a $\lambda/4$ fra l'estremità della linea e il carico, come è rappresentato in figura 23.

Per avere l'adattamento, l'impedenza caratteristica Z'_0 del tratto adattatore deve essere tale che la sua resistenza di ingresso R_i sia uguale all'impedenza caratteristica Z_0 della linea principale, cioè $R_i = Z_0^2/R_L = Z_0$; si ottiene, quindi, $Z'_0 = \sqrt{Z_0 R_L}$. L'impedenza caratteristica del trasformatore in quarto d'onda deve, dunque, essere uguale alla media geometrica fra la resistenza del carico e l'impedenza caratteristica della linea principale. Nel caso di linea bifilare il tratto adattatore può essere costruito con conduttori aventi diametro diverso o spaziatura diversa rispetto a quelli della linea principale. Per una linea coassiale sono comunemente usati manicotti conduttori montati strettamente vicini o al conduttore centrale o a quello esterno della linea coassiale per un tratto lungo $\lambda/4$, come è rappresentato in figura 24. Tale disposizione si può, ovviamente, usare soltanto quando l'impedenza caratteristica Z'_0 del tratto adattatore risulta più piccola di quella della linea, cioè nel caso in cui $R_L < Z_0$.

Se il carico, anziché essere puramente resistivo, è una generica impedenza, l'adattamento si può ottenere inserendo un breve tratto d' della linea principale, di impedenza caratteristica Z_0 , fra il trasformatore in quarto d'onda e il carico, come è rappresentato in figura 25. La lunghezza d' di questo tratto deve essere tale che alla distanza d' dal carico, cioè all'estremità a destra del tratto adattatore a $\lambda/4$, si abbia una impedenza puramente resistiva R e, quindi, vi sia o un minimo o un massimo di tensione.



Fig. 24. - Tronchi adattatori in quarto d'onda nelle linee coassiali.

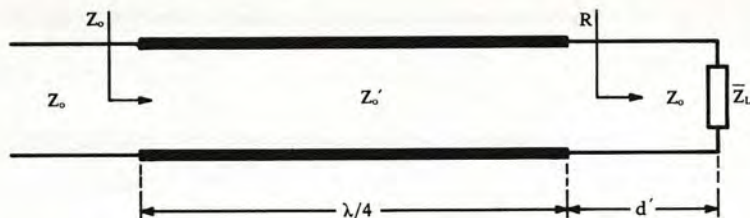


Fig. 25. - Adattamento con trasformatore in quarto d'onda nel caso in cui il carico sia una impedenza generica.

Nel primo caso è $R = R_{\min} = Z_0/\rho$, dove il R.O.S. è quello sul tratto di lunghezza d' e si ha: $Z'_0 = \sqrt{Z_0 R_{\min}} < Z_0$. Nell'altro caso, cioè scegliendo d' in modo da avere a tale distanza dal carico un massimo di tensione, è $R = R_{\max} = \rho Z_0$ e si ha: $Z'_0 = \sqrt{Z_0 R_{\max}} > Z_0$.

Delle due possibilità, la scelta viene fatta in base a considerazioni pratiche.

Il semplice trasformatore in quarto d'onda ha lo svantaggio di essere sensibile alle variazioni di frequenza, poiché ad un'altra frequenza, e quindi, ad una nuova lunghezza d'onda, la lunghezza del trasformatore non è più uguale a $\lambda/4$ e, perciò, non vi è più adattamento. In alcune applicazioni la frequenza è confinata entro una stretta banda e, pertanto, la sensibilità in frequenza non costituisce un grande svantaggio. In altre applicazioni, invece, può essere richiesto il funzionamento entro una larga banda di frequenze. In tal caso è possibile rendere la transizione da un livello di impedenza ad un altro meno sensibile alle variazioni della frequenza se tale transizione viene fatta in due o più stadi successivi. In figura 26 è mostrato un trasformatore di impedenza a due sezioni, ciascuna di lunghezza $\lambda/4$, ma di diversa impedenza caratteristica, uguale a Z'_0 e Z''_0 . La transizione fra la resistenza di carico R_L e la resistenza di ingresso del trasformatore, che deve essere uguale a Z_0 per realizzare l'adattamento, avviene in due salti successivi. Si può dimostrare che, con un trasformatore a due sezioni, i migliori risultati si hanno scegliendo le impedenze caratteristiche Z'_0 e Z''_0 delle due sezioni in quarto d'onda in modo da soddisfare la condizione:

$$(Z_0/Z'_0)^2 = Z'_0/Z''_0 = (Z'_0/R_L)^2$$

Questa scelta è tale da rendere l'impedenza nel punto di giunzione fra le due sezioni a $\lambda/4$ uguale a $\sqrt{Z_0 R_L}$, che è il valore che dovrebbe essere scelto per l'impedenza caratteristica di una singola sezione adattatrice. Se si usano più sezioni a $\lambda/4$ successive,

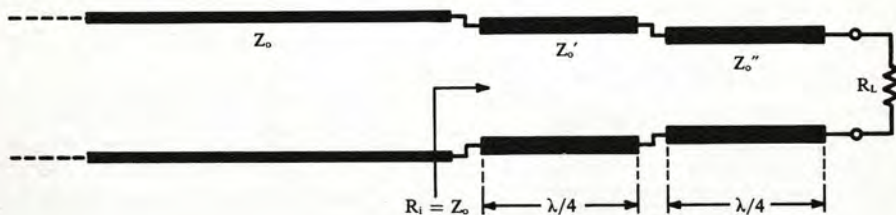


Fig. 26. - Adattamento con trasformatori in quarto d'onda in cascata.

la sensibilità in frequenza del trasformatore adattatore risultante viene ulteriormente ridotta.

Adattamento di impedenza con stub

Uno *stub* (coda) consiste in un breve tratto di linea di lunghezza regolabile generalmente chiuso in corto circuito ad una estremità e collegato in parallelo alla linea principale ad una opportuna distanza dal carico, come è rappresentato in figura 27. Per il calcolo della lunghezza dello *stub* e della distanza dal carico a cui va inserito, allo scopo di eliminare l'onda riflessa sulla linea principale fra lo *stub* e il generatore, conviene usare le ammettenze invece delle impedenze, essendo lo *stub* connesso in parallelo alla linea. Sia \bar{Y}_1 l'ammettenza di ingresso del tratto di linea a destra dello *stub* e \bar{Y}_2 l'ammettenza di ingresso dello *stub*. Per avere l'adattamento di impedenza della linea, l'ammettenza nel punto di connessione dello *stub*, data da $(\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2)$, deve essere uguale alla conduttanza caratteristica della linea $Y_0 = G_0$. A tale scopo occorre inserire lo *stub* in un punto a distanza d' dal carico in cui la conduttanza di \bar{Y}_1 sia uguale a G_0 e regolare la lunghezza dello *stub* in modo che la suscettanza totale della somma $(\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2)$ sia uguale a zero. La regolazione della lunghezza dello *stub* non altera il valore della conduttanza poiché l'ammettenza di ingresso \bar{Y}_2 dello *stub* è una pura suscettanza e la sua lunghezza è abbastanza corta da poter trascurare le perdite. Alla distanza d' si ha: $\bar{Y}_1 = G_0 + jB$, dove B è una suscettanza che viene cancellata dallo *stub* regolando la sua lunghezza in modo che la sua ammettenza di ingresso sia $-jB$. L'ammettenza totale $\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$ è allora: $G_0 + jB - jB = G_0$ e, quindi, la linea è adattata in quanto vede un carico di resistenza $1/G_0$, uguale alla sua impedenza caratteristica.

Il calcolo della distanza d' a cui porre lo *stub* può essere fatto in modo molto semplice e conveniente usando la carta di Smith. Si supponga, ad esempio, che l'ammettenza di carico \bar{Y}_L sia uguale a $0,0425 + j0,0175$ Siemens e che la linea abbia una

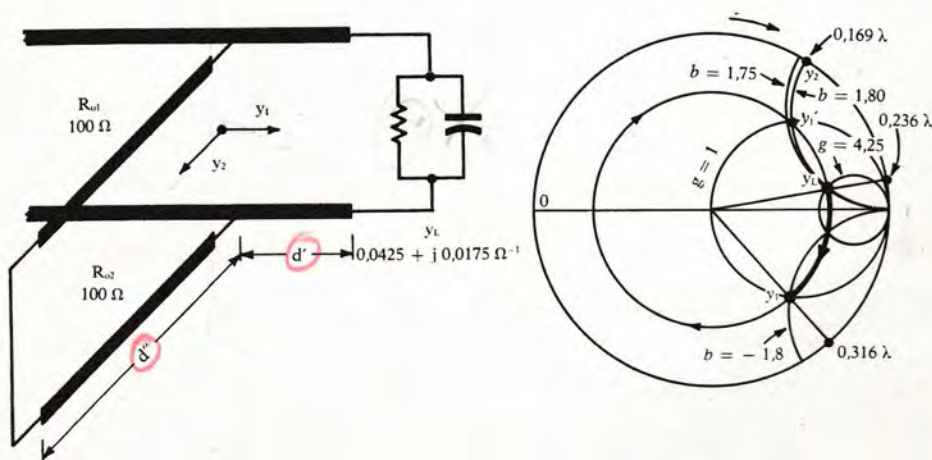


Fig. 27. - Adattamento di una linea mediante *stub* in parallelo.

impedenza caratteristica di 100Ω . L'ammettenza normalizzata del carico \bar{y}_L , è:

$$\bar{y}_L = \bar{Y}_L / Y_0 = \bar{Y}_L Z_0 = 4,25 + j 1,75$$

Dopo aver localizzato sulla carta di Smith il punto rappresentativo di \bar{y}_L , corrispondente sulla scala delle distanze della carta a $0,236 \lambda$, si esegue una rotazione in senso orario sul cerchio $K = \text{costante}$ passante per il punto rappresentativo di \bar{y}_L , fino ad incontrare il cerchio $g=1$. Nel punto così trovato su tale cerchio l'ammettenza normalizzata è $\bar{y}_1 = 1 - j 1,80$, corrispondente a $\bar{Y}_1 = 0,01 - j 0,018$ Siemens sulla linea. Poiché \bar{y}_1 corrisponde a $0,316 \lambda$ sulla scala delle distanze sulla carta, lo *stub* deve essere posto ad una distanza $d' = 0,316 \lambda - 0,236 \lambda = 0,08 \lambda$. Il valore dell'ammettenza d'ingresso dello *stub* che rende la suscettanza totale di $\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$ uguale a zero è, quindi: $\bar{Y}_2 = +j 0,018$ Siemens e il valore normalizzato è: $\bar{y}_2 = +j 1,80$. La lunghezza dello *stub* d'' , essendo questo con un'estremità in cortocircuito, può essere calcolata con la formula $1/\bar{y}_2 = j \tan \beta d''$ oppure direttamente dalla carta di Smith osservando che $\bar{y}_2 = +j 1,80$ corrisponde a $0,169 \lambda$ sulla scala delle distanze della carta; pertanto la lunghezza dello *stub* è: $d'' = 0,169 \lambda + 0,25 \lambda = 0,419 \lambda$.