



**POLITECNICO DI MILANO**

**2° Laboratorio**

**Fondamenti di Automatica**

**SCILAB e SCICOS**

**Simulazione dei Sistemi Lineari**

**Sistemi del 1° ordine**

**Sistemi del 2° ordine**

**Giovanni Vannozzi --- anno accademico 2010-2011**

# Sistemi Lineari - Considerazioni (1)

Rappresentazione cartesiana dei poli e degli zeri della **FUNZIONE** di **TRASFERIMENTO**  $G(s)$  di un sistema dinamico LTI.

La mappa dei poli e degli zeri di un sistema dinamico, di cui è fornita la sua **FUNZIONE** di **TRASFERIMENTO**  $G(s)$  o la sua rappresentazione nello Spazio di Stato, è ottenuta mediante l'istruzione seguente:


-->**plzr(GSS)** (GSS = sistema espresso nello Spazio di Stato)

-->**plzr(GTF)** (GTF = sistema dato con Funzione di Trasferimento)

Come primo esempio si propone il listato seguente:

-->**s=poly(0,'s');**

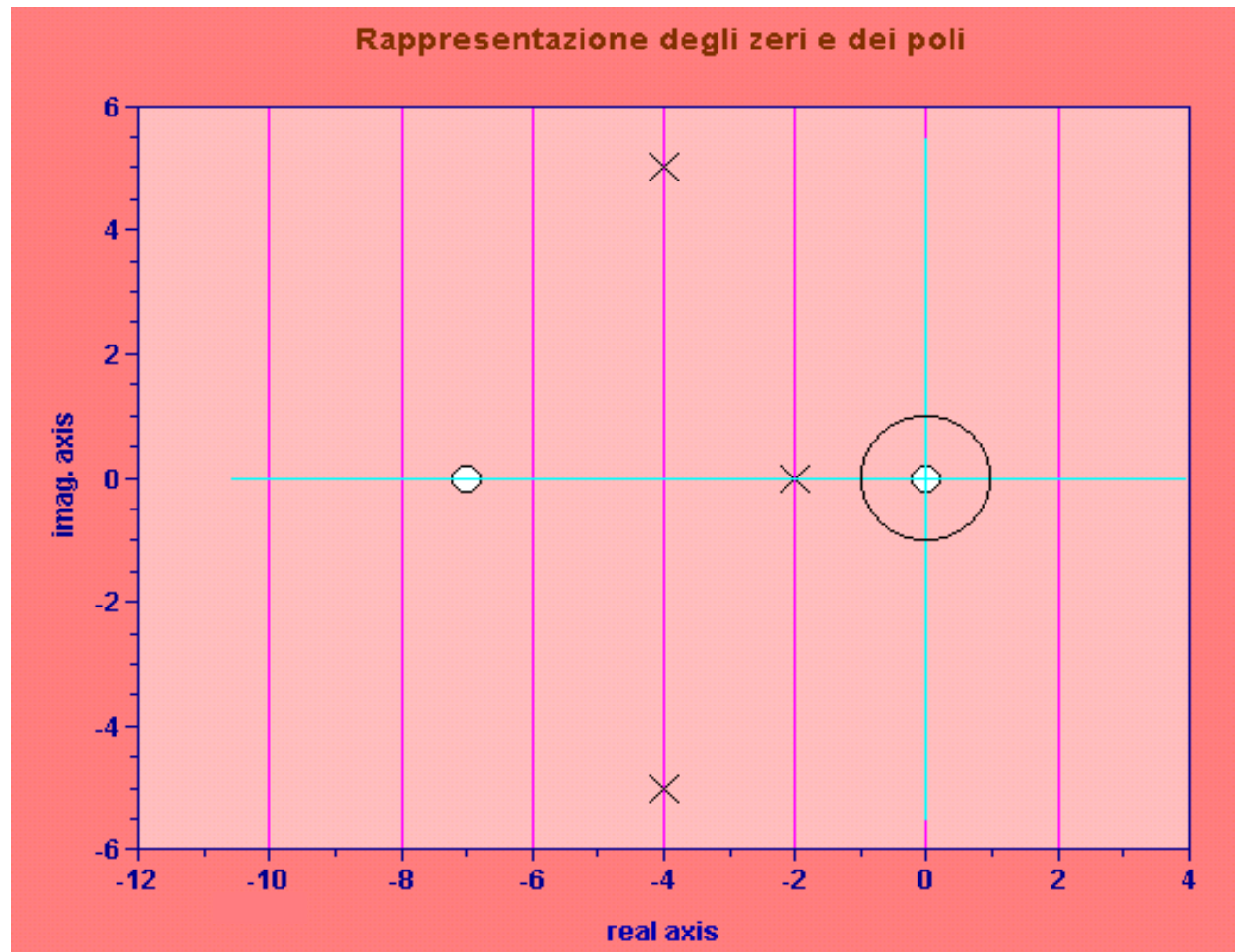
-->**GTF=syslin('c',s\*(7+s),(2+s)\*(41+8\*s+s^2));**


$$G(s) = \frac{s \cdot (s + 7)}{(s + 2) \cdot (s^2 + 8s + 41)}$$

-->**plzr(GTF)** (consente di ottenere la seguente mappa poli-zeri)

# Sistemi Lineari - Considerazioni (2)

Rappresentazione cartesiana dei poli e degli zeri della **FUNZIONE** di **TRASFERIMENTO**  $G(s)$  di un sistema dinamico LTI.



**o = zeri**

$$z_1 = 0$$
$$z_2 = -7$$

**x = poli**

$$p_1 = -2$$
$$p_2 = -4 + j5$$
$$p_3 = -4 - j5$$

# Sistemi Lineari - Considerazioni (3)

Rappresentazione cartesiana dei poli e degli zeri della **FUNZIONE** di **TRASFERIMENTO**  $G(s)$  di un sistema dinamico LTI.

Come secondo esempio si propone il listato seguente:


--> $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix};$

--> $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; D = 0;$

--> $GSS = \text{syslin}('c', A, B, C, D);$

Alla rappresentazione GSS definita nello Spazio di Stato corrisponde la Funzione di Trasferimento GTF, che si ottiene con l'istruzione:

--> $GTF = \text{ss2tf}(GSS)$

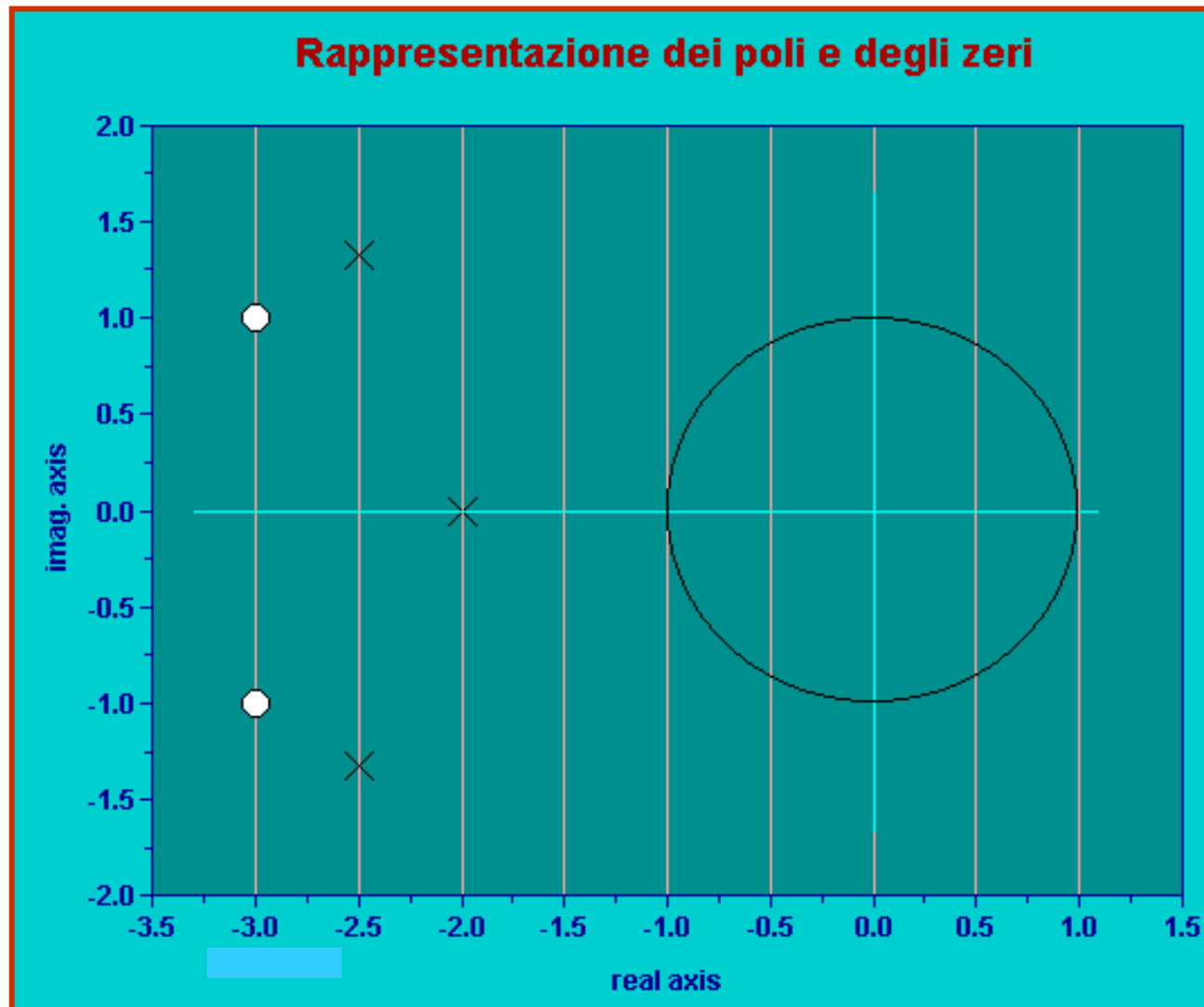

$$G(s) = \frac{10 + 6s + s^2}{16 + 18s + 7s^2 + s^3}$$

--> $\text{plzr}(GSS)$

(consente di ottenere la seguente mappa poli-zeri)

# Sistemi Lineari - Considerazioni (4)

Rappresentazione cartesiana dei poli e degli zeri del Sistema dinamico LTI espresso nello Spazio di Stato ed individuato dalla struttura GSS.



o = zeri

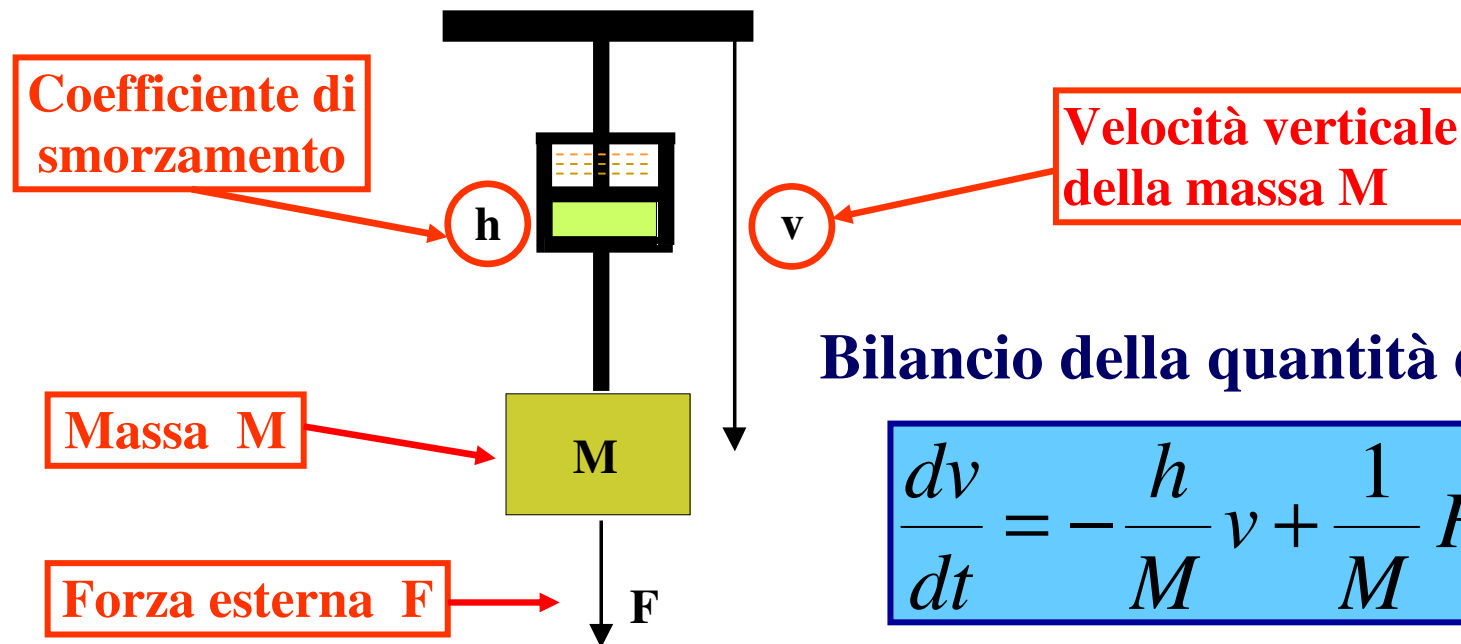
$$z_1 = -3-j$$
$$z_2 = -3+j$$

x = poli

$$p_1 = -2$$
$$p_2 = -2,5-j1,323$$
$$p_3 = -2,5+j1,323$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (1)

Sistema massa-ammortizzatore o massa-smorzatore viscoso

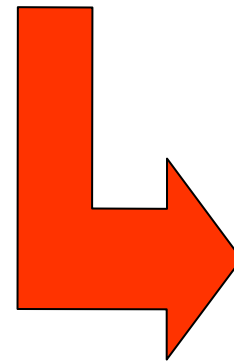


Bilancio della quantità di moto:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{h}{M}v + \frac{1}{M}F$$

$$x = v, \quad u = F$$

$$a = -\frac{h}{M}, \quad b = \frac{1}{M}$$



$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = ax + bu$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (2)

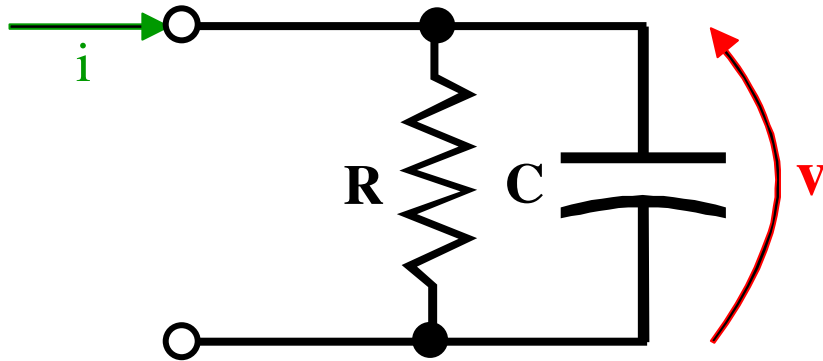
La medesima **equazione** può rappresentare **fenomeni fisici** molto **diversi**, afferenti cioè a differenti **ambiti disciplinari**, tra i quali:

- **carica e scarica di un circuito RC;**
- **sistema massa-ammortizzatore;**
- **dinamica di livello di un serbatoio;**
- **riscaldamento di un corpo;**

Vediamo brevemente le **caratteristiche** di tali **esempi**.

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (3)

## Carica di un condensatore con rete RC parallelo



Bilancio di corrente:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{RC}v + \frac{1}{C}i$$

$$x = v$$

$$u = i$$

$$a = -\frac{1}{RC}, \quad b = \frac{1}{C}$$

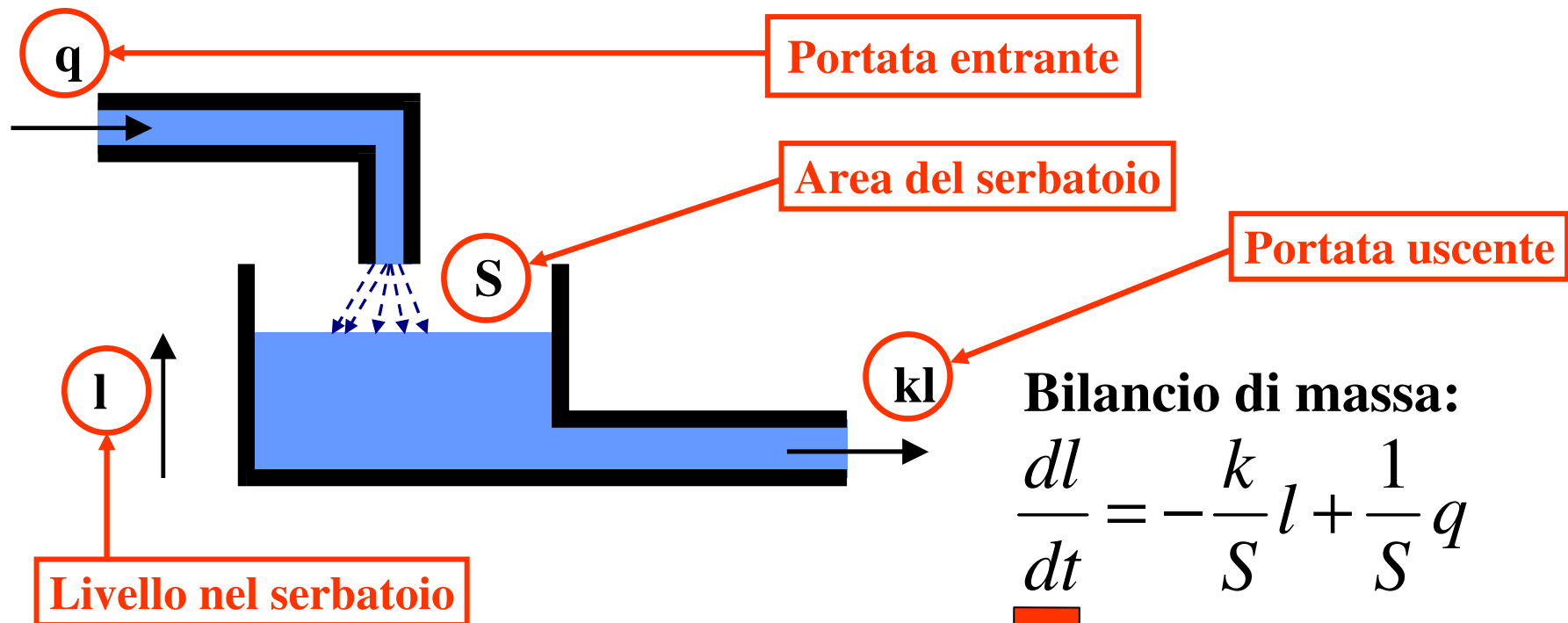


$$\frac{dx}{dt} = ax + bu$$



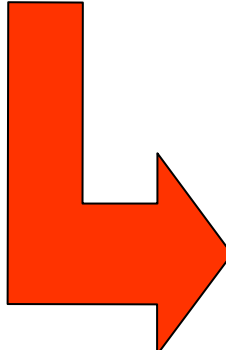
# Sistemi Lineari del 1° Ordine (4)

## Dinamica del livello di un serbatoio



$$x = l, \quad u = q$$

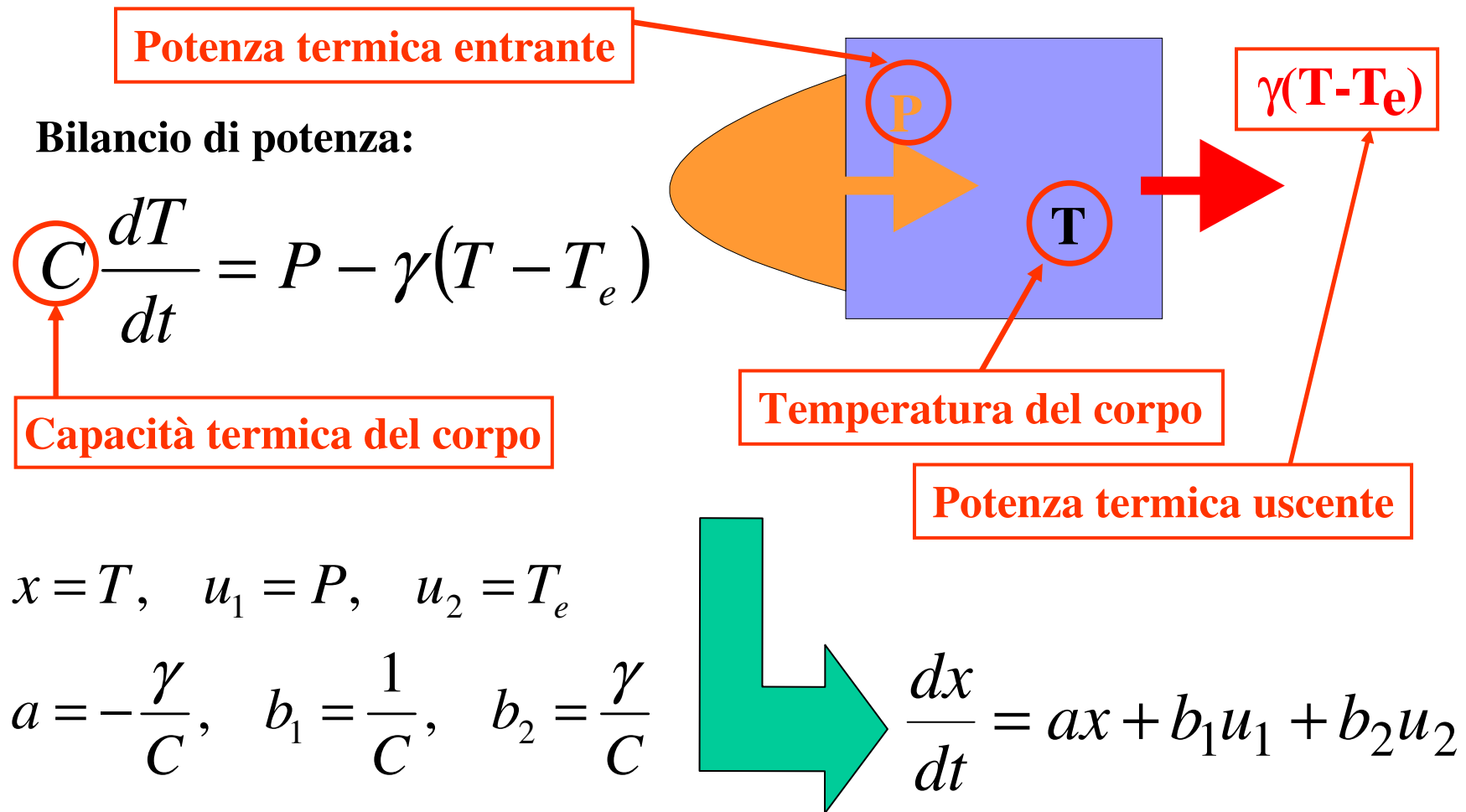
$$a = -\frac{k}{S}, \quad b = \frac{1}{S}$$


$$\frac{dx}{dt} = ax + bu$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine

(5)

## Riscaldamento di un corpo



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (6)

## Studio nello Spazio degli Stati

Si consideri il **sistema** del **primo ordine**:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = ax + bu, \quad x(0) = x_0$$
$$y = cx + du$$

Posto **b=1**, **c=1** e **d=0**, *sistema strettamente proprio*, si desidera **verificare** con **Scilab** che **x = -bu/a** è un **equilibrio** scegliendo **a = ± 2**, **u =1**. Siano, inoltre, **x<sub>0</sub>=0**, **x<sub>0</sub>=-1** ed **x<sub>0</sub>=+1** tre diverse **condizioni iniziali**.

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (7)

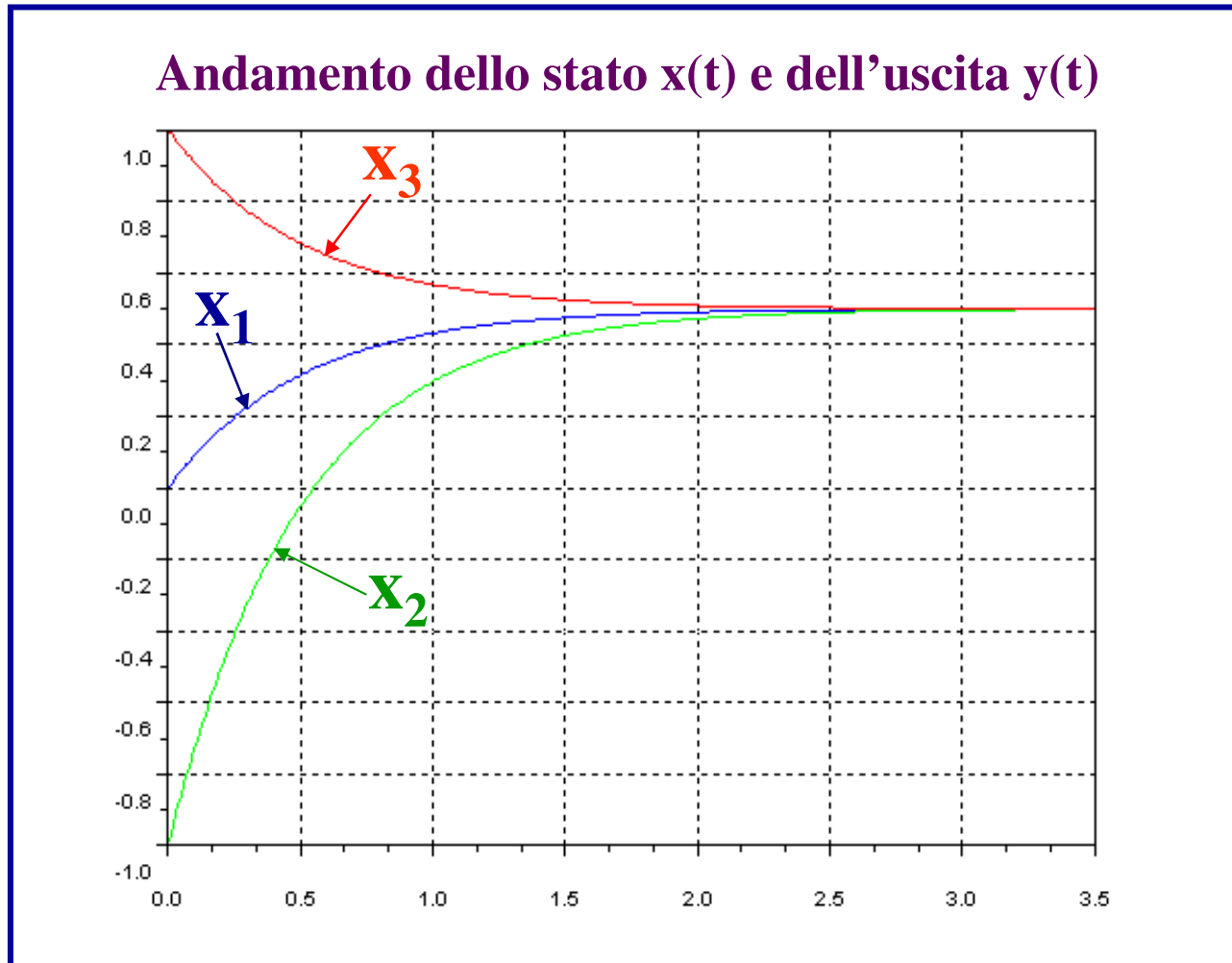
## Studio nello Spazio degli Stati

Si consideri il listato, in codice Scilab, seguente:

```
--> a= -2;b=1;c=1;d=0;u=1;  
--> svm1=syslin('c',a,b,c,d,0);  
--> svm2=syslin('c',a,b,c,d,-1);  
--> svm3=syslin('c',a,b,c,d,1);  
--> t=0:0.01:3.5;  
--> [y1,x1]=csim('step',t,svm1);  
--> [y2,x2]=csim('step',t,svm2);  
--> [y3,x3]=csim('step',t,svm3);  
--> plot(t,x1,'b',t,x2,'g',t,x3,'r'),xgrid
```

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (8)

Si ottengono i tre grafici relativi sia allo **stato** sia all'**uscita**



$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2$$

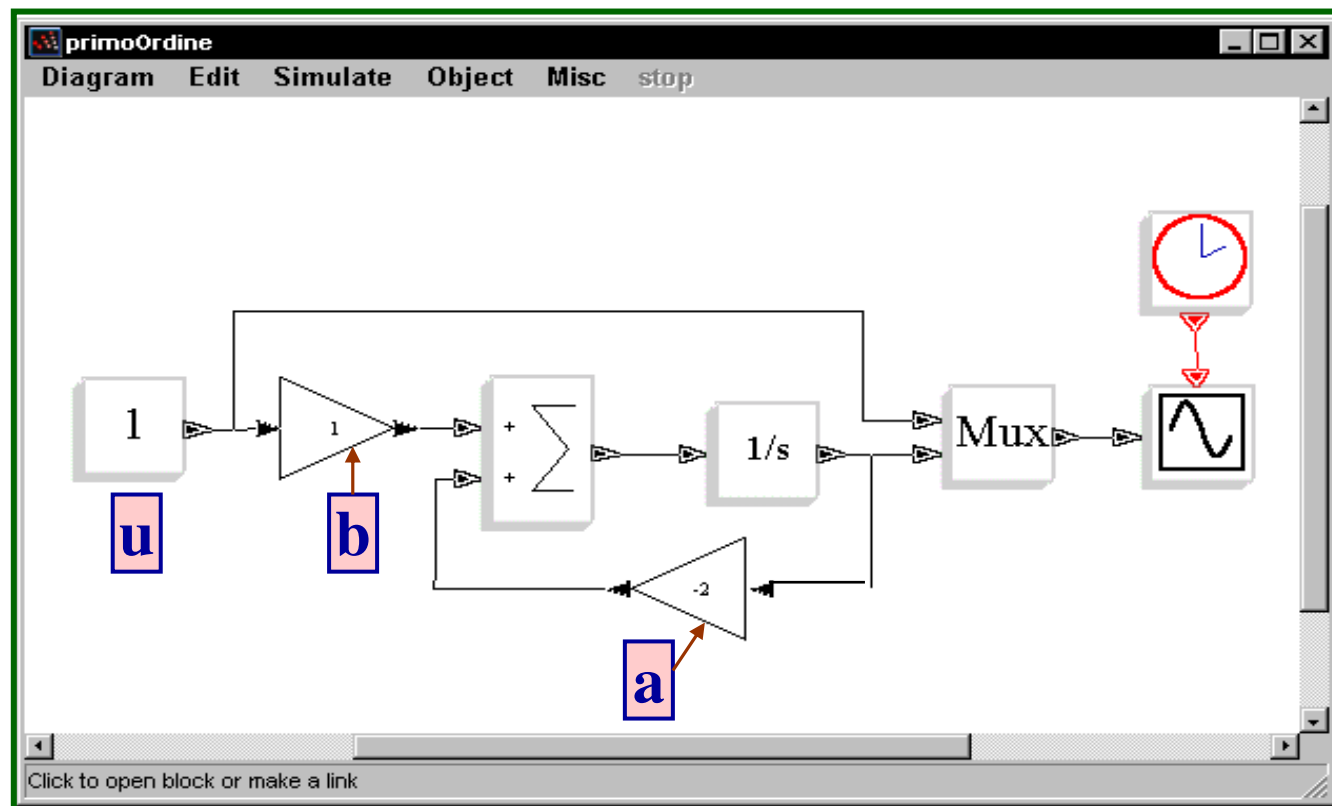
$$y_3 = x_3$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (9)

Schema in **ambiente Scicos** per il sistema del primo ordine:

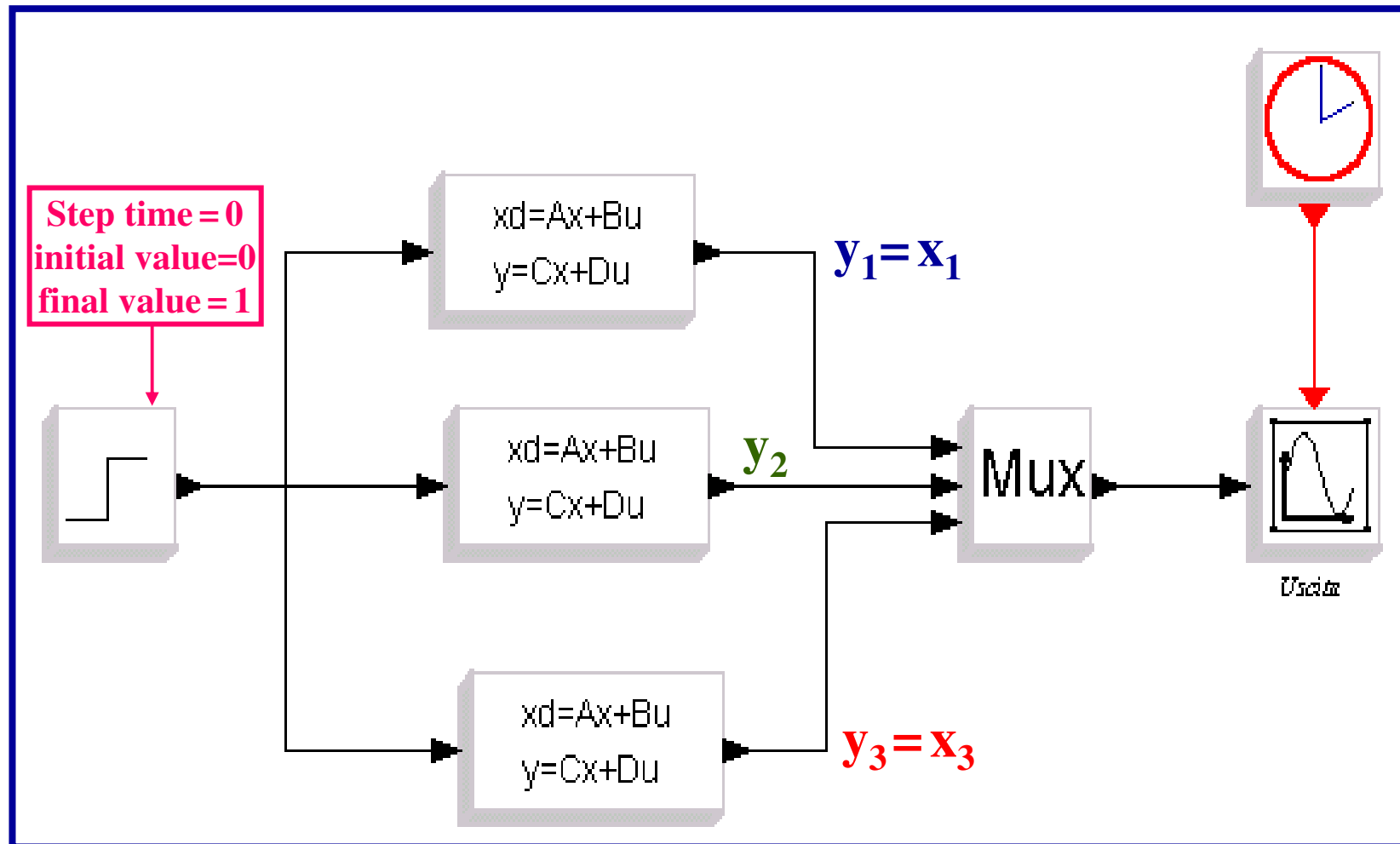
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = ax + bu, \quad x(0) = x_0$$
$$y = cx + du \quad u = \cos t$$

$$a = -2; b = 1$$
$$c = 1; d = 0$$



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (10)

## Utilizzo del blocco **Spazio degli Stati** di SCICOS



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (11)

**Impostazione delle PROPRIETA' dei blocchi e definizione dei PARAMETRI della Simulazione**

**Blocco Gradino unitario:**

**Step time = 0 --- Initial value = 0 --- Final value = 1**

**Blocco Oscilloscopio Probe**

**Ymin = -1 --- Ymax = 1 --- Refresh period = 4**

**Blocco Orologio (durata simulazione)**

**Period = 0,01 (step di simulazione) --- Init time = 0**

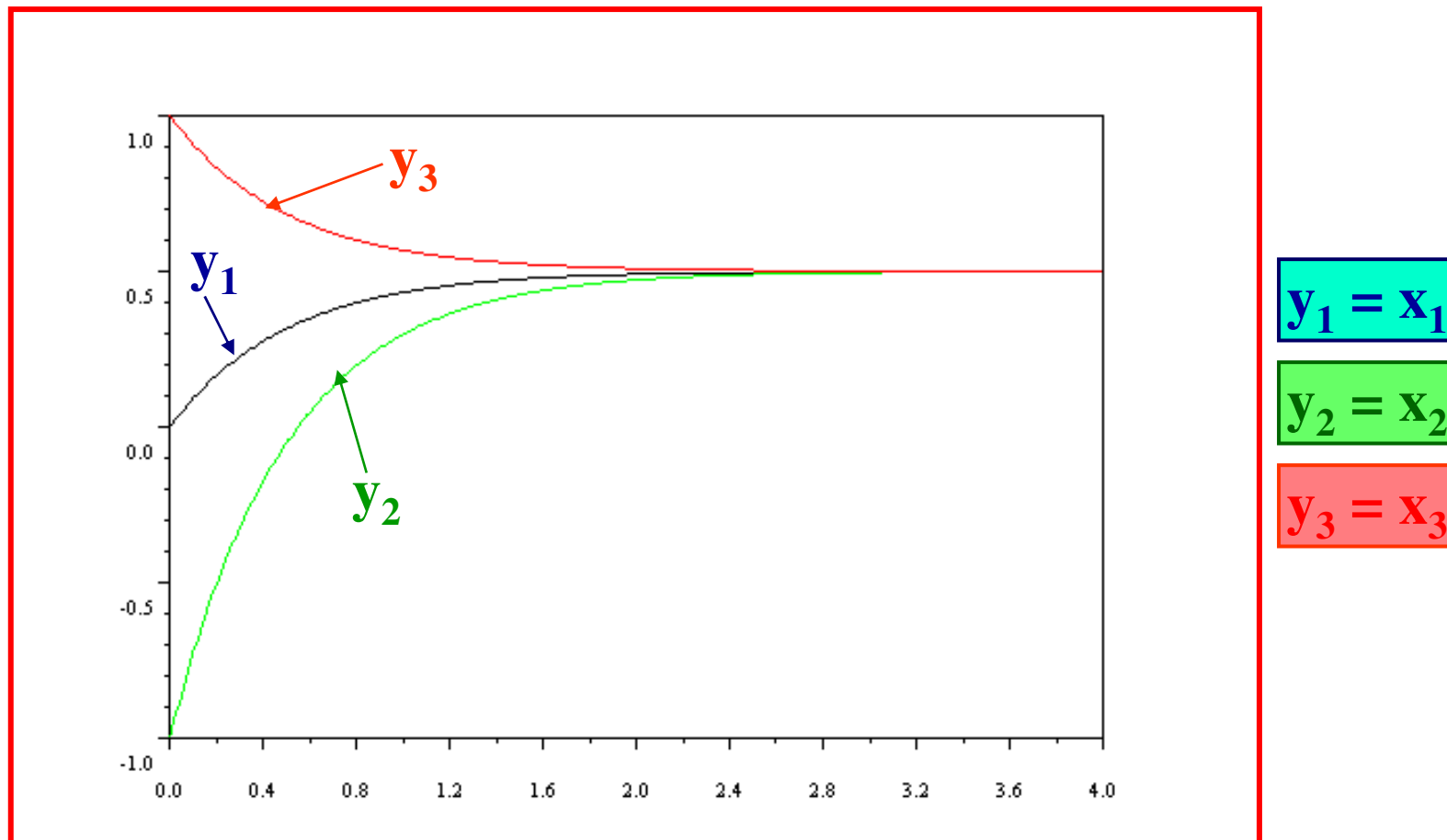
**Opzione Setup del Menù Simulete**

**Final integration time = 4**



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (12)

Si ottiene in **SCICOS** lo stesso insieme di grafici delle uscite del sistema, in relazione alle diverse condizioni iniziali, già viste in ambiente **SCILAB**



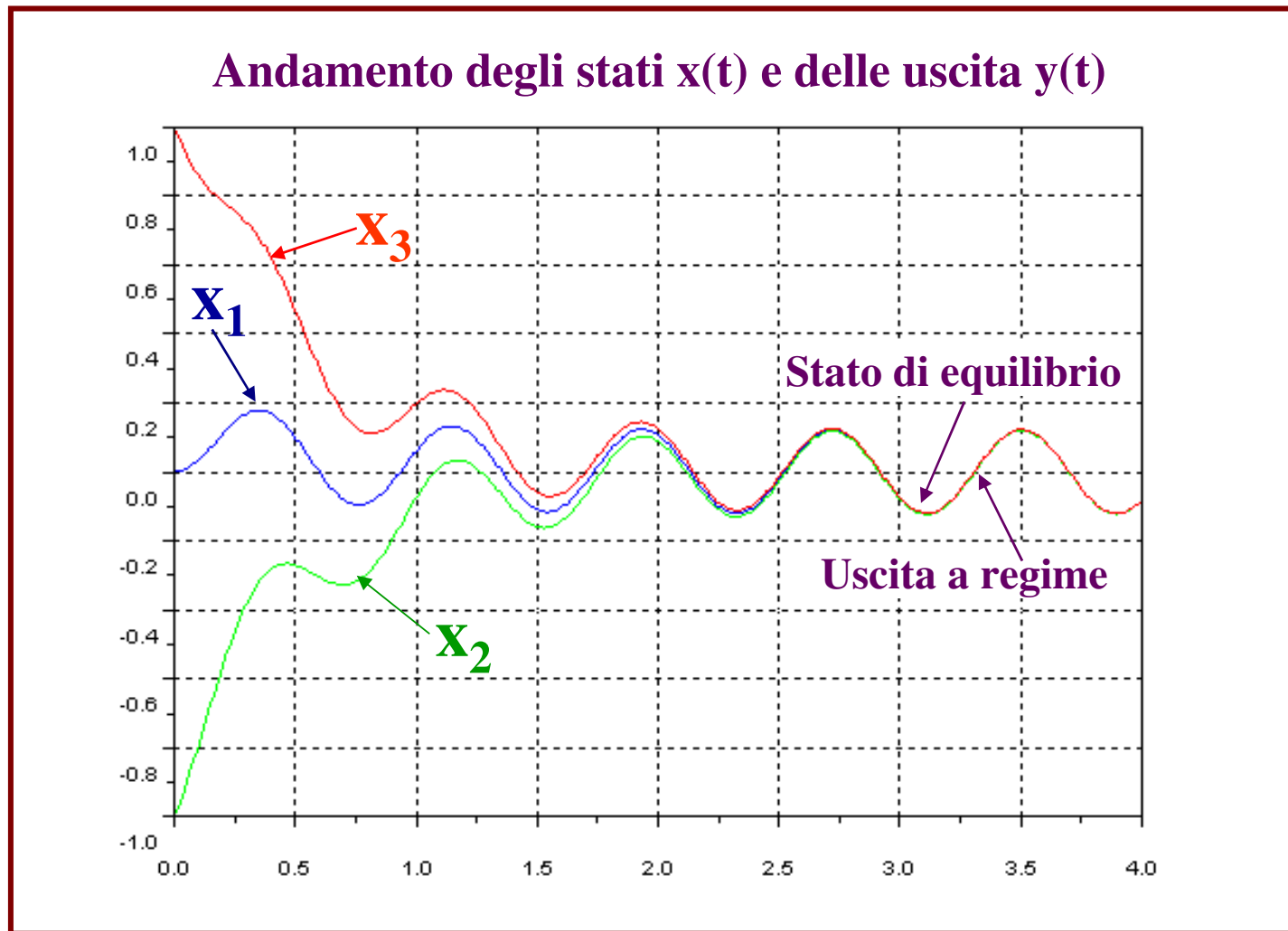
# Sistemi Lineari del 1° Ordine (13)

Si consideri il listato, in codice Scilab, seguente:

```
--> a=-2;b=1;c=1;d=0;u=1;    (l'uscita è uguale allo stato)
--> svm1=syslin('c',a,b,c,d,0);    (definizione del sistema)
--> svm2=syslin('c',a,b,c,d,-1);
--> svm3=syslin('c',a,b,c,d,1);
--> t=0:0.01:4;              (definizione durata simulazione e passo)
--> u=sin(8*t);               (definizione del segnale d'ingresso)
--> [y1,x1]=csim(u,t,svm1);    (risposta a ingresso qualsiasi)
--> [y2,x2]=csim(u,t,svm2);
--> [y3,x3]=csim(u,t,svm3);
--> plot(t,y1,'b',t,y2,'g',t,y3,'r'),xgrid
```

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (14)

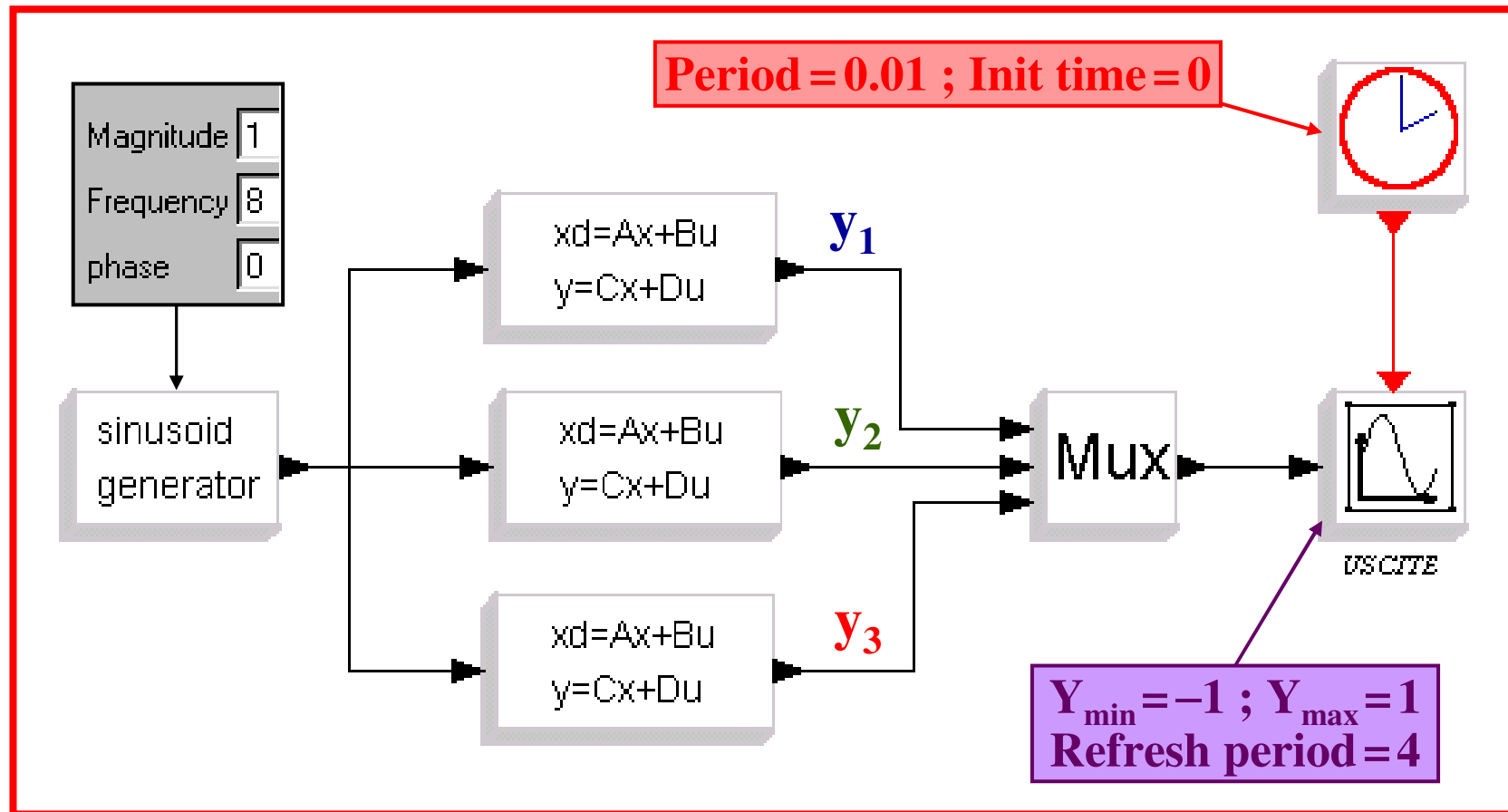
Si ha in ambiente Scilab il grafico dello stato e delle uscite



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (15)

Segnale d'ingresso sinusoidale a frequenza  $f_s = 8 \text{ Hz}$

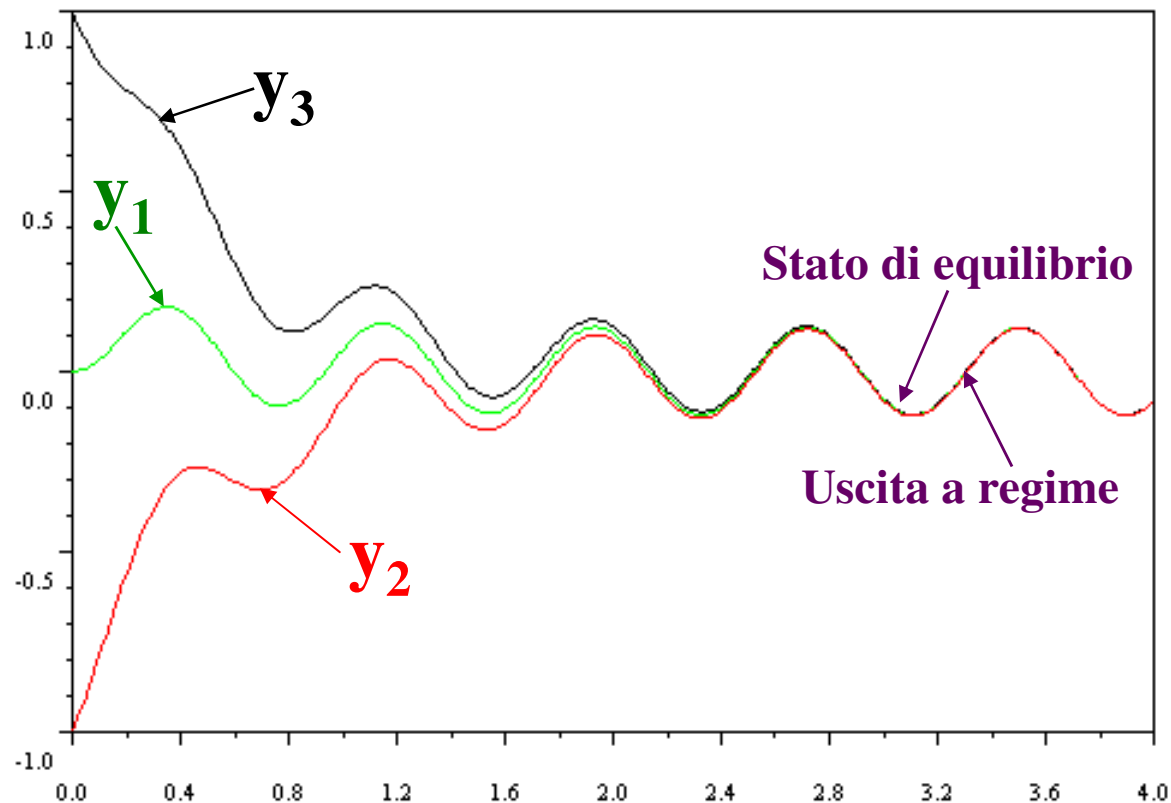
Simulazione in Ambiente SCICOS



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (16)

Si ottiene in **SCICOS** lo stesso insieme di grafici delle uscite del sistema, in relazione alle diverse condizioni iniziali, già viste in ambiente **SCILAB**

Andamento delle uscite  $y(t)$  e degli stati dato che  $x(t) = y(t)$



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (17)

## Studio con la Funzione di Trasferimento

Sistemi **strettamente** propri

$$G_1(s) = \frac{\mu}{1 + sT} \quad \begin{array}{l} g=0 ; T>0 \\ g=0 ; T<0 \end{array}$$

$$G_2(s) = \frac{\mu}{s} \quad g=1$$

**n** = è l'**ordine** del sistema,  
**numero totale dei poli**

**g** = specifica il **tipo** di sistema

**g > 0** ⇒ definisce il **numero di poli** ubicati nell'origine

**g < 0** ⇒ definisce il **numero di zeri** ubicati nell'origine

Sistemi **non strettamente** propri

$$G_3(s) = \frac{\mu(1 + s\tau)}{1 + sT} \quad \begin{array}{l} g=0 ; T>0 ; \tau>0 \\ g=0 ; T>0 ; \tau<0 \end{array}$$

$$G_4(s) = \frac{\mu(1 + s\tau)}{s} \quad \begin{array}{l} g=1 ; \tau>0 \\ g=1 ; \tau<0 \end{array}$$

$$G_5(s) = \frac{\mu s}{1 + sT} \quad g=-1 ; T>0$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (18)

## Studio con la Funzione di Trasferimento

Risposta all'Impulso di Dirac  $\delta(t)$  ed al **Gradino unitario sca(t)**

Sistema **strettamente** proprio

$$G_1(s) = \frac{\mu}{1 + sT} \quad g = 0 ; T > 0,5 ; \mu = 2$$

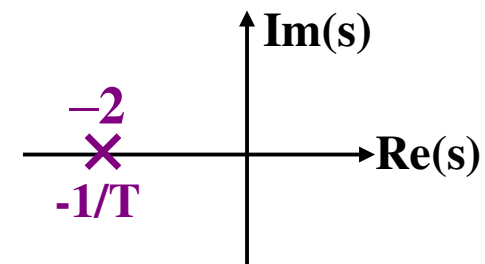
```
-->mi=2;T=0.5;  
-->num=poly([mi 0],'s','c');  
-->den=poly([1 T],'s','c');  
-->giesse1=syslin('c',num,den);  
-->t=1:0.01:3;  
-->yimp=csim('imp',t,giesse1);  
-->ygra=csim('step',t,giesse1);  
-->subplot(211),plot(t,yimp,'b'),xgrid  
-->subplot(212),plot(t,ygra,'r'),xgrid
```

$$y_{imp}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot 1 \cdot G_1(s)] = \frac{\mu}{T}$$

$$y_{imp}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot 1 \cdot G_1(s)] = 0$$

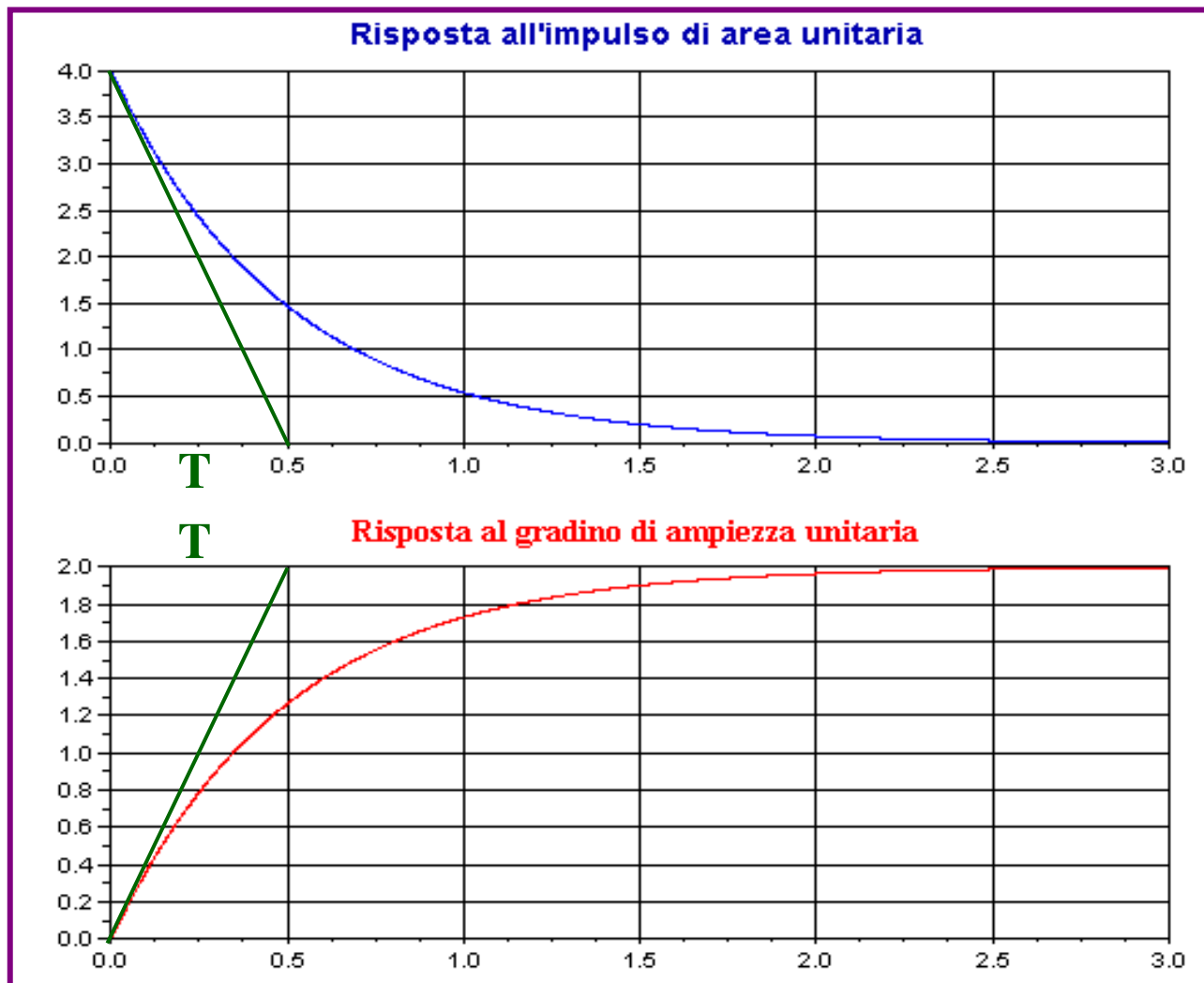
$$y_{sca}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ s \cdot \frac{1}{s} \cdot G_1(s) \right] = 0$$

$$y_{sca}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{1}{s} \cdot G_1(s) \right] = \mu$$



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (19)

## Studio con la Funzione di Trasferimento



$$y_{\text{imp}}(0) = 4$$

$$y_{\text{imp}}(\infty) = 0$$

$$\mu = 2 ; T = 0,5$$

$$y_{\text{sca}}(0) = 0$$

$$y_{\text{sca}}(\infty) = 2$$



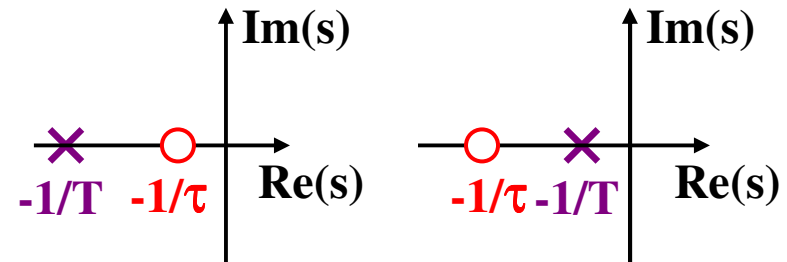
# Sistemi Lineari del 1° Ordine (20)

## Studio con la Funzione di Trasferimento

Sistemi **NON strettamente** PROPRI

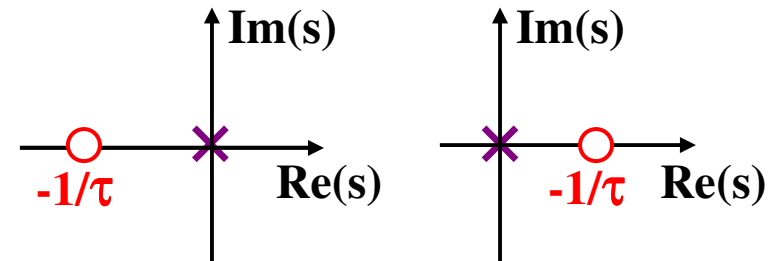
$$G_3(s) = \frac{\mu(1 + s\tau)}{1 + sT}$$

$$\begin{aligned} g &= 0 ; \tau > T > 0 \\ g &= 0 ; T > \tau > 0 \end{aligned}$$



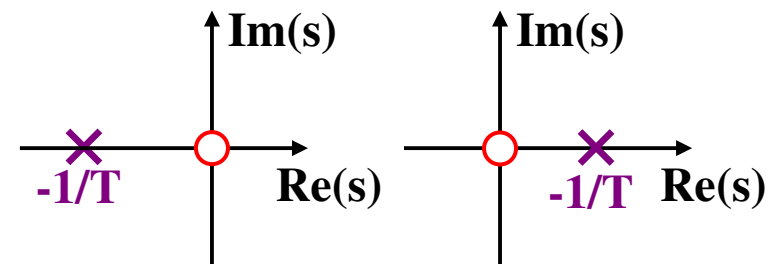
$$G_4(s) = \frac{\mu(1 + s\tau)}{s}$$

$$\begin{aligned} g &= 1 ; \tau > 0 \\ g &= 1 ; \tau < 0 \end{aligned}$$



$$G_5(s) = \frac{\mu s}{1 + sT}$$

$$\begin{aligned} g &= -1 ; T > 0 \\ g &= -1 ; T < 0 \end{aligned}$$



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (21)

## Studio con la Funzione di Trasferimento

Sistemi **NON** strettamente PROPRI – risposta al gradino

$$G_3(s) = \frac{\mu(1+s\tau)}{1+sT}$$

$$g=0 ; \tau > T > 0 \longrightarrow \tau=5 ; T=2 ; \mu=2$$

$$g=0 ; T > \tau > 0 \longrightarrow \tau=1 ; T=2 ; \mu=2$$

$$G_{3a}(s) = \frac{2 \cdot (1+5s)}{1+2s}$$

$$y_{3a}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G_{3a}(s) = \frac{\mu\tau}{T} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

$$y_{3a}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{3a}(s) = \mu = 2$$

$$G_{3b}(s) = \frac{2 \cdot (1+s)}{1+2s}$$

$$y_{3b}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G_{3b}(s) = \frac{\mu\tau}{T} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$$y_{3b}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{3b}(s) = \mu = 2$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (22)

## Studio con la Funzione di Trasferimento

Sistemi **NON** strettamente PROPRI – risposta al gradino

$$G_3(s) = \frac{\mu(1+s\tau)}{1+sT}$$

$g=0 ; \tau > T > 0 \longrightarrow \tau=5 ; T=2 ; \mu=2$   
 $g=0 ; T > \tau > 0 \longrightarrow \tau=1 ; T=2 ; \mu=2$

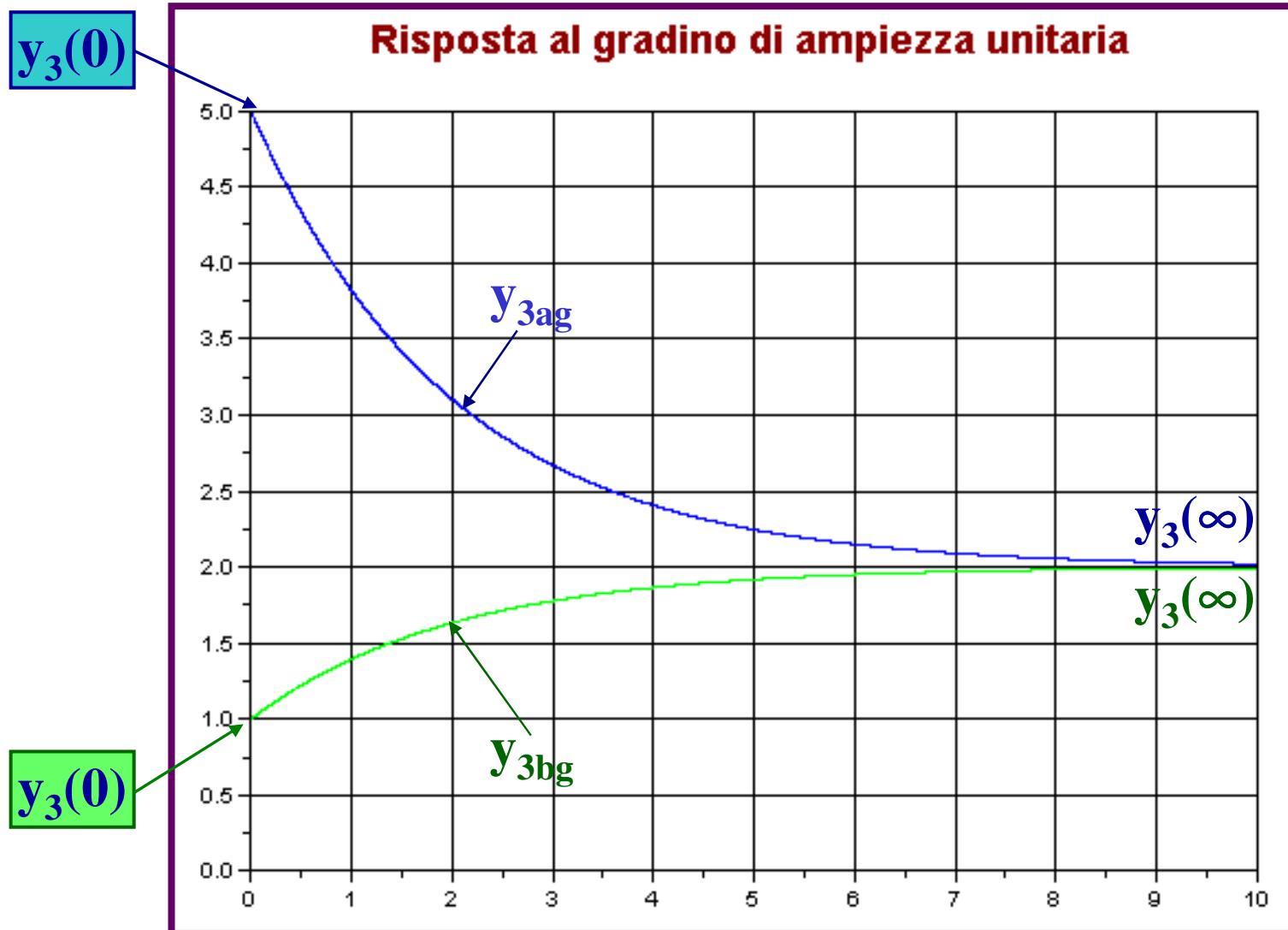
```
-->mi=2;T=2;tau1=5;tau2=1;  
-->num1=poly([1 tau1],'s','c');  
-->num2=poly([1 tau2],'s','c');  
-->den=poly([1 T],'s','c');  
-->giesse3a=syslin('c',mi*num1,den);  
-->giesse3b=syslin('c',mi*num2,den);  
-->t=0:0.001:10;  
-->y3ag=csim('step',t,giesse3a);  
-->y3bg=csim('step',t,giesse3b);  
-->plot(t,y3ag,'b',t,y3bg,'g'),xgrid
```

$$G_{3a}(s) = \frac{2 \cdot (1 + 5s)}{1 + 2s}$$

$$G_{3b}(s) = \frac{2 \cdot (1 + s)}{1 + 2s}$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (23)

## Funzione Trasferimento - Sistemi **NON** strettamente PROPRI



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (24)

## Studio con la Funzione di Trasferimento

Sistemi **NON** strettamente PROPRI – risposta all'Impulso

$$G_3(s) = \frac{\mu(1 + s\tau)}{1 + sT}$$

$$g=0 ; \tau > T > 0 \longrightarrow \tau=5 ; T=2 ; \mu=2$$

$$g=0 ; T > \tau > 0 \longrightarrow \tau=1 ; T=2 ; \mu=2$$

```
-->mi=2;T=2;tau1=5;tau2=1;  
-->num1=poly([1 tau1],'s','c');  
-->num2=poly([1 tau2],'s','c');  
-->den=poly([1 T],'s','c');  
-->giesse3a=syslin('c',mi*num1,den);  
-->giesse3b=syslin('c',mi*num2,den);  
-->t=0:0.001:12;  
-->y3ai=csim('imp',t,giesse3a);  
-->y3bi=csim('imp',t,giesse3b);  
-->plot(t,y3ai,'b',t,y3bi,'g'),xgrid
```

$$G_{3a}(s) = \frac{2 \cdot (1 + 5s)}{1 + 2s}$$

$$G_{3b}(s) = \frac{2 \cdot (1 + s)}{1 + 2s}$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (25)

**Funzione Trasferimento - Sistemi NON strettamente PROPRI**

**Determinazione analitica della risposta all'Impulso di Dirac**

$$G_3(s) = \frac{\mu \cdot (1 + s\tau)}{1 + sT}$$

$$\mu = 2 ; \tau = 5 ; T = 2$$

$$G_{3a}(s) = \frac{2 \cdot (1 + 5s)}{(1 + 2s)}$$

$$Y_{3i}(s) = G_3(s)U(s) = \frac{\mu(1 + s\tau)}{(1 + sT)} = \frac{\mu\tau[s + (1/\tau)]}{T[s + (1/T)]} = \frac{\mu\tau}{T} \left[ \frac{s}{s + (1/T)} + \frac{1/\tau}{s + (1/T)} \right]$$

$$Y_{3i}(s) = \frac{\mu\tau}{T} \left[ \frac{s + (1/\tau) - (1/\tau)}{s + (1/\tau)} + \frac{1/\tau}{s + (1/\tau)} \right] = \frac{\mu\tau}{T} \left[ 1 - \frac{1/T}{s + (1/T)} + \frac{1/\tau}{s + (1/T)} \right]$$

$$y_{3i}(t) = L^{-1}[Y_{3i}(s)] = L^{-1} \left\{ \frac{\mu\tau}{T} \left[ 1 - \frac{1/T}{s + (1/T)} + \frac{1/\tau}{s + (1/T)} \right] \right\}$$

$$y_{3i}(t) = \frac{\mu\tau}{T} L^{-1}[1] - \frac{\mu\tau}{T^2} L^{-1} \left[ \frac{1/T}{s + (1/T)} \right] + \frac{\mu}{T} L^{-1} \left[ \frac{1/\tau}{s + (1/T)} \right]$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (26)

**Funzione Trasferimento - Sistemi NON strettamente PROPRI**

**Determinazione analitica della risposta all'Impulso di Dirac**

$$y_{3i}(t) = \frac{\mu\tau}{T} \delta(t) - \frac{\mu\tau}{T^2} e^{-t/T} + \frac{\mu}{T} e^{-t/T} = \frac{\mu\tau}{T} \delta(t) + \frac{\mu \cdot (T - \tau)}{T^2} e^{-t/T}$$

con  $\delta(t)$  = **Impulso di Dirac di Area Unitaria**. La risposta  $y_{3ip}(t)$  della corrispondente **parte propria del sistema** è caratterizzata da:

$$y_{3ip}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y_{3ip}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu \cdot (T - \tau)}{T^2} \cdot e^{-t/T} = \frac{\mu \cdot (T - \tau)}{T^2}$$

$$y_{3ip}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{3ip}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu \cdot (T - \tau)}{T^2} \cdot e^{-t/T} = 0$$

$$\mu=2 ; \tau=5 ; T=2 \longrightarrow y_{3iap}(0) = \mu(T - \tau)/T^2 = -1,5 \quad y_{3iap}(\infty) = 0$$

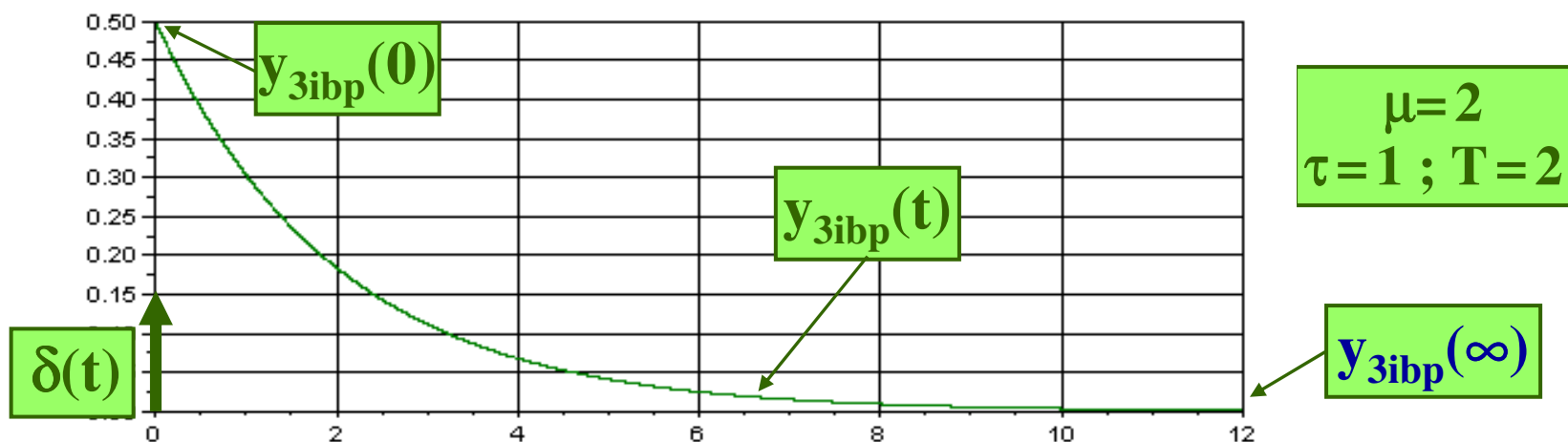
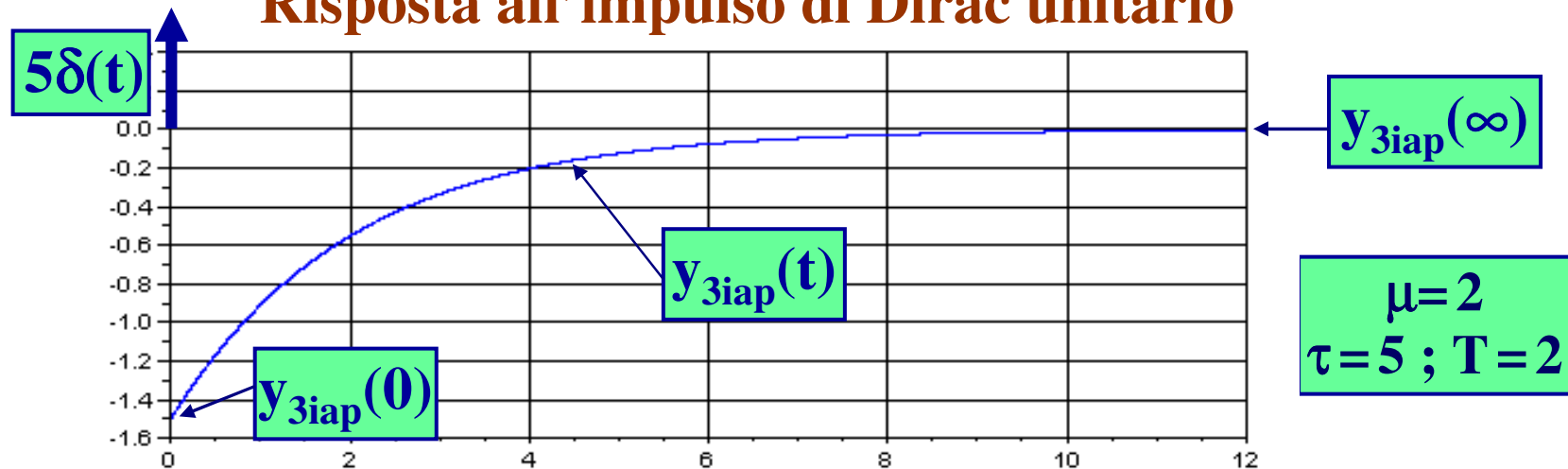
$$\mu=2 ; \tau=1 ; T=2 \longrightarrow y_{3ibp}(0) = \mu(T - \tau)/T^2 = +0,5 \quad y_{3ibp}(\infty) = 0$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine

(27)

Funzione Trasferimento - Sistemi **NON** strettamente PROPRI

Risposta all'impulso di Dirac unitario





# Sistemi Lineari del 1° Ordine (28)

## Studio con la Funzione di Trasferimento

Sistemi **NON** strettamente PROPRI – risposta al gradino

$$G_4(s) = \frac{\mu \cdot (1 + s\tau)}{s}$$

$$\begin{array}{ll} g=1 ; \tau > 0 & \longrightarrow \mu=2 ; \tau=2 \\ g=1 ; \tau < 0 & \longrightarrow \mu=2 ; \tau=-2 \end{array}$$

$$G_{4a}(s) = \frac{2 \cdot (1 + 2s)}{s}$$

$$y_{4a}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G_{4a}(s) = \frac{\mu\tau}{1} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$y_{4a}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{4a}(s) = \infty$$

$$G_{4b}(s) = \frac{2 \cdot (1 - 2s)}{s}$$

$$y_{4b}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G_{4b}(s) = \frac{\mu\tau}{1} = 2 \cdot (-2) = -4$$

$$y_{4b}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{4b}(s) = \infty$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (29)

## Studio con la Funzione di Trasferimento

Sistemi **NON** strettamente PROPRI – risposta al gradino

$$G_4(s) = \frac{\mu \cdot (1 + s\tau)}{s} \quad \begin{array}{l} g=1 ; \tau > 0 \\ g=1 ; \tau > 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \mu=2 ; \tau=2 \\ \mu=2 ; \tau=-2 \end{array}$$

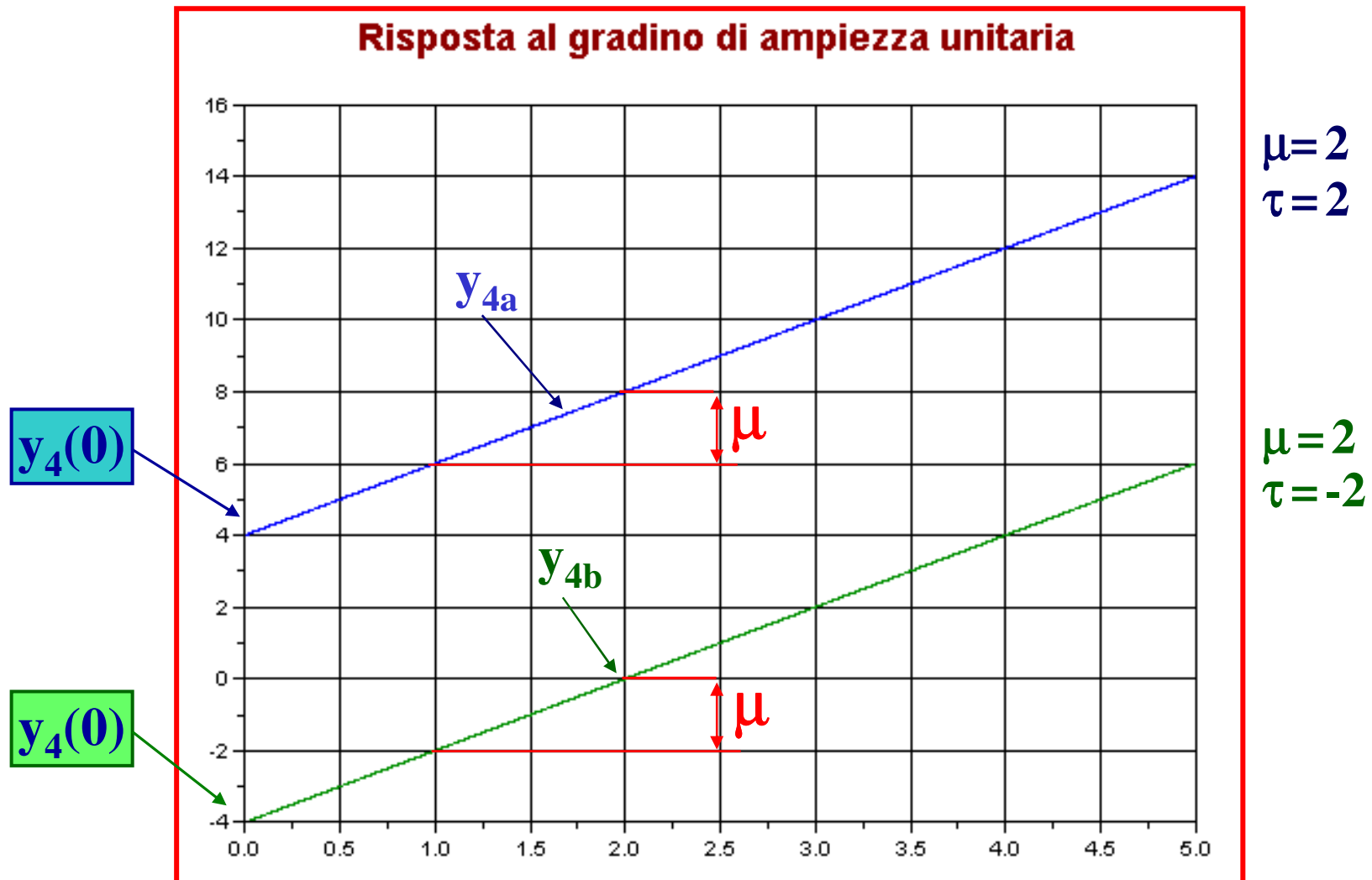
```
-->mi=2;tau1=2;tau2=-2;  
-->num1=poly([1 tau1],'s','c');  
-->num2=poly([1 tau2],'s','c');  
-->den=poly([0 1],'s','c');  
-->giesse4a=syslin('c',mi*num1,den);  
-->giesse4b=syslin('c',mi*num2,den);  
-->t=0:0.001:5;  
-->y4ag=csim('step',t,giesse4a);  
-->y4bg=csim('step',t,giesse4b);  
-->plot(t,y4ag,'b',t,y4bg,'g'),xgrid
```

$$G_{4a}(s) = \frac{2 \cdot (1 + 2s)}{s}$$

$$G_{4b}(s) = \frac{2 \cdot (1 - 2s)}{s}$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (30)

Funzione Trasferimento - Sistemi **NON** strettamente PROPRI



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (31)

**Funzione Trasferimento - Sistemi NON strettamente PROPRI**

**Determinazione analitica della risposta al gradino unitario**

$$G_4(s) = \frac{\mu \cdot (1 + s\tau)}{s} \quad \begin{array}{l} \mu=2 \ ; \ \tau=2 \\ \mu=2 \ : \ \tau=-2 \end{array}$$

$$Y_4(s) = G_4(s)U(s) = \frac{\mu(1 + s\tau)}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\mu + \mu s\tau}{s^2} = \frac{\mu}{s^2} + \frac{\mu s\tau}{s^2} = \frac{\mu}{s^2} + \frac{\mu\tau}{s}$$

$$y_4(t) = L^{-1}[Y_4(s)] = L^{-1}\left[\frac{\mu}{s^2} + \frac{\mu\tau}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{\mu}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{\mu\tau}{s}\right]$$

$$y_4(t) = \mu \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \mu\tau \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = \mu t + \mu\tau \cdot sca(t)$$

$$y_{4a}(t) = 2t + 4 \cdot sca(t) \longrightarrow y_{4a}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y_{4a}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} [2t + 4 \cdot sca(t)] = 4$$

$$y_{4b}(t) = 2t - 4 \cdot sca(t) \longrightarrow y_{4b}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y_{4b}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} [2t - 4 \cdot sca(t)] = -4$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (32)

## Studio con la Funzione di Trasferimento

Sistemi **NON** strettamente PROPRI – risposta al gradino

$$G_5(s) = \frac{\mu s}{1 + sT}$$

$g = -1 ; T > 0$	$\longrightarrow$	$T = +2 ; \mu = 3$
$g = -1 ; T < 0$	$\longrightarrow$	$T = -2 ; \mu = 3$

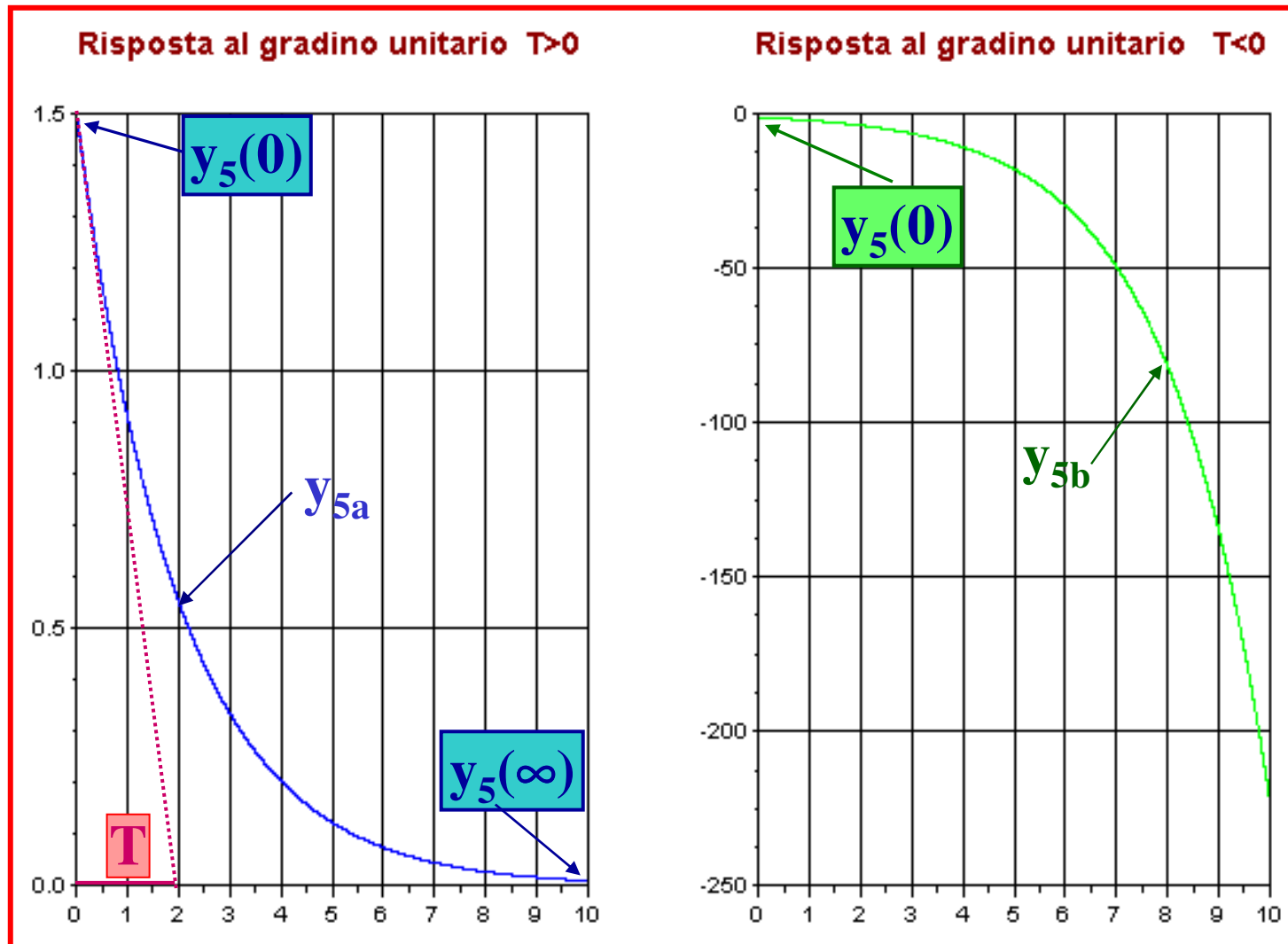
```
-->mi=3;T1=2;T2=-2;num=poly([0 mi],'s','c');  
-->den1=poly([1 T1],'s','c');  
-->den2=poly([1 T2],'s','c');  
-->giesse5a=syslin('c',num,den1);  
-->giesse5b=syslin('c',num,den2);  
-->t=0:0.001:10;  
-->y5ag=csim('step',t,giesse5a);  
-->y5bg=csim('step',t,giesse5b);  
-->subplot(121),plot(t,y5ag,'b'),xgrid  
-->subplot(122),plot(t,y5bg,'g'),xgrid
```

$$G_{5a}(s) = \frac{3s}{1 + 2s}$$

$$G_{5b}(s) = \frac{3s}{1 - 2s}$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (33)

## Funzione Trasferimento - Sistemi **NON** strettamente PROPRI



# Sistemi Lineari del 1° Ordine (34)

Funzione Trasferimento - Sistemi **NON** strettamente PROPRI

Determinazione analitica della risposta al gradino unitario

$$G_5(s) = \frac{\mu s}{1 + sT}$$

$$g = -1 ; \mu = 3 ; T = +2$$

$$g = -1 ; \mu = 3 ; T = -2$$

$$Y_5(s) = G_5(s)U(s) = \frac{\mu s}{1 + sT} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\mu}{1 + sT} = \frac{\mu}{T} \cdot \frac{1}{s + (1/T)}$$

$$y_5(t) = L^{-1}[Y_5(s)] = L^{-1}\left[\frac{\mu}{T} \cdot \frac{1}{s + (1/T)}\right] = \frac{\mu}{T} \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s + (1/T)}\right] = \frac{\mu}{T} \cdot e^{-t/T}$$

$$y_{5a}(t) = (3/2) \cdot e^{-t/2}$$

$$y_{5a}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y_{5a}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} [(3/2) \cdot e^{-t/2}] = (3/2)$$

$$y_{5a}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{5a}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [(3/2) \cdot e^{-t/2}] = 0$$

$$y_{5b}(t) = -(3/2) \cdot e^{t/2}$$

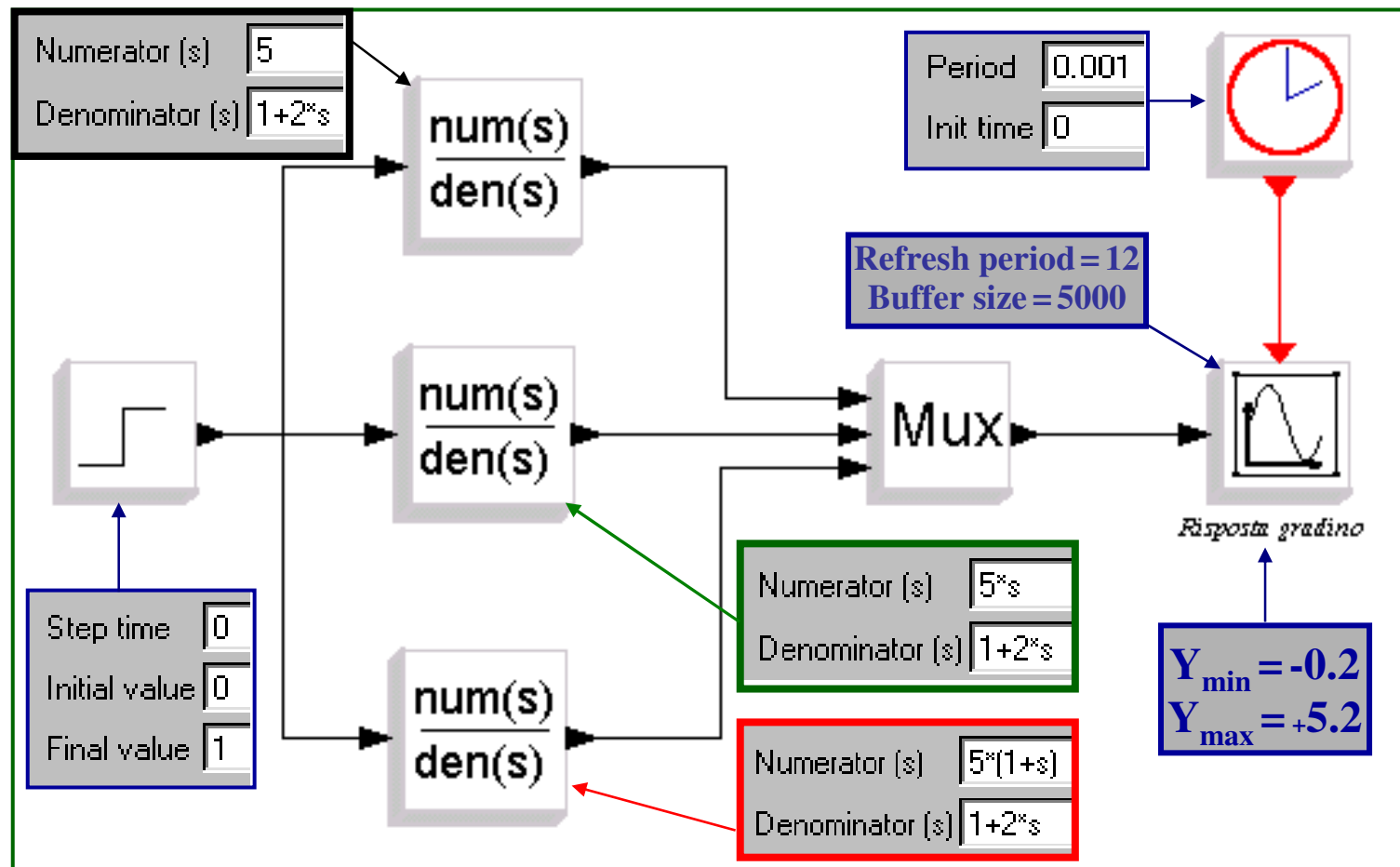
$$y_{5b}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y_{5b}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} [-(3/2) \cdot e^{t/2}] = -(3/2)$$

$$y_{5b}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{5b}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [-(3/2) \cdot e^{t/2}] = -\infty$$

# Sistemi Lineari del 1° Ordine (35)

## Risposta al gradino unitario in Ambiente SCICOS

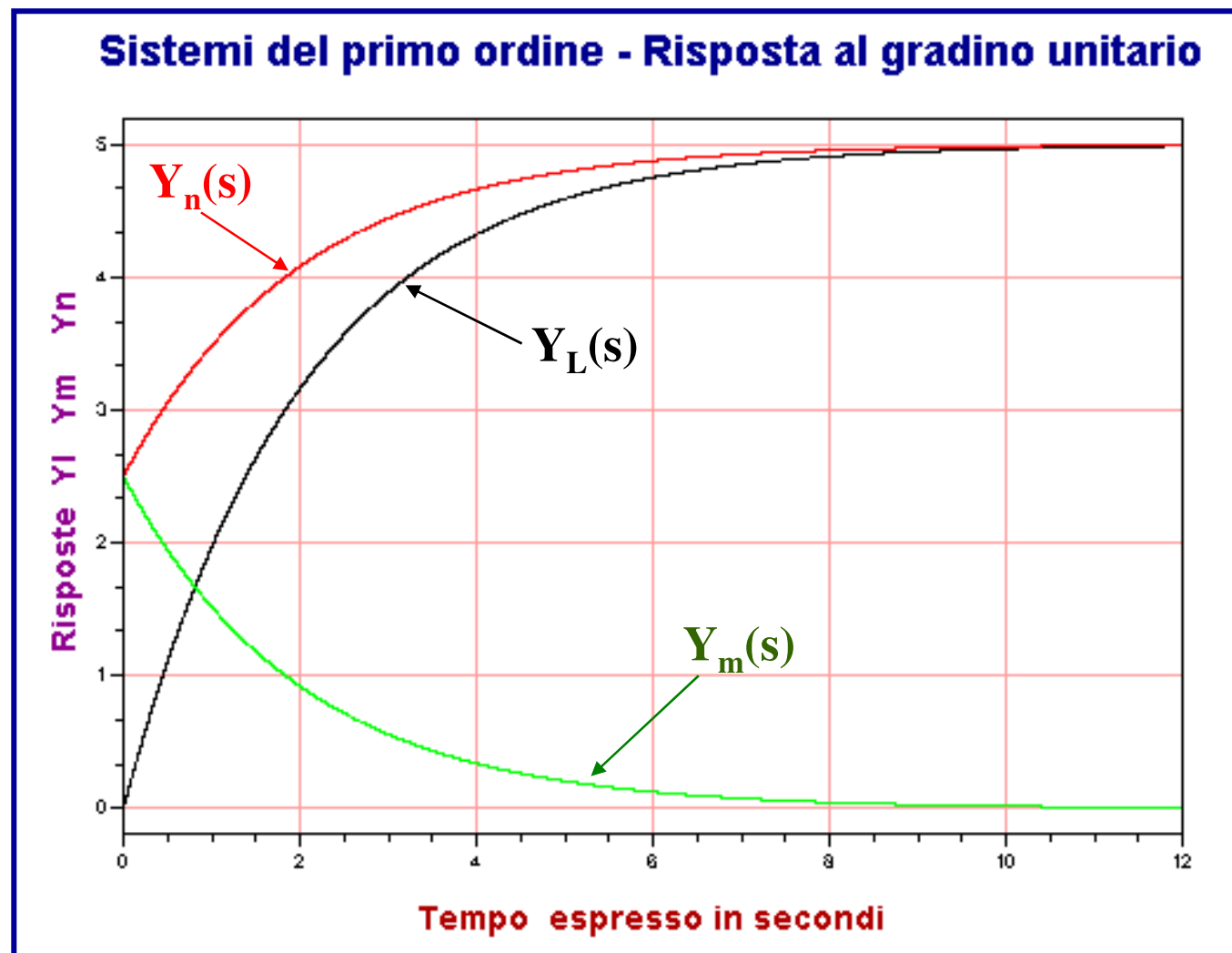
Sistemi del 1° ordine **PROPRI** e **NON strettamente PROPRI**





# Sistemi Lineari del 1° Ordine (36)

Risposta al gradino unitario ottenuta in Ambiente SCICOS



$$\mu = 5$$
$$T = 2; \tau = 1$$

$$G_L(s) = \frac{5}{1 + 2s}$$

$$G_m(s) = \frac{5s}{1 + 2s}$$

$$G_n(s) = \frac{5(1 + s)}{1 + 2s}$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (1)

Si consideri ora il sistema del **secondo ordine**:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u, \\ \dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u, \\ y &= c_1x_1 + c_2x_2 + du\end{aligned}$$

caratterizzato dagli **stati iniziali**:

$$\begin{aligned}x_1(0) &= x_{10} \\ x_2(0) &= x_{20}\end{aligned}$$

## Sistemi Lineari del 2° Ordine (2)

Il sistema può essere scritto in forma matriciale:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

Con le matrici **A**, **B**, **C** e **D** così definite:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \quad c_2], \quad D = d$$

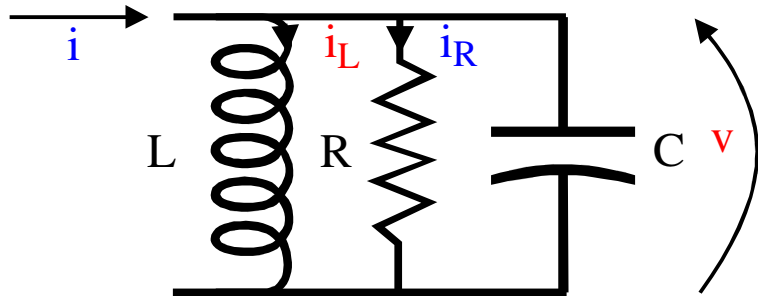
## Sistemi Lineari del 2° Ordine (3)

La medesima equazione rappresenta fenomeni fisici diversi , afferenti a differenti discipline, (tecnica delle analogie) tra i quali:

- circuito RCL;
- sistema massa-molla-smorzatore viscoso;
- circuito resistenze e capacità a ponte;

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (4)

## Circuito RCL tipo parallelo



$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \left( i - i_L - \frac{v}{R} \right)$$

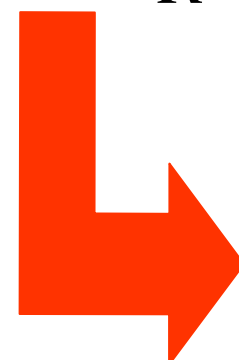
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v$$

$$i_R = \frac{v}{R}$$

$$x_1 = v, \quad x_2 = i_L, \quad u = i, \quad y = i_R$$

$$A = \begin{bmatrix} -1/RC & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1/R \quad 0], \quad D = 0$$


$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (5)

## Sistema massa-molla-smorzatore

$k$  = costante elastica molla

$h$  = coefficiente di viscosità

$v$  = velocità della massa  $M$

$s$  = spostamento massa  $M$

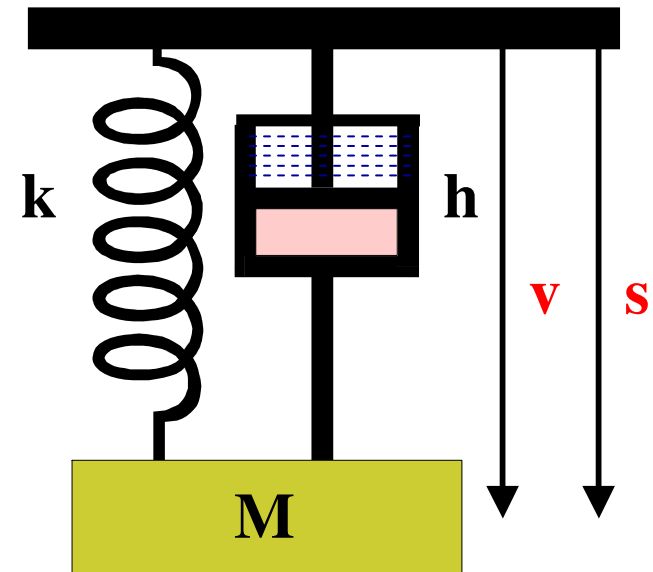
$$\frac{ds}{dt} = v$$


$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M}(F - hv - ks)$$

$$x_1 = s, \quad x_2 = v, \quad u = F, \quad y = s \quad (y = v)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -h/M \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix},$$

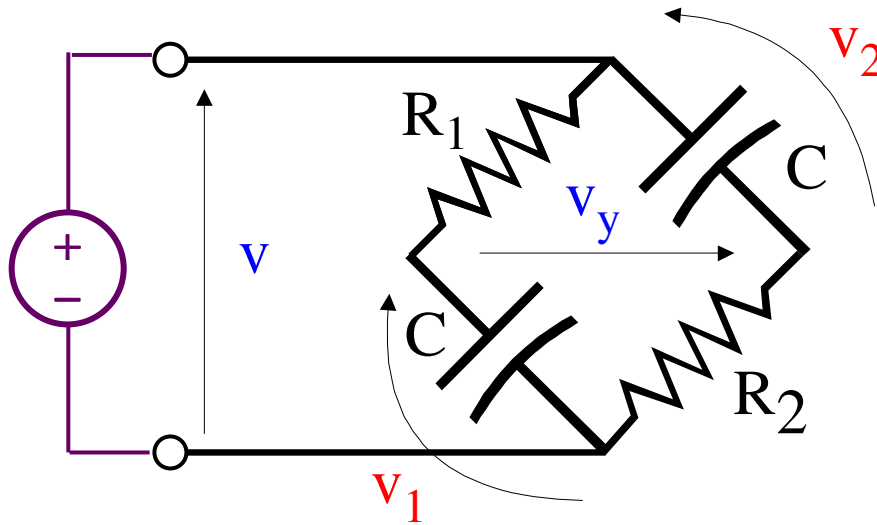
$$C = [1 \quad 0], \quad (C = [0 \quad 1]), \quad D = 0$$




$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (6)

## Circuito con Resistenze e Capacità collegate a ponte



$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{v - v_1}{CR_1}$$

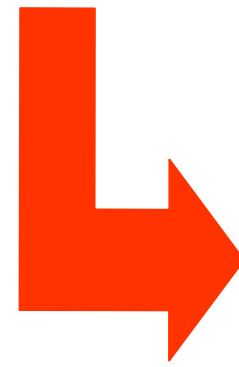
$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{v - v_2}{CR_2}$$

$$v_y = v - v_1 - v_2$$

$$x_1 = v_1, \quad x_2 = v_2, \quad u = v, \quad y = v_y$$

$$A = \begin{bmatrix} -1/CR_1 & 0 \\ 0 & -1/CR_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/CR_1 \\ 1/CR_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = 1$$


$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (7)

Prove da effettuare con **Scilab** e **Scicos** sul **modello** relativo al **circuito RCL tipo parallelo**.

**a) Risposta libera -- con:  $C = 0.1$ ,  $L = 1$ ,  $R = 1$ :**

- si prenda  $x(0)=[1 \ 0]$ ,  $u=0$  (uscita  $y_1$ );
- si prenda  $x(0)=[-1 \ 2]$ ,  $u=0$  (uscita  $y_2$ );
- si prenda  $x(0)=[2 \ -2]$ ,  $u=0$  (uscita  $y_3$ );

**b) Risposta al gradino -- con:  $x(0) = [0 \ 0]$ ,  $u = 1$ :**

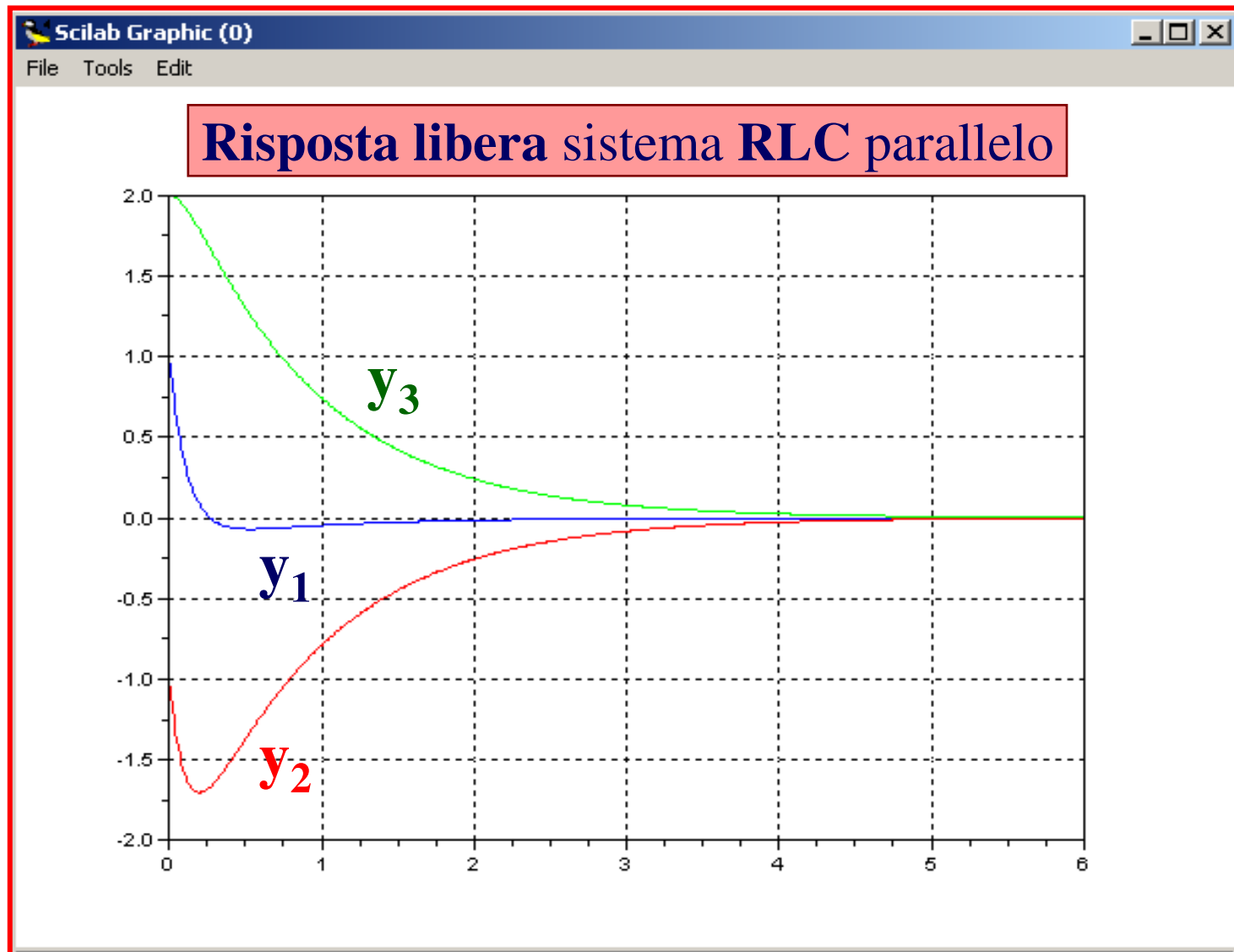
- si prenda  $C=0.1$ ,  $L=1$ ,  $R=1$  (uscita  $y_4$ );
- si prenda  $C=0.1$ ,  $L=1$ ,  $R=20$  (uscita  $y_5$ );
- si prenda  $C=0.1$ ,  $L=5$ ,  $R=20$  (uscita  $y_6$ );
- si prenda  $C=0.01$ ,  $L=1$ ,  $R=20$  (uscita  $y_7$ );



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (8)

```
--> c = 0.1 ; L=1 ; R=1;      (condizioni di simulazione Scilab prova a)
--> A=[-1/(R*c) -1/c ; 1/L  0];      (matrici del sistema RLC)
--> B=[1/c ; 0]; C=[1/R  0]; D=0;      nello spazio degli stati)
--> xo1=[1;0]; xo2=[-1;2]; xo3=[2;-2];      (condizioni iniziali)
--> srlc1=syslin('c',A,B,C,D,xo1);      (definizione oggetto sistema)
--> srlc2=syslin('c',A,B,C,D,xo2);      (definizione oggetto sistema)
--> srlc3=syslin('c',A,B,C,D,xo3);      (definizione oggetto sistema)
--> t=0:0.01:6;      (definizione durata della simulazione)
--> u=zeros(1,max(size(t)));      (ingresso identicamente nullo)
--> y1=csim(u,t,srlc1);      (determinazione risposta libera)
--> y2=csim(u,t,srlc2);      (determinazione risposta libera)
--> y3=csim(u,t,srlc3);      (determinazione risposta libera)
--> plot(t,y1,'b',t,y2,'r',t,y3,'g'), xgrid      (grafici relativi)
```

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (9)



# Sistemi Lineari del 2° Ordine

(10a)

*Simulazione Scilab attinente la prova b)*

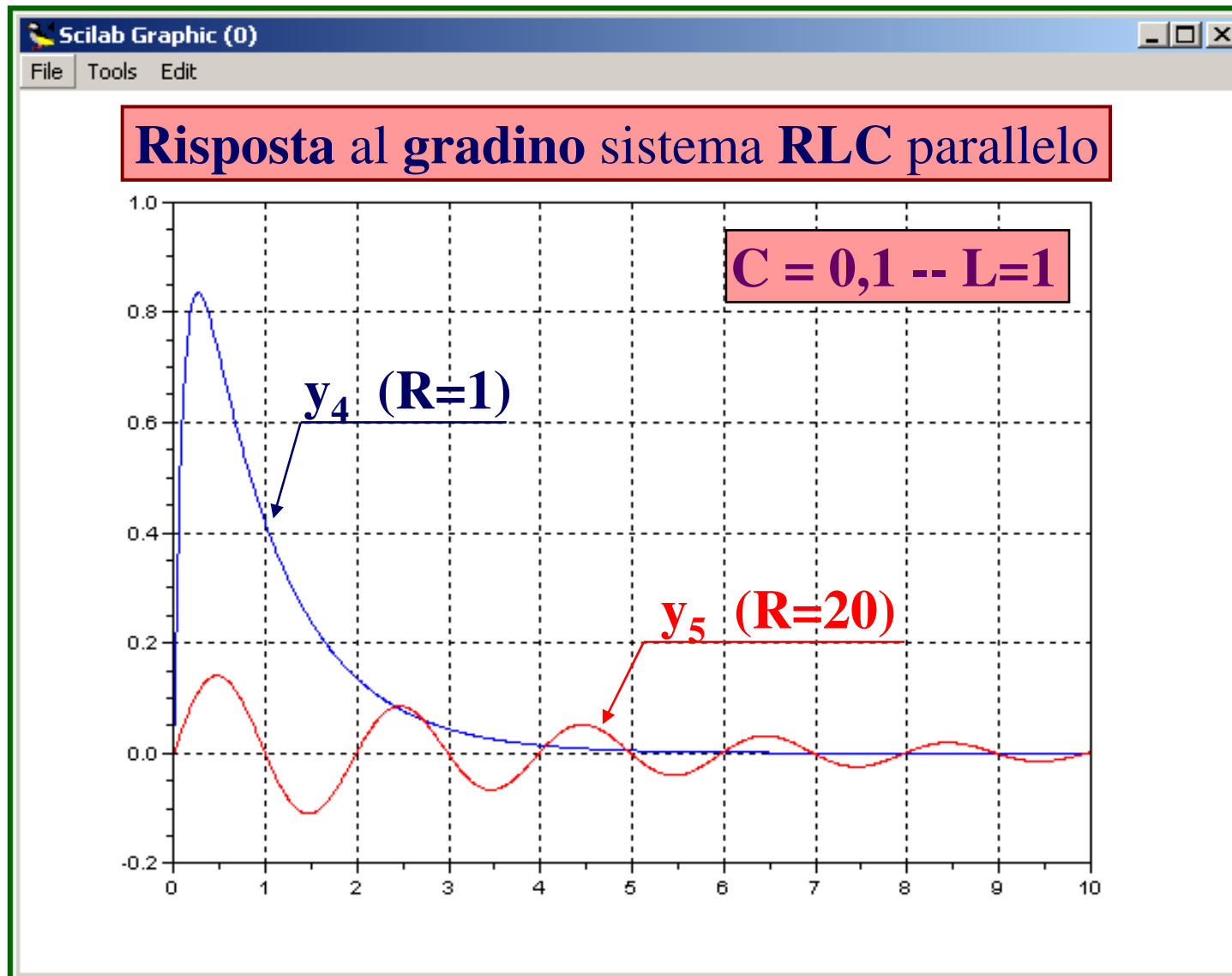
<b>--&gt; xo=[0;0];</b>	<b>(condizioni iniziali nulle)</b>
<b>--&gt; c = 0.1 ; L=1 ; R=1;</b>	<b>(assegnazione dei parametri)</b>
<b>--&gt; A=[-1/(c*R) -1/c ; 1/L 0];</b>	<b>(definizione della matrice A)</b>
<b>--&gt; B=[1/c ; 0]; C=[1/R 0]; D=0;</b>	<b>(definizione matrici B, C e D)</b>
<b>--&gt; srlc4=syslin('c',A,B,C,D,xo);</b>	<b>(definizione oggetto sistema)</b>
<b>--&gt; c = 0.1 ; L=1 ; R=20;</b>	<b>(assegnazione dei parametri)</b>
<b>--&gt; A=[-1/(c*R) -1/c ; 1/L 0];</b>	<b>(definizione della matrice A)</b>
<b>--&gt; B=[1/c ; 0]; C=[1/R 0]; D=0;</b>	<b>(definizione matrici B, C e D)</b>
<b>--&gt; srlc5=syslin('c',A,B,C,D,xo);</b>	<b>(definizione oggetto sistema)</b>
<b>--&gt; c = 0.1 ; L=5 ; R=20;</b>	<b>(assegnazione dei parametri)</b>
<b>--&gt; A=[-1/(c*R) -1/c ; 1/L 0];</b>	<b>(definizione della matrice A)</b>
<b>--&gt; B=[1/c ; 0]; C=[1/R 0]; D=0;</b>	<b>(definizione matrici B, C e D)</b>
<b>--&gt; srlc6=syslin('c',A,B,C,D,xo);</b>	<b>(definizione oggetto sistema)</b>

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (10b)

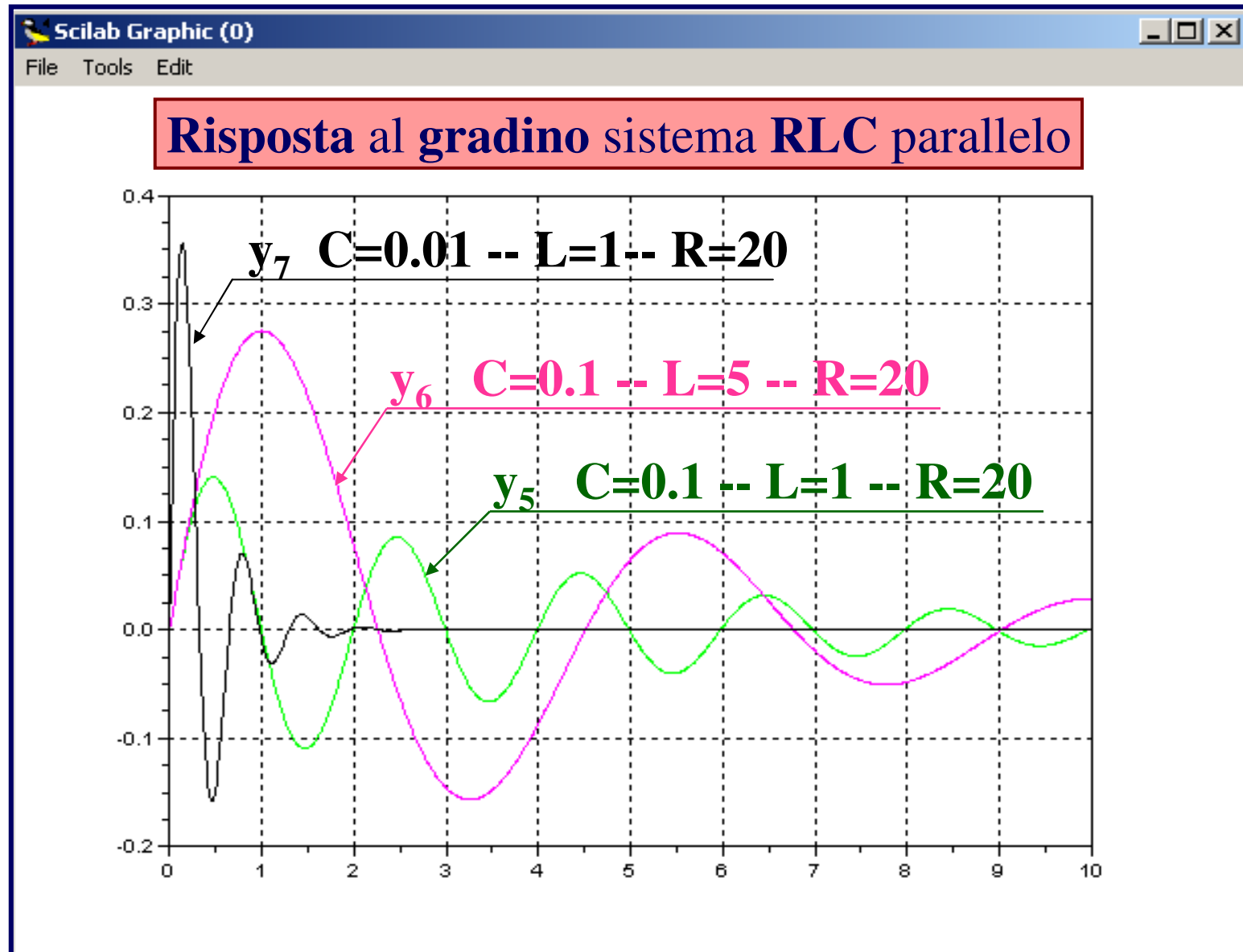
*(seguito del listato per la Simulazione Scilab della Prova b)*

```
--> c = 0.01 ; L=1 ; R=20;           (assegnazione dei parametri)
--> A=[-1/(c*R) -1/c ; 1/L  0];       (definizione della matrice A)
--> B=[1/c ; 0]; C=[1/R  0]; D=0;     (definizione matrici B, C e D)
--> srlc7=syslin('c',A,B,C,D,xo);     (definizione oggetto sistema)
--> t=0:0.01:10;                     (definizione della durata della simulazione)
--> y4=csim('step',t,srlc4);          (determinazione risposta al gradino)
--> y5=csim('step',t,srlc5);          (determinazione risposta al gradino)
--> y6=csim('step',t,srlc6);          (determinazione risposta al gradino)
--> y7=csim('step',t,srlc7);          (determinazione risposta al gradino)
--> plot(t, y4,'b', t, y5,'r'), xgrid  (grafici relativi a y4 e y5)
--> plot(t,y5,'g',t,y6,'m',t,y7,'k'), xgrid  (grafici di y5, y6 ed t7)
--> plot2d(t,[y4',y5',y6',y7']), xgrid  (grafici con versione plot2d)
```

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (11)



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (12)



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (13)

Si è, pertanto, **verificato** e **consolidato** quanto segue:

- $y_1, y_2, y_3$  tendono a 0; 
- $y_1 = y_2 + y_3$ ; 
- **al crescere della resistenza  $R$ , a pari capacità  $C$  ed a pari induttanza  $L$ , l'uscita diventa di tipo oscillante (curve  $y_4$  e  $y_5$ );**
- **al crescere dell'induttanza  $L$  e/o della capacità  $C$  la frequenza delle oscillazioni decresce (curve  $y_5, y_6, y_7$ );**

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (14)

Simuliamo in ambiente Scicos il **modello** relativo al **sistema massa-molla-smorzatore**, effettuando le seguenti prove:

**a) Risposta libera -- con:  $h = 0.1$ ,  $M = 1$ ,  $K = 1$ :**

- si prenda  $x(0)=[1 \ 0]$ ,  $u=0$  (uscita  $y_1$ );
- si prenda  $x(0)=[-1 \ 2]$ ,  $u=0$  (uscita  $y_2$ );

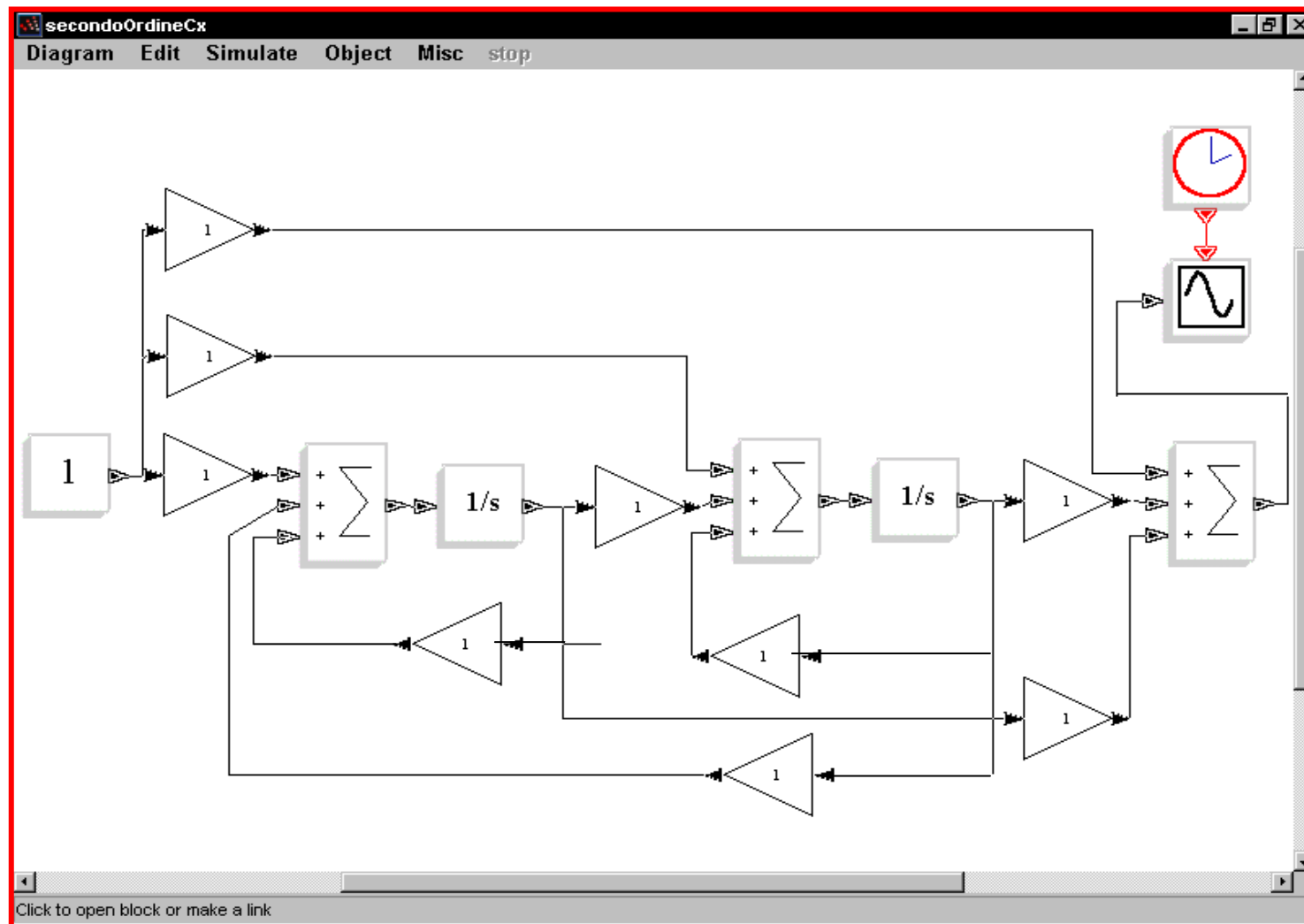
**b) Risposta al gradino -- con:  $x(0) = [0 \ 0]$ ,  $u = 1$ :**

- si prenda  $M=1$ ;  $K=1$ ;  $h=5$  (uscita  $y_3$ );
- si prenda  $M=1$ ;  $K=1$ ;  $h=0.05$  (uscita  $y_4$ );
- si prenda  $M=1$ ;  $K=5$ ;  $h=0.05$  (uscita  $y_5$ );
- si prenda  $M=0.1$ ;  $K=1$ ,  $h=0.05$  (uscita  $y_6$ );



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (15)

Schema per la **simulazione** in ambiente Scicos



## Sistemi Lineari del 2° Ordine (16)

La realizzazione dello schema precedente è assai “**laboriosa**”.  
Conviene pertanto utilizzare il blocco “**Spazio degli Stati**”  
attivo nell’opzione **LINEAR** del menù **PALETTES** di **Scicos**.

**Definire nella Scilab Window le quattro matrici A, B, C, D**  
**ed il vettore  $x_0$  relativo alle condizioni iniziali**, soltanto dopo  
avere assegnato i valori dei **parametri K, M ed h** .

**Attivare SCICOS** e realizzare lo schema attinente il sistema  
da simulare con l’utilizzo del **blocco “Spazio degli Stati”** del  
**menù LINEAR**, del **blocco “Oscilloscopio”** del menù **SINKS**,  
dei **blocchi “Step”** ed “**Orologio**” del menù **SOURCES**.

Assegnare i **valori ai parametri** dei blocchi scelti digitandoli  
nelle apposite caselle dei relativi “**Set Block properties**”

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (17)

Schema per la simulazione in ambiente Scicos

Utilizzo del blocco “Spazio degli Stati” di Scicos

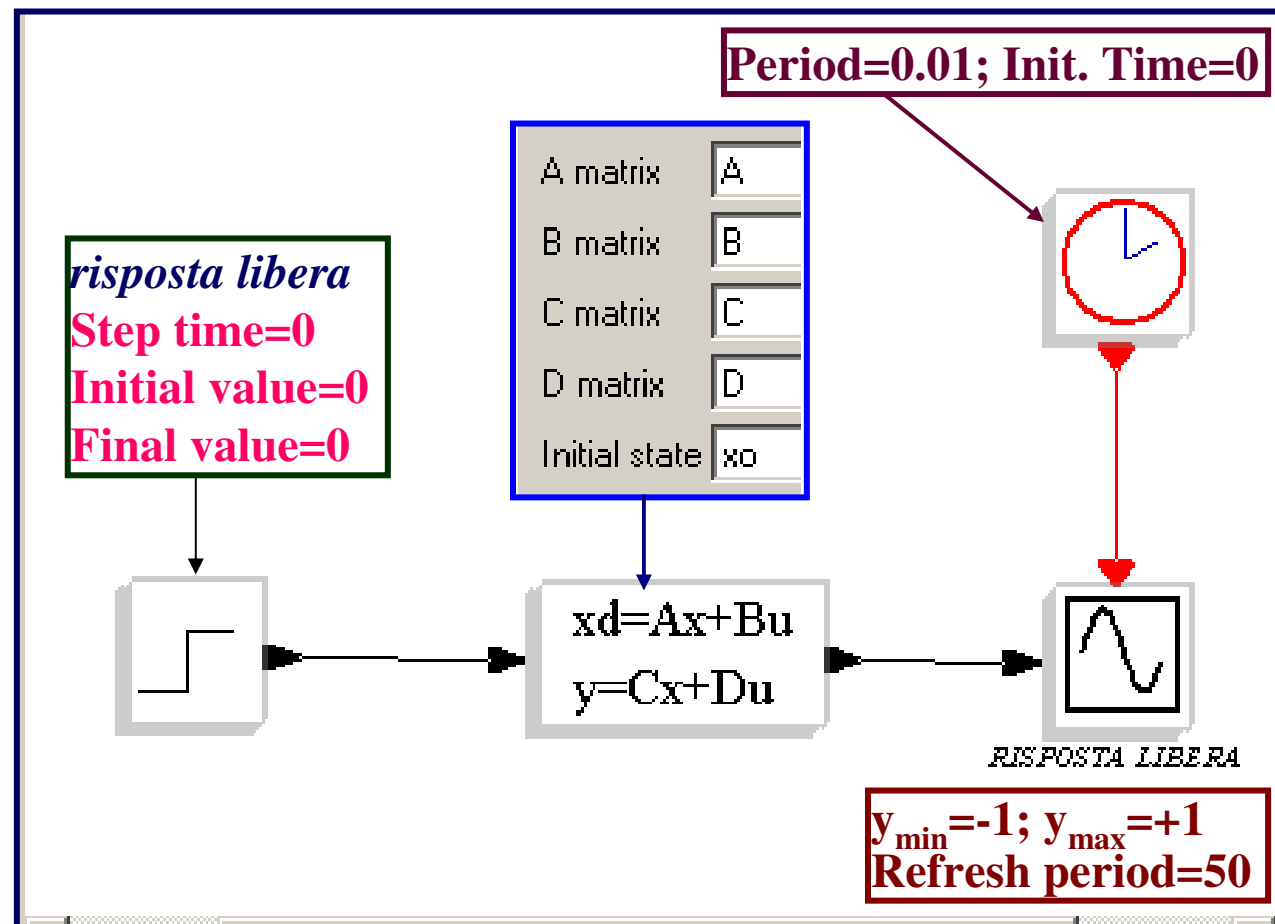
prove parte a)

**Sistema  
Molla–Massa  
Smorzatore**

**Menù  
Simulazione**

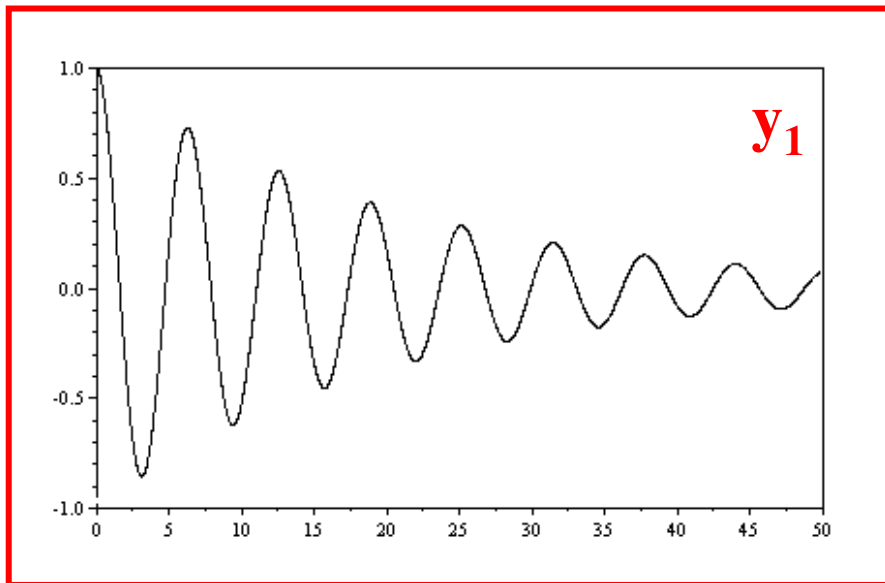
**Opzione Setup**

**Final Intgration  
time = 50**



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (18)

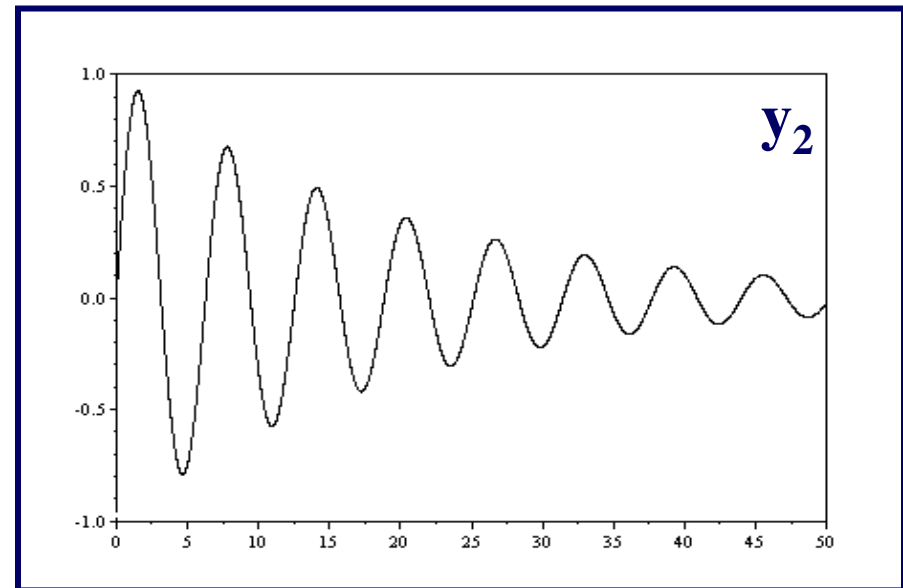
**Sistema Massa Molla Smorzatore Viscoso**  
**Risposta libera per due valori di  $X_0$  (ambiente Scicos)**



-->  $M=1$ ;  $h=0.1$ ;  $K=1$ ;  $x_0=[1;0]$ ;

-->  $A=[0 \ 1; -K/M \ -h/M]$ ;  $B=[0;1/M]$ ;

-->  $C=[1 \ 0]$ ;  $D=0$ ;

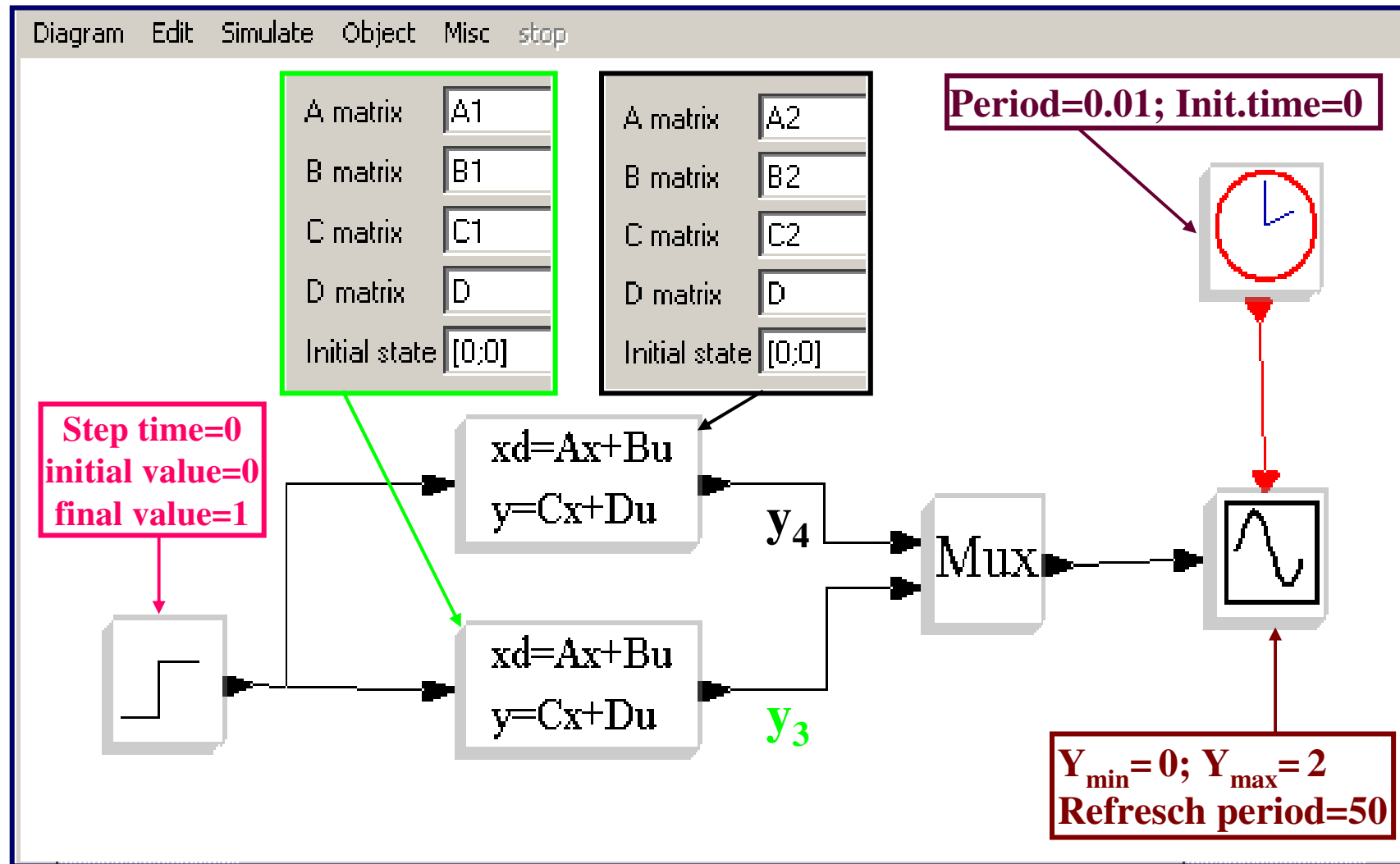


-->  $M=1$ ;  $h=0.1$ ;  $K=1$ ;  $x_0=[0;1]$ ;

-->  $A=[0 \ 1; -K/M \ -h/M]$ ;  $B=[0;1/M]$ ;

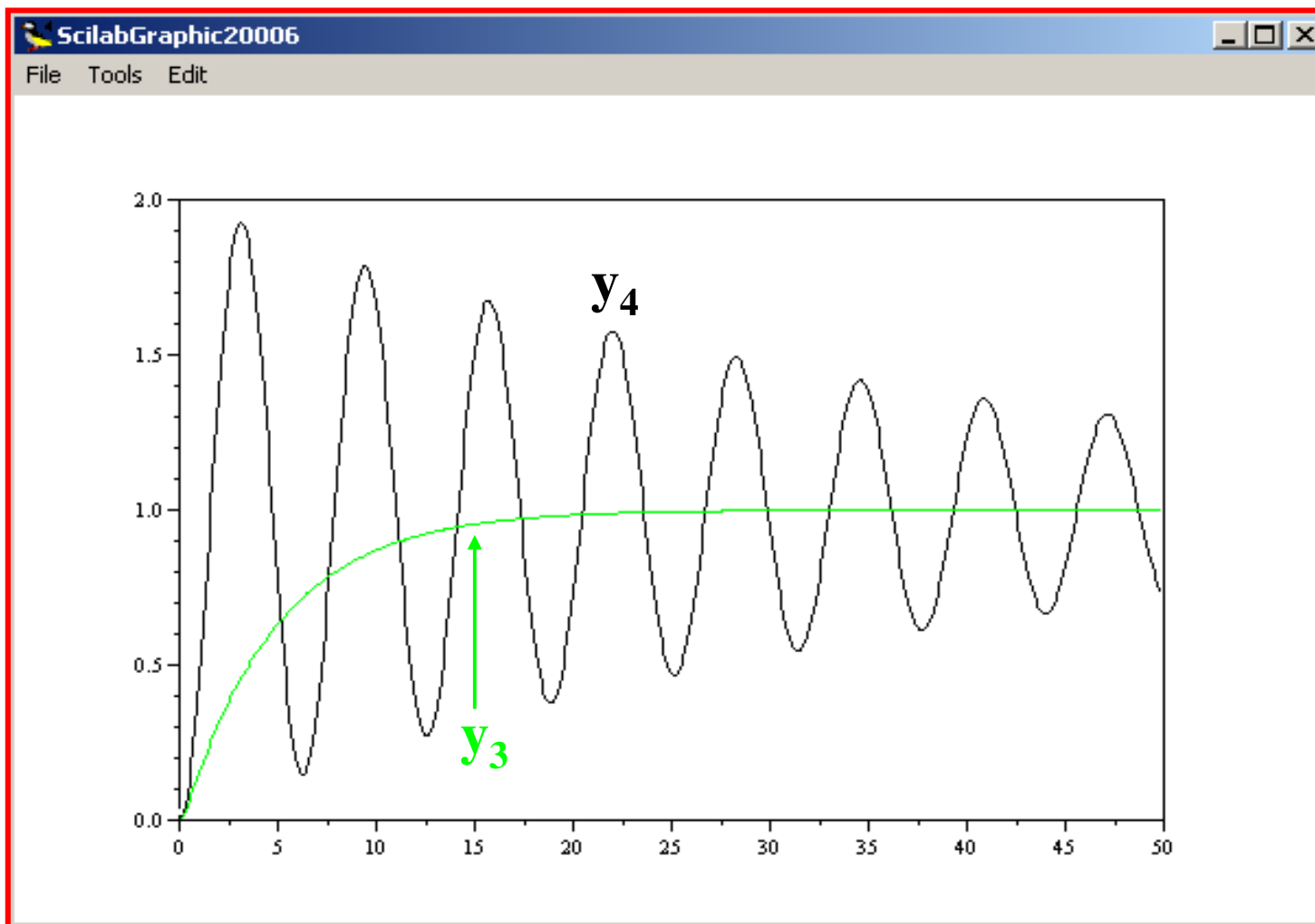
-->  $C=[1 \ 0]$ ;  $D=0$ ;

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (19)



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (20)

Comparsa delle oscillazioni in dipendenza del valore  
del coefficiente di viscosità  $h$



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (21)

Nella finestra di lavoro di Scilab si digitano i valori della **Massa M**, della **costante elastica K** della **Molla** e il **coefficiente h** dello **attrito viscoso** dello smorzatore.

Successivamente si definiscono le **matrici A, B, C, e D** relative al **modello** descritto nello “**Spazio degli Stati**”.

Poi si passa in **ambiente scicos** e si realizza lo schema.

-->M1=1; K1=1; h1=0.05;

-->M2=1; K2=5; h2=0.05;

-->M3=0.1; K3=1; h3=0.05;

-->A1=[0 1;-K1/M1 -h1/M1]; B1=[0;1/M1]; C=[1 0]; D=0;

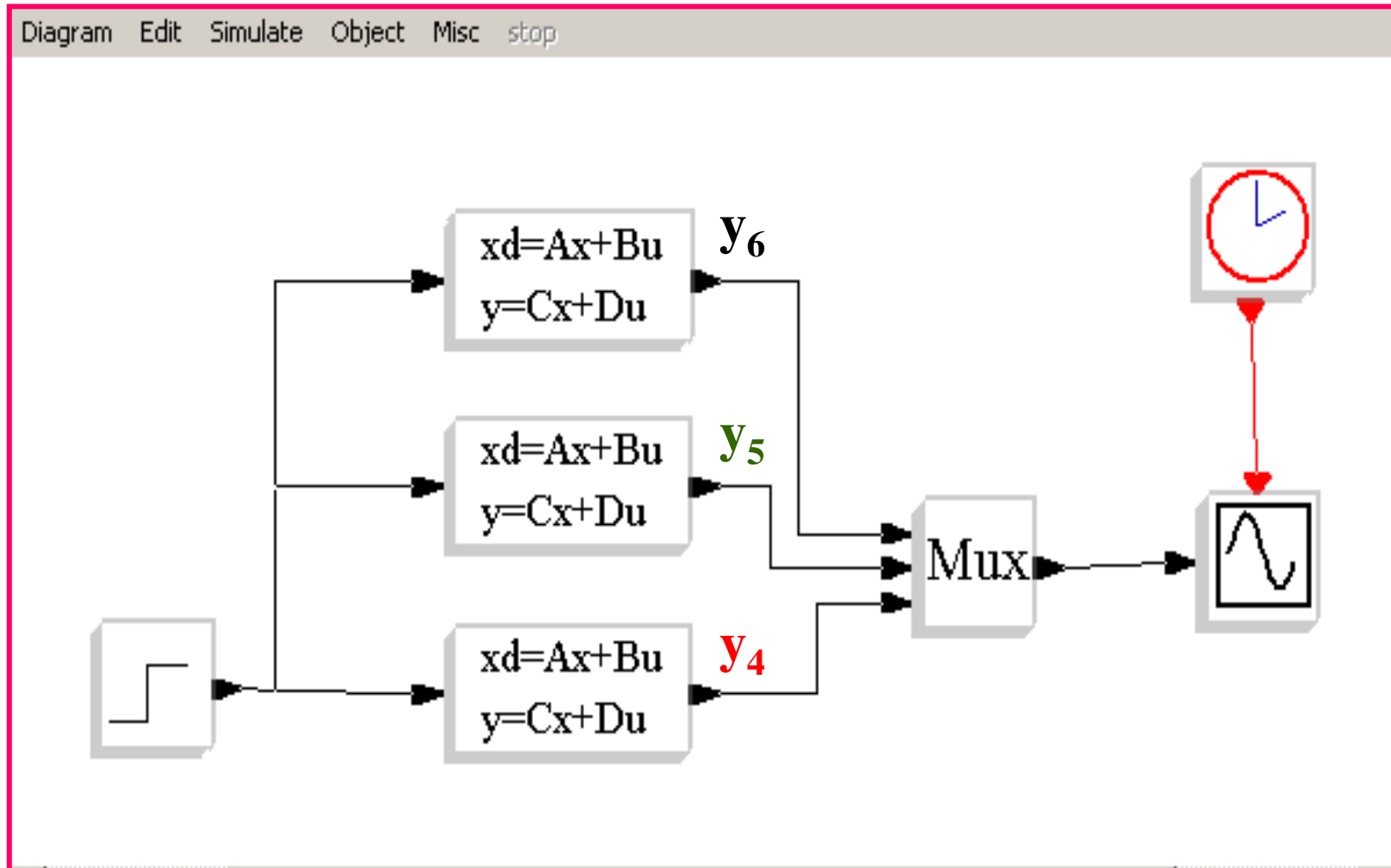
-->A2=[0 1;-K2/M2 -h2/M2]; B2=[0;1/M2]; C=[1 0]; D=0;

-->A3=[0 1;-K3/M3 -h3/M3]; B3=[0;1/M3]; C=[1 0]; D=0;

--> scicos

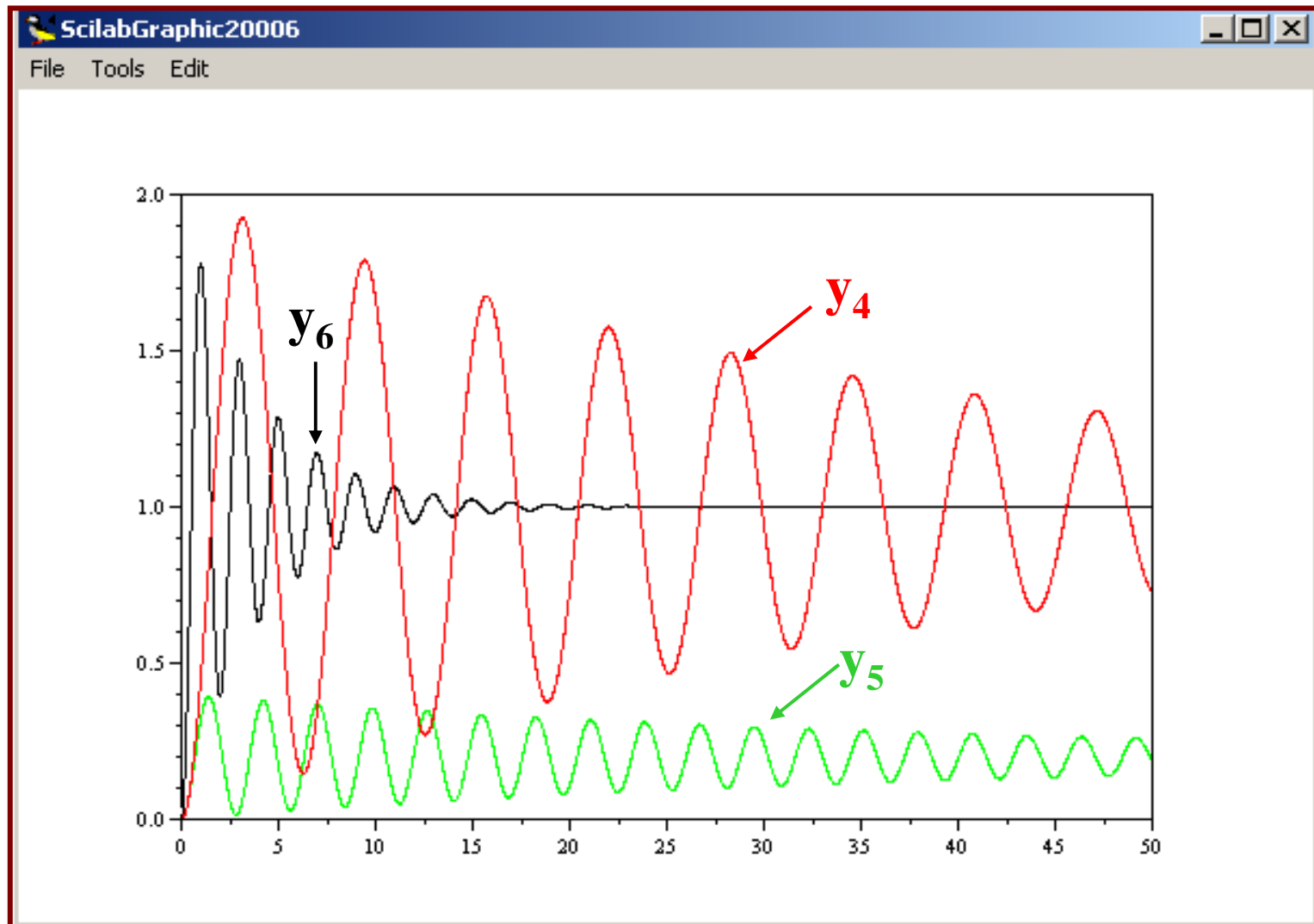
# Sistemi Lineari del 2° Ordine (22)

Schema in Scicos del modello Molla Massa Smorzatore viscoso







# Sistemi Lineari del 2° Ordine (23)



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (24)

Dalla simulazione si è constatato quanto segue:

- **tutte le uscite tendono ad un valore costante**  
(le uscite  $y_1$  e  $y_2$  tendono a 0); 
- **tale valore è dato da  $(D - C \cdot A^{-1} \cdot B \cdot u)$** ; 
- **al diminuire di  $h$  l'uscita diventa di tipo oscillante**  
(confronta le uscite  $y_3$  e  $y_4$ );
- **al decrescere della costante elastica  $K$  e/o al crescere della massa  $M$  la frequenza decresce** (uscite  $y_4, y_5, y_6$ ).

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (25)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

**Sistema con poli reali e distinti, privo di zeri aggiuntivi**

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{\mu}{T_1 T_2} \frac{1}{(s+1/T_1)(s+1/T_2)} = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

in cui si devono intendere le posizioni seguenti:

$$s_1 = p_1 = -\frac{1}{T_1}; \quad s_2 = p_2 = -\frac{1}{T_2}; \quad \text{con: } T_1 > 0, T_2 > 0$$

$\mu$  = guadagno

$$\omega_n^2 = \frac{1}{T_1 T_2} = p_1 p_2 \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \sqrt{p_1 p_2}$$

$\omega_n$  = pulsazione naturale  
 $\xi$  = smorzamento

$$2\xi \omega_n = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = (T_1 + T_2) \omega_n^2 \Rightarrow 2\xi = \frac{(T_1 + T_2) \omega_n^2}{\omega_n} = \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}} = -\frac{p_1 + p_2}{\sqrt{p_1 p_2}}$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (26)

**Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$**

**La Trasformata di Laplace della risposta al Gradino unitario è determinata dalla relazione:**

$$Y(s) = U(s)G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\mu}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

**Il teorema del valore iniziale e la proprietà della derivata assicurano che:**

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ s \cdot \frac{\mu}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = 0$$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \dot{Y}(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \{ s \cdot [sY(s) - y(0)] \} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \ddot{Y}(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ s \cdot \left[ s^2 Y(s) - \dot{y}(0) \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 Y(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu s^2}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = \frac{\mu}{T_1 T_2} > 0$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (26a)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

**Sistema con poli reali e distinti, privo di zeri aggiuntivi**

Il teorema del valore finale, applicabile per sistemi asintoticamente stabili, ovvero con poli nel semipiano sinistro della variabile  $s$ , assicura che:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{\mu}{s \cdot (1 + sT_1) \cdot (1 + sT_2)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{(1 + sT_1) \cdot (1 + sT_2)} = \mu$$

La risposta al gradino unitario parte da zero, presenta in  $t=0$  una tangente orizzontale, ha la concavità rivolta verso l'alto. Il valore di regime è  $\mu$

La risposta al gradino unitario  $y(t)$  è determinata dall'antitrasformata della funzione  $Y(s)$  e si ottiene con il metodo di Heaviside o dei residui.

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1} \left[ \frac{\mu}{s \cdot (1 + sT_1) \cdot (1 + sT_2)} \right] = \mu \cdot \left( 1 - \frac{T_1 \cdot e^{-t/T_1}}{T_1 - T_2} + \frac{T_2 \cdot e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2} \right)$$

La risposta al gradino unitario  $y(t)$  è definita per  $t \geq 0$ .

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (26b)

**Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$**

**Calcolo analitico della funzione  $y(t)$  come antitrasformata della funzione  $Y(s)$  mediante la procedura dei limiti di Heaviside.**

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{\mu}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}\right] = \frac{\mu}{T_1T_2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s \cdot [s + (1/T_1)] \cdot [s + (1/T_2)]}\right\}$$

$$y(t) = \frac{\mu}{T_1T_2} L^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{[s + (1/T_1)]} + \frac{C}{[s + (1/T_2)]}\right] \quad \leftarrow \text{Sviluppo in fratti semplici}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s}{s \cdot [s + (1/T_1)] \cdot [s + (1/T_2)]} \right] = T_1T_2$$

$$B = \lim_{s \rightarrow (-1/T_1)} \left[ \frac{[s + (1/T_1)]}{s \cdot [s + (1/T_1)] \cdot [s + (1/T_2)]} \right] = -\frac{T_1^2T_2}{T_1 - T_2}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow (-1/T_2)} \left[ \frac{[s + (1/T_2)]}{s \cdot [s + (1/T_1)] \cdot [s + (1/T_2)]} \right] = \frac{T_1T_2^2}{T_1 - T_2}$$

**Poiché il grado “n” del denominatore di  $Y(s)$  supera di 2 il grado “m” del numeratore di  $Y(s)$ , cioè:  $(m-n) \geq 2$ , allora si verifica che:**  
 **$A+B+C=0$**

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (26c)

**Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$**

**Sistema con poli reali e distinti, privo di zeri aggiuntivi**

**Determinazione analitica della risposta  $y(t)$  al gradino unitario  $u(t)=sca(t)$  mediante la procedura dei limiti di Heaviside.**

$$y(t) = \frac{\mu}{T_1 T_2} L^{-1} \left[ \frac{T_1 T_2}{s} - \frac{T_1^2 T_2}{T_1 - T_2} \cdot \frac{1}{[s + (1/T_1)]} + \frac{T_1 T_2^2}{T_1 - T_2} \frac{1}{[s + (1/T_2)]} \right]$$

$$y(t) = \frac{\mu \cdot (T_1 T_2)}{T_1 T_2} L^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \frac{1}{[s + (1/T_1)]} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \frac{1}{[s + (1/T_2)]} \right]$$

$$y(t) = \mu \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] - \frac{T_1}{T_1 - T_2} L^{-1} \left[ \frac{1}{s + (1/T_1)} \right] + \frac{T_2}{T_1 - T_2} L^{-1} \left[ \frac{1}{s + (1/T_2)} \right] \right\}$$

$$y(t) = \mu \cdot \left( 1 - \frac{T_1 \cdot e^{-t/T_1}}{T_1 - T_2} + \frac{T_2 \cdot e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2} \right) \quad t \geq 0$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (27)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

Si definiscano in ambiente Scilab i seguenti *sistemi lineari* del **secondo ordine** tramite le rispettive **funzioni di trasferimento**:

```
-->num=poly([5 0],'s','c');
```

```
-->den=poly([1 1],'s','c');
```

$$\mu=5 ; T_1=1 ; T_2=\text{variabile}$$

```
-->den1=poly([1 1.5],'s','c');
```

```
-->giesse1=syslin('c',num,den*den1);
```

$$G_1(s) = \frac{5}{(1+s)(1+1,5s)}$$

```
-->den2=poly([1 0.5],'s','c');
```

```
-->giesse2=syslin('c',num,den*den2);
```

$$G_2(s) = \frac{5}{(1+s)(1+0,5s)}$$

```
-->den3=poly([1 0.2],'s','c');
```

```
-->giesse3=syslin('c',num,den*den3);
```

$$G_3(s) = \frac{5}{(1+s)(1+0,2s)}$$



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (27a)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

Risposta  $y(t)$  al gradino unitario  $u(t)=sca(t)$  del sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

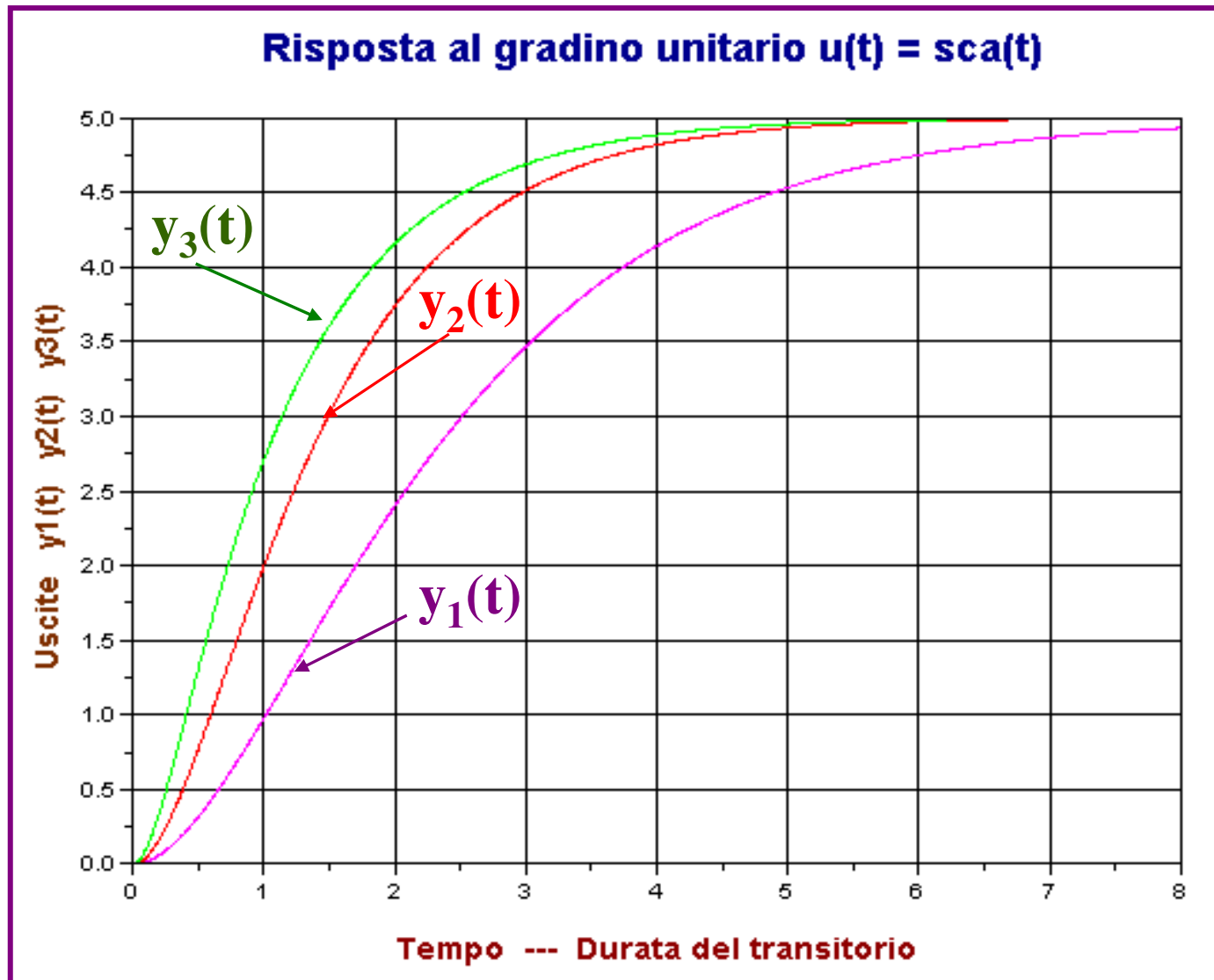
Si determinano le rispettive **risposte** al **gradino unitario**  $u(t)$ , in ambiente **Scilab**, con le **istruzioni** seguenti:

```
--> t=0:0.005:8;  
--> y1=csim('step', t, giesse1);  
--> y2=csim('step', t, giesse2);  
--> y3=csim('step', t, giesse3);  
--> plot(t, y1, t, y2, t, y3), xgrid
```

La durata del transitorio è legata alle due costanti di tempo  $T_1$  e  $T_2$ ; se molto diverse fra loro, il tempo di assestamento dipende solo dalla costante di tempo più grande.

**Tempo di Assestamento  $T_a$ :** è il tempo impiegato dalla risposta  $y(t)$  ad entrare definitivamente in una fascia compresa tra  $\pm 1\%$  del valore finale di regime. **Definisce la durata del transitorio.**

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (27b)



$y_3(t)$   
↕  
 $G_3(s)$

$y_2(t)$   
↕  
 $G_2(s)$

$y_1(t)$   
↕  
 $G_1(s)$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (28)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

**Sistema con poli reali coincidenti, privo di zeri aggiuntivi**

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \xrightarrow{(T_1=T_2=T)} G(s) = \frac{\mu}{T^2} \frac{1}{(s+1/T)^2} = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

in cui si devono intendere le posizioni seguenti:

$$s_1 = p_1 = -\frac{1}{T}; \quad s_2 = p_2 = -\frac{1}{T}; \quad \text{con: } T > 0$$

$\mu$  = guadagno

$$\omega_n^2 = p_1 p_2 = p^2 = \frac{1}{T^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{T^2}} = \frac{1}{T} = p$$

$\omega_n$  = pulsazione naturale

$$2\xi\omega_n = \frac{T+T}{T \cdot T} = 2T\omega_n^2 \Rightarrow \xi = \frac{2T\omega_n^2}{2\omega_n} = \frac{2T}{2T} = 1$$

$\xi$  = smorzamento  
critico

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (28a)

**Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$**

**Calcolo analitico della funzione  $y(t)$  mediante l'antitrasformata della funzione  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$**

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{\mu}{s \cdot (1 + sT)^2}\right] = \frac{\mu}{T^2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s \cdot [s + (1/T)]^2}\right\}$$

$$y(t) = \frac{\mu}{T^2} L^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{[s + (1/T)]} + \frac{C}{[s + (1/T)]^2}\right] \leftarrow \text{Sviluppo in fratti semplici}$$

**Applicando il principio di identità dei polinomi si ottiene:**

$$A[s + (1/T)]^2 + Bs[s + (1/T)] + Cs = 1$$

$$As^2 + Bs^2 + (2As/T) + (Bs/T) + Cs + (A/T^2) = 1$$

$$(A + B)s^2 + \left(\frac{2A}{T} + \frac{B}{T} + C\right)s + \frac{A}{T^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B + CT = 0 \\ A = T^2 \end{cases}$$

$A = T^2$
$B = -T^2$
$C = -T$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (28b)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

**Sistema con poli reali coincidenti, privo di zeri aggiuntivi**  
**Determinazione analitica della risposta  $y(t)$  al gradino unitario  $u(t)=sca(t)$  con l'antitrasformata della funzione  $Y(s)=G(s) \cdot U(s)$**

$$y(t) = \frac{\mu}{T^2} L^{-1} \left[ \frac{T^2}{s} - \frac{T^2}{[s + (1/T_1)]} - \frac{T}{[s + (1/T_2)]^2} \right]$$

$$y(t) = \frac{\mu \cdot T^2}{T^2} L^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{[s + (1/T)]} - \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{[s + (1/T)]^2} \right]$$

$$y(t) = \mu \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] - L^{-1} \left[ \frac{1}{[s + (1/T)]} \right] - \frac{1}{T} L^{-1} \left[ \frac{1}{[s + (1/T)]^2} \right] \right\}$$

$$y(t) = \mu \cdot \left( 1 - e^{-t/T} - \frac{1}{T} t \cdot e^{-t/T} \right) \quad t \geq 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y(\infty) = \mu$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{\mu}{T^2}$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (28c)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

**Sistema con poli reali coincidenti, privo di zeri aggiuntivi**

Si definiscono in **ambiente Scilab** i seguenti *sistemi lineari* del **secondo ordine** tramite le rispettive **funzioni di trasferimento**:

$$\mu=2 ; \xi=1$$

```
-->num=poly([2 0],'s','c');
```

```
-->den1=poly([1 0.5],'s','c')^2;
```

```
-->giesse1=syslin('c',num,den1);
```

$$G_1(s) = \frac{2}{(1 + 0,5s)^2}$$

```
-->den2=poly([1 1],'s','c')^2;
```

```
-->giesse2=syslin('c',num,den2);
```

$$G_2(s) = \frac{2}{(1 + s)^2}$$

```
-->den3=poly([1 2],'s','c')^2;
```

```
-->giesse3=syslin('c',num,den3);
```

$$G_3(s) = \frac{2}{(1 + 2s)^2}$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (28d)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

Risposta  $y(t)$  al gradino unitario  $u(t)=sca(t)$  del sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

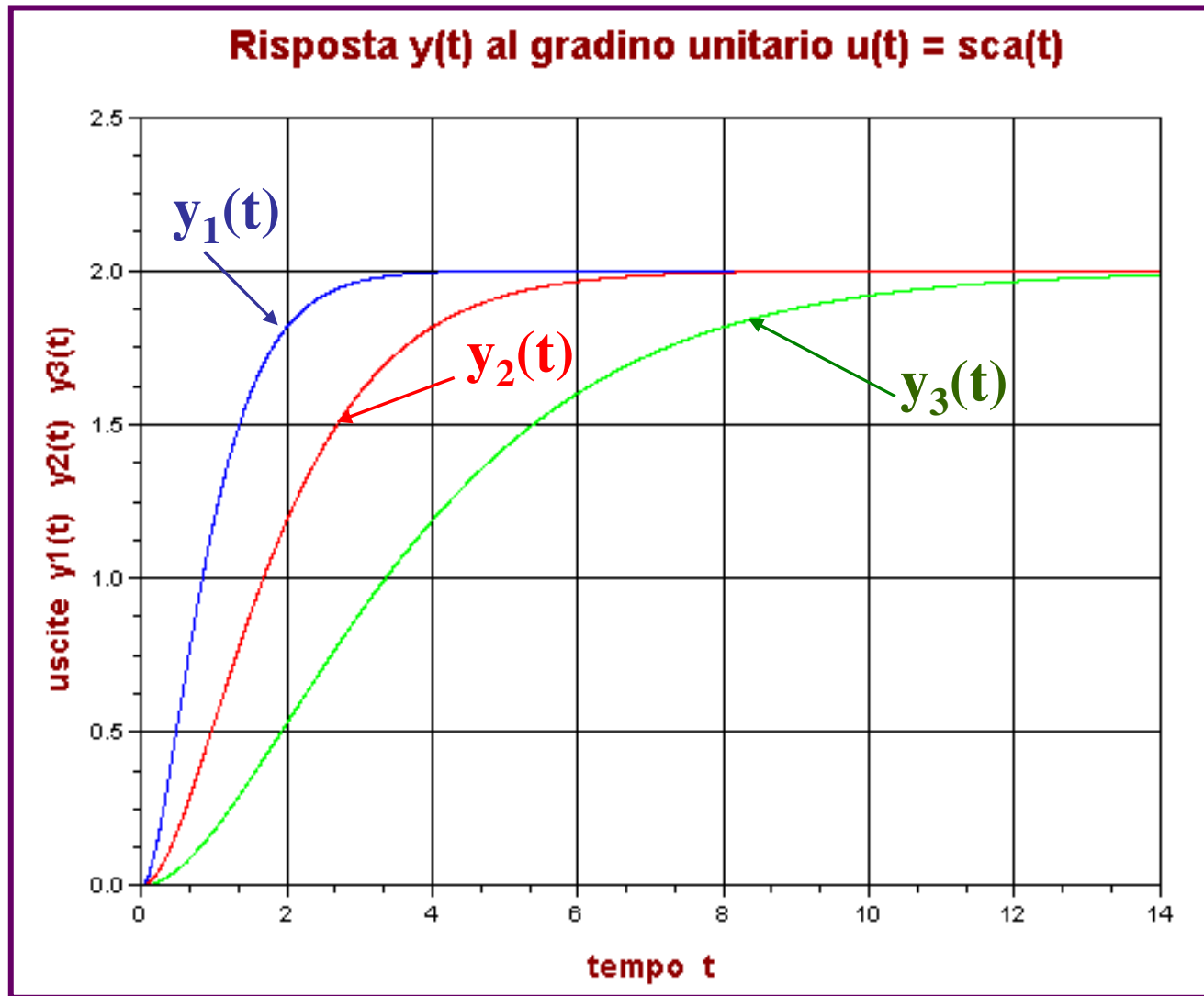
Si determinano le rispettive **risposte** al **gradino unitario**  $u(t)$ , in ambiente **Scilab**, con le **istruzioni** seguenti:

```
--> t=0:0.005:14;
--> y1=csim('step', t, giesse1);
--> y2=csim('step', t, giesse2);
--> y3=csim('step', t, giesse3);
--> plot(t, y1, t, y2, t, y3), xgrid
```

La durata del transitorio è legata alla costante di tempo  $T$ ; nel caso di poli reali e coincidenti, il tempo di assestamento, con una buona approssimazione, è fornito dalla relazione:  $T_a = 6,6 \cdot T$

**Tempo di Assestamento  $T_a$** : è il tempo impiegato dalla risposta  $y(t)$  ad entrare definitivamente in una fascia compresa tra  $\pm 1\%$  del valore finale di regime. **Definisce la durata del transitorio.**

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (28e)



$y_1(t)$   
↑  
 $T=0,5$

$y_2(t)$   
↑  
 $T=1$

$y_3(t)$   
↑  
 $T=2$



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (29)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

$$G(s) = \frac{\mu b}{s^2 + as + b} = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \longleftrightarrow a = 2\xi \omega_n \quad b = \omega_n^2$$

in cui si devono intendere le posizioni seguenti:

$\mu$  = guadagno

$\omega_n$  = pulsazione naturale

$\xi$  = smorzamento

$$\Delta = (a^2 - 4b) = (4\xi^2 \omega_n^2 - 4\omega_n^2) = 4\omega_n^2 (\xi^2 - 1)$$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \xi > 1 \rightarrow$  due poli reali distinti, ubicati nel semipiano sinistro  
 $\rightarrow$  sistema asintoticamente stabile

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = 1 \rightarrow$  due poli reali coincidenti, ubicati nel semipiano sinistro  
 $\rightarrow$  sistema asintoticamente stabile

$\Delta < 0 \Rightarrow 0 < \xi < 1 \rightarrow$  due poli complessi e coniugati a parte reale negativa  
 $\rightarrow$  sistema asintoticamente stabile

$\Delta < 0 \Rightarrow \xi = 0 \rightarrow$  due poli complessi e coniugati siti sull'asse immaginario  
 $\rightarrow$  sistema assolutamente o semplicemente stabile

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (30)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

$$G(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \xi > 1$$

$$s_1 = p_1 = -\xi \omega_n (1 + \sqrt{\xi^2 - 1}) \quad s_2 = p_2 = -\xi \omega_n (1 - \sqrt{\xi^2 - 1})$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$$

$$s_1 = p_1 = -\xi \omega_n = -\omega_n \quad s_2 = p_2 = -\xi \omega_n = -\omega_n$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \xi < 1$$

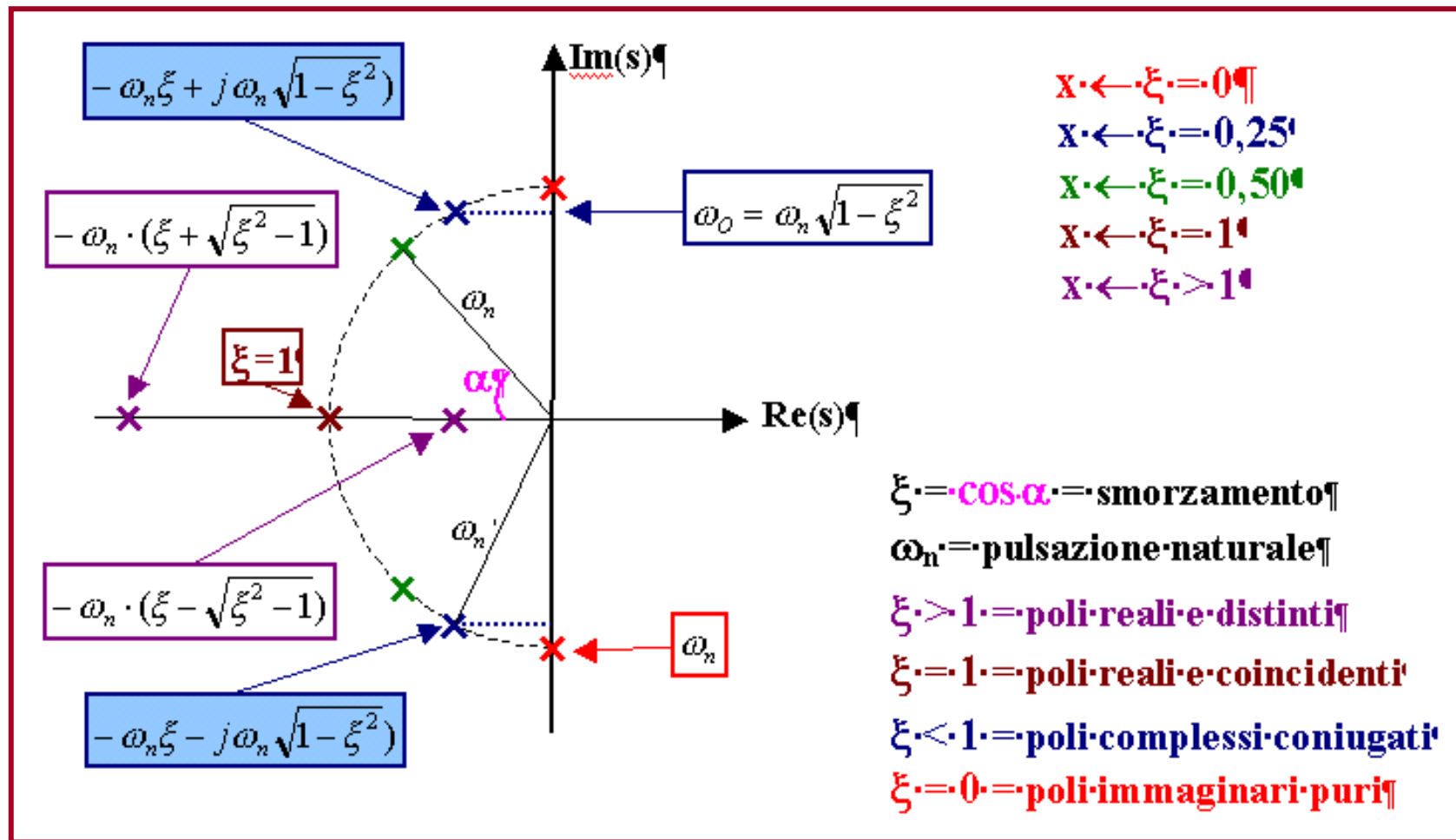
$$s_1 = p_1 = -\xi \omega_n (1 + j\sqrt{1 - \xi^2}) \quad s_2 = p_2 = -\xi \omega_n (1 - j\sqrt{1 - \xi^2})$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \xi = 0$$

$$s_1 = p_1 = -j\omega_n \quad s_2 = p_2 = +j\omega_n$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (31)

Rappresentazione cartesiana dei poli al variare dello smorzamento  $\xi$  con pulsazione naturale non smorzata  $\omega_n$  costante



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (32)

**Sistema con poli complessi e coniugati, senza zeri aggiuntivi**  
**La Trasformata di Laplace della risposta al Gradino unitario**  
**è determinata dalla relazione:**

$$Y(s) = U(s)G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

**Il teorema del valore iniziale e la proprietà della derivata assicurano che:**

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ s \cdot \frac{1}{s} \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = 0$$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \dot{Y}(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \{s \cdot [sY(s) - y(0)]\} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu\omega_n^2 s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \ddot{Y}(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ s \cdot \left[ s^2 Y(s) - \dot{y}(0) \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 Y(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu\omega_n^2 s^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \mu\omega_n^2 > 0$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (32a)

**Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$**

**Sistema con poli complessi e coniugati, senza zeri aggiuntivi**

**Il teorema del valore finale, applicabile per sistemi asintoticamente stabili, ovvero con poli siti nel semipiano sinistro della variabile  $s$ , assicura che:**

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{\mu \omega_n^2}{s \cdot (s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} = \mu$$

**La risposta al gradino unitario parte da zero, presenta in  $t=0$  una tangente orizzontale, ha la concavità rivolta verso l'alto. Il valore di regime è  $\mu$**

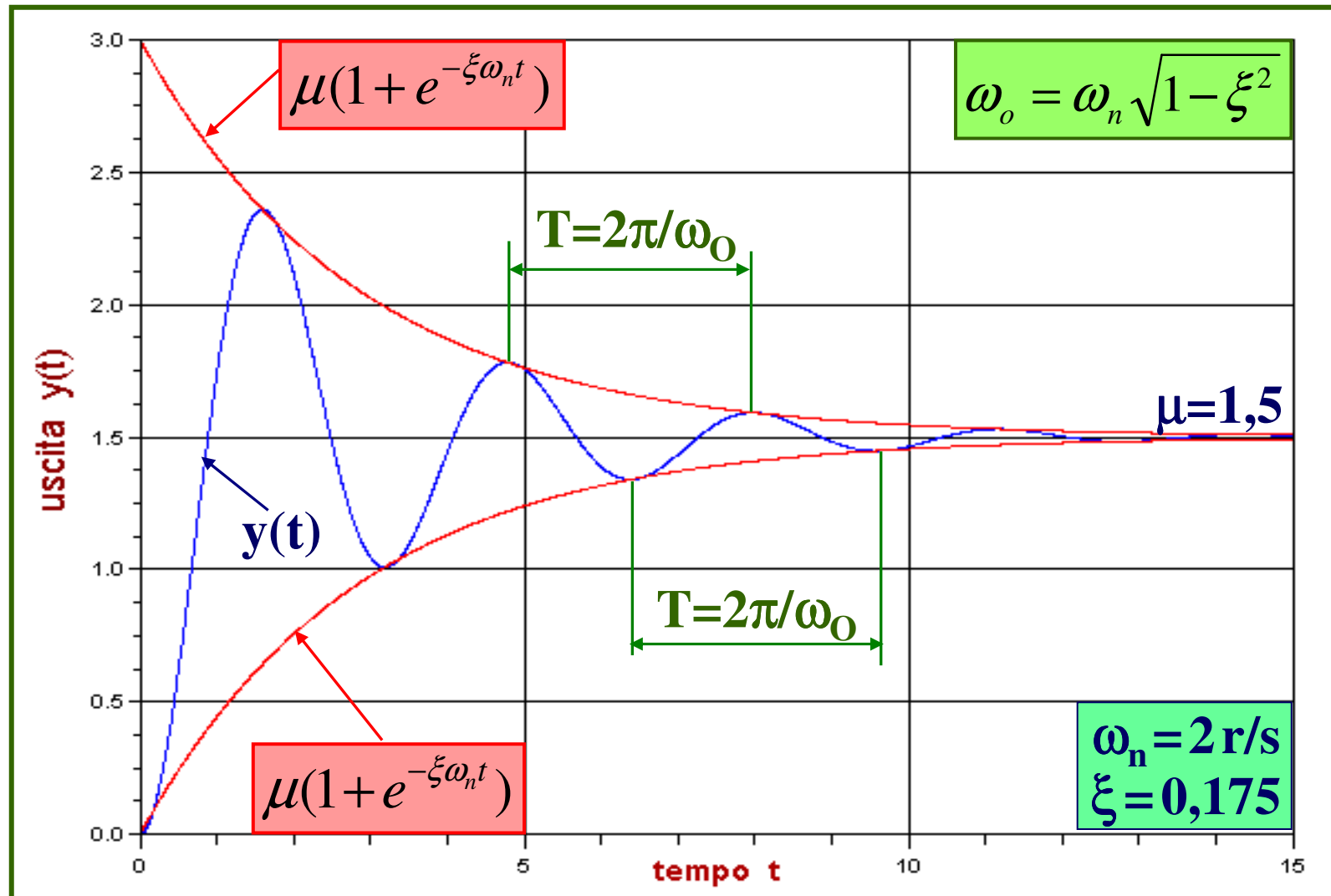
**La risposta al gradino unitario  $y(t)$  è determinata dall'antitrasformata della funzione  $Y(s)$  e si ottiene con il metodo di Heaviside o dei residui.**

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1} \left[ \frac{\mu \omega_n^2}{s \cdot (s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)} \right] = \mu \cdot \left( 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2} + \alpha) \right)$$

**in cui è:  $\alpha = \arccos(\xi)$ . La risposta al gradino unitario  $y(t)$  è definita per  $t \geq 0$**

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (32b)

Risposta  $y(t)$  al gradino unitario  $u(t)=sca(t)$  per  $0 < \xi < 1$



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (32c)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

Sistema con poli complessi e coniugati, senza zeri aggiuntivi

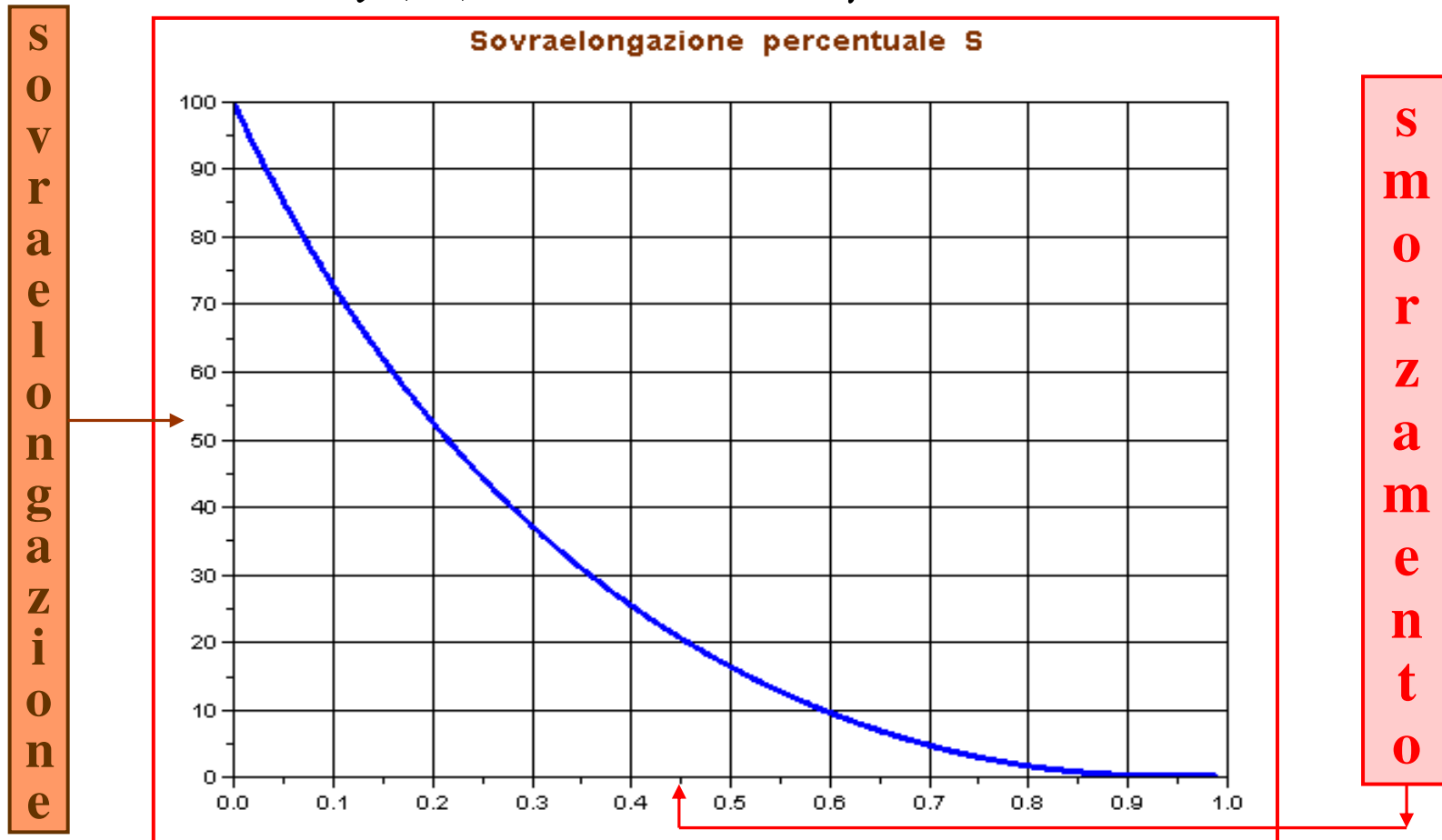
Per  $0 < \xi < 1$ , la risposta  $y(t)$  al gradino unitario  $u(t) = \text{sca}(t)$ , ha l'andamento di una sinusoide smorzata, invilupata da due esponenziali decrescenti che convergono, attesa la **stabilità asintotica** del sistema che presenta poli complessi coniugati a parte reale negativa.

Sempre nel caso di sistema **asintoticamente stabile**,  $0 < \xi < 1$ , la **sovraelongazione percentuale massima**  $S_E$ , definita come il rapporto tra l'escursione del primo picco della risposta  $y(t)$  rispetto al valore  $y(\infty)$  conseguito a regime ed il valore  $y(\infty)$  di regime stesso, dipende solo ed esclusivamente dal **fattore di smorzamento**  $\xi$ .

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (32d)

Sistema con poli complessi e coniugati, senza zeri aggiuntivi

$$S_E = 100 \cdot \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} = 100 \cdot \frac{y_{\max} - \mu}{\mu} = 100 \cdot e^{-(\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2})}$$





# Sistemi Lineari del 2° Ordine (32e)

**Sistema a poli puramente immaginari, senza zeri aggiuntivi**

**Risposta  $y(t)$  al gradino unitario  $u(t)=sca(t)$  per  $\xi=0$**

**La Trasformata di Laplace della risposta al Gradino unitario, nel caso di  $\xi=0$ , viene espressa dalla seguente relazione:**

$$G(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} = \frac{\mu\omega_n^2}{(s + j\omega_n)(s - j\omega_n)} \Rightarrow Y(s) = U(s)G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

**Determinazione analitica della risposta  $y(t)$  al gradino unitario  $u(t)=sca(t)$  con l'antitrasformata della funzione  $Y(s)=G(s)\cdot U(s)$**

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{\mu\omega_n^2}{s \cdot (s^2 + \omega_n^2)}\right] = \mu L^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s^2 + \omega_n^2)}\right]$$

$$y(t) = \mu \left\{ L^{-1}\left[\frac{A}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{Bs + C}{(s^2 + \omega_n^2)}\right] \right\}$$

**Applicando il principio di identità dei polinomi si ottiene:**

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (32f)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

Sistema a poli puramente immaginari, senza zeri aggiuntivi

Risposta  $y(t)$  al gradino unitario  $u(t)=sca(t)$  per  $\xi=0$

$$A \cdot (s^2 + \omega)^2 + (Bs + C) \cdot s = \omega_n^2$$

$$As^2 + Bs^2 + Cs + A\omega_n^2 = \omega_n^2$$

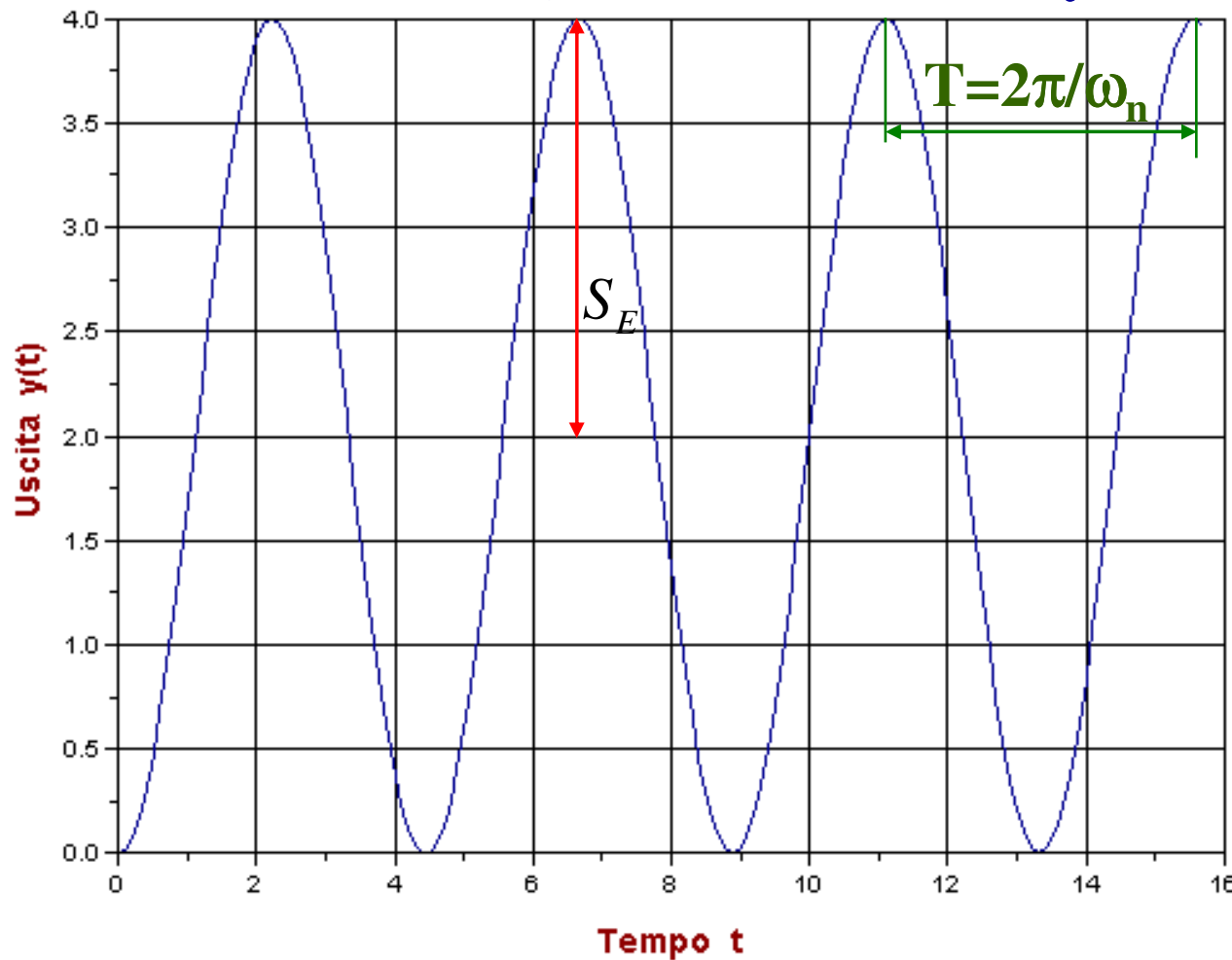
$$(A+B)s^2 + Cs + A\omega_n^2 = \omega_n^2 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A\omega_n^2 = \omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{|l|} \hline \mathbf{A = 1} \\ \mathbf{B = -1} \\ \mathbf{C = 0} \\ \hline \end{array}$$

$$y(t) = \mu \left\{ L^{-1} \left[ \frac{A}{s} \right] + L^{-1} \left[ \frac{Bs+C}{(s^2 + \omega_n^2)} \right] \right\} = \mu \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] - L^{-1} \left[ \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right] \right\}$$

$$\boxed{y(t) = \mu \cdot [1 - \cos(\omega_n t)] \quad t \geq 0} \longrightarrow \text{Cosinusoide di pulsazione } \omega_n \text{ e valore medio } \mu$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (32g)

Risposta  $y(t)$  al gradino unitario con  $\xi = 0$



$$\mu = 2$$

$$\omega_n^2 = 2$$

$$\xi = 0$$

$$S_E = 2\mu$$

$$G(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 2}$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (33)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

**Sistema con poli complessi e coniugati, senza zeri aggiuntivi**

Si definiscano in **ambiente Scilab** i seguenti *sistemi lineari* del **secondo ordine** tramite le rispettive **funzioni di trasferimento**:

$$\mu = 1 ; \omega_n = 2 \text{ rad/sec}$$

-->num=poly([4 0],'s','c');

-->den1=poly([4 1 1],'s','c');

-->giesse1=syslin('c',num,den1);

$$G_1(s) = \frac{4}{s^2 + s + 4}$$

-->den2=poly([4 2 1],'s','c');

-->giesse2=syslin('c',num,den2);

$$G_2(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

-->den3=poly([4 4 1],'s','c');

-->giesse3=syslin('c',num,den3);

$$G_3(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 4}$$

## Sistemi Lineari del 2° Ordine (34)

Sistema con poli complessi coniugati, senza zeri aggiuntivi

I tre sistemi lineari presentano la stessa **pulsazione naturale non smorzata**  $\omega_n = 2\text{rad/sec}$ , ma con diverso **smorzamento**  $\xi$ .

Determiniamo le rispettive **risposte** al **gradino unitario** in **ambiente Scilab** con le istruzioni seguenti:

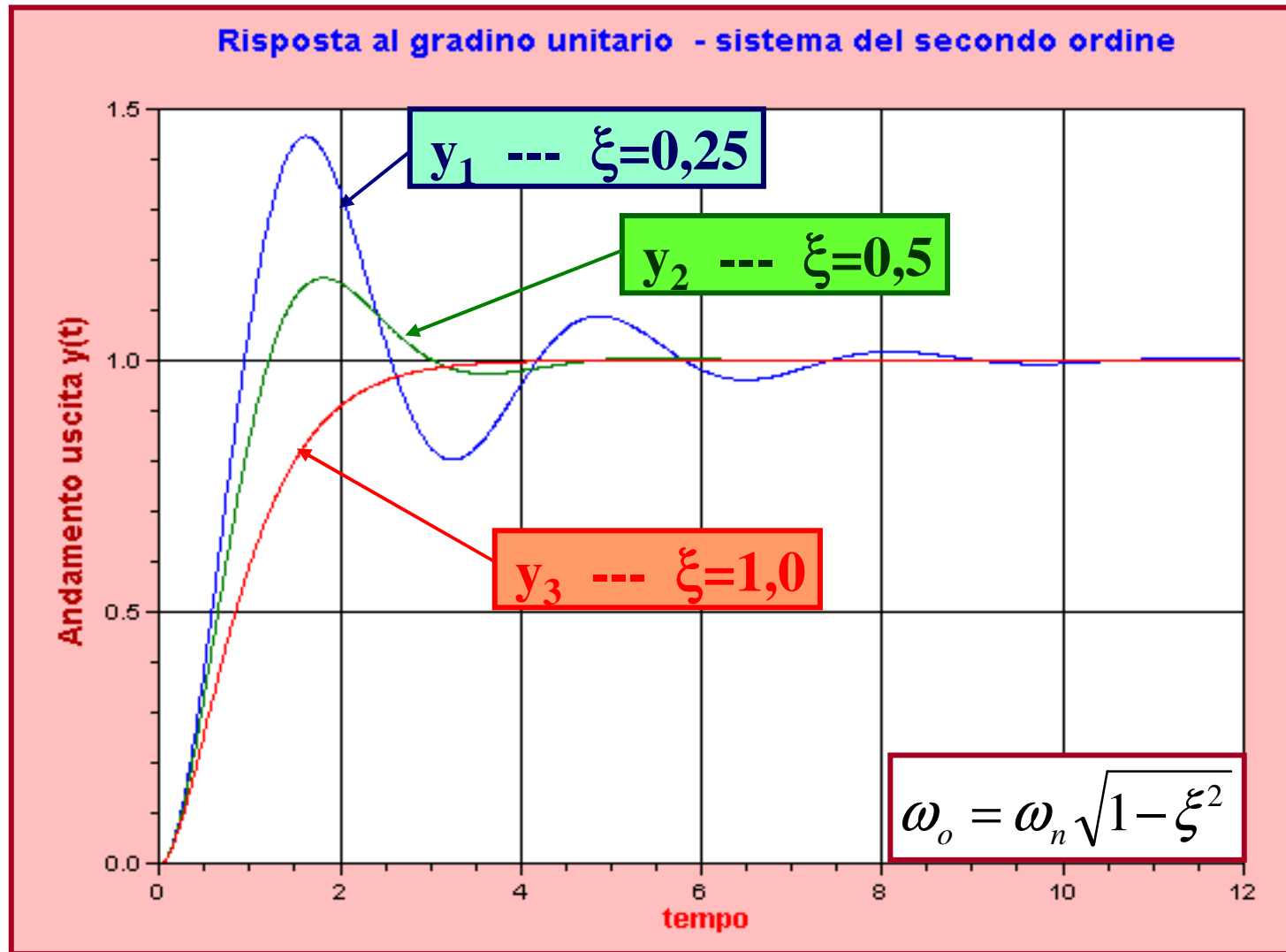
```
-->t=0:0.01:12;  
-->y1=csim('step', t, giesse1);  
-->y2=csim('step', t, giesse2);  
-->y3=csim('step', t, giesse3);  
-->plot(t, y1, t, y2, t, y3), xgrid
```

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

$$\omega_n = \sqrt{b} \quad ; \quad \xi = (a/2\sqrt{b})$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (35)



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (36)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

**Sistema con poli reali e con uno zero aggiuntivo**

Si definiscono in **ambiente Scilab** i seguenti *sistemi lineari* del secondo ordine tramite le rispettive **funzioni di trasferimento**:

-->den=poly([1 0.2], 's', 'c')\*poly([1 0.5], 's', 'c');

-->num1=poly([1 -1], 's', 'c');

-->giesse1=syslin('c', num1, den);

$$G_1(s) = \frac{(1-s)}{(1+0,2s)(1+0,5s)}$$

-->num2=poly([1 1], 's', 'c');

-->giesse2=syslin('c', num2, den);

$$G_2(s) = \frac{(1+s)}{(1+0,2s)(1+0,5s)}$$

-->num3=poly([1 0.25], 's', 'c');

-->giesse3=syslin('c', num3, den);

$$G_3(s) = \frac{(1+0,25s)}{(1+0,2s)(1+0,5s)}$$

-->num4=poly([1 0.125], 's', 'c');

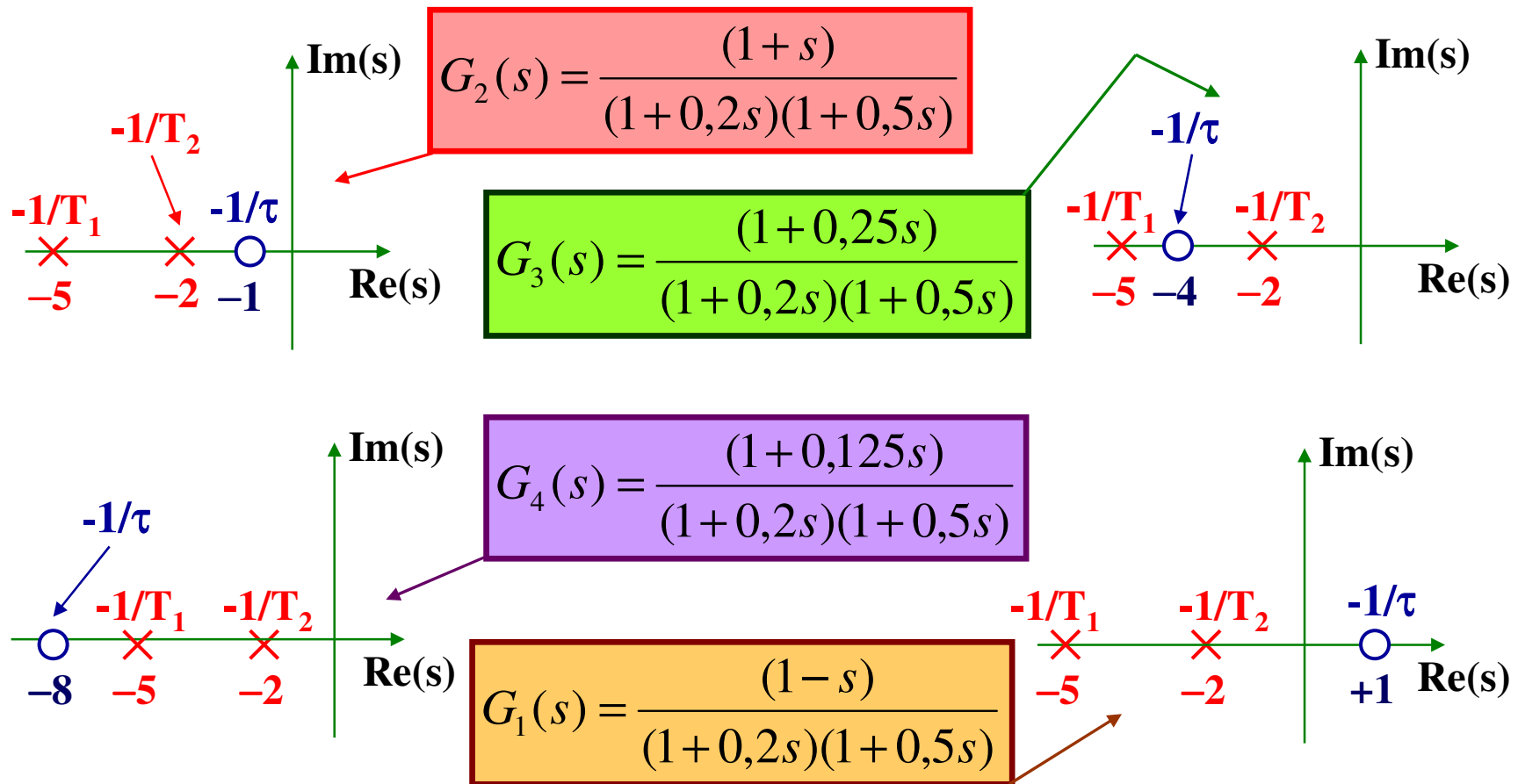
-->giesse4=syslin('c', num4, den);

$$G_4(s) = \frac{(1+0,125s)}{(1+0,2s)(1+0,5s)}$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (37)

Rappresentazione cartesiana dei **poli** e degli **zeri** della F.d.T.

$$p_1 = (-1/T_1) = (-1/0,2) = -5 \quad p_2 = (-1/T_2) = (-1/0,5) = -2$$





# Sistemi Lineari del 2° Ordine (38)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

**Sistema con poli reali e con uno zero aggiuntivo**

I quattro sistemi lineari hanno gli stessi poli reali e negativi, mentre è diversa l'ubicazione dello zero aggiuntivo, che nel sistema  $G_1(s)$  è sito nel semipiano destro. Determiniamo le rispettive **risposte** al **gradino unitario** in ambiente **Scilab** con le istruzioni seguenti:

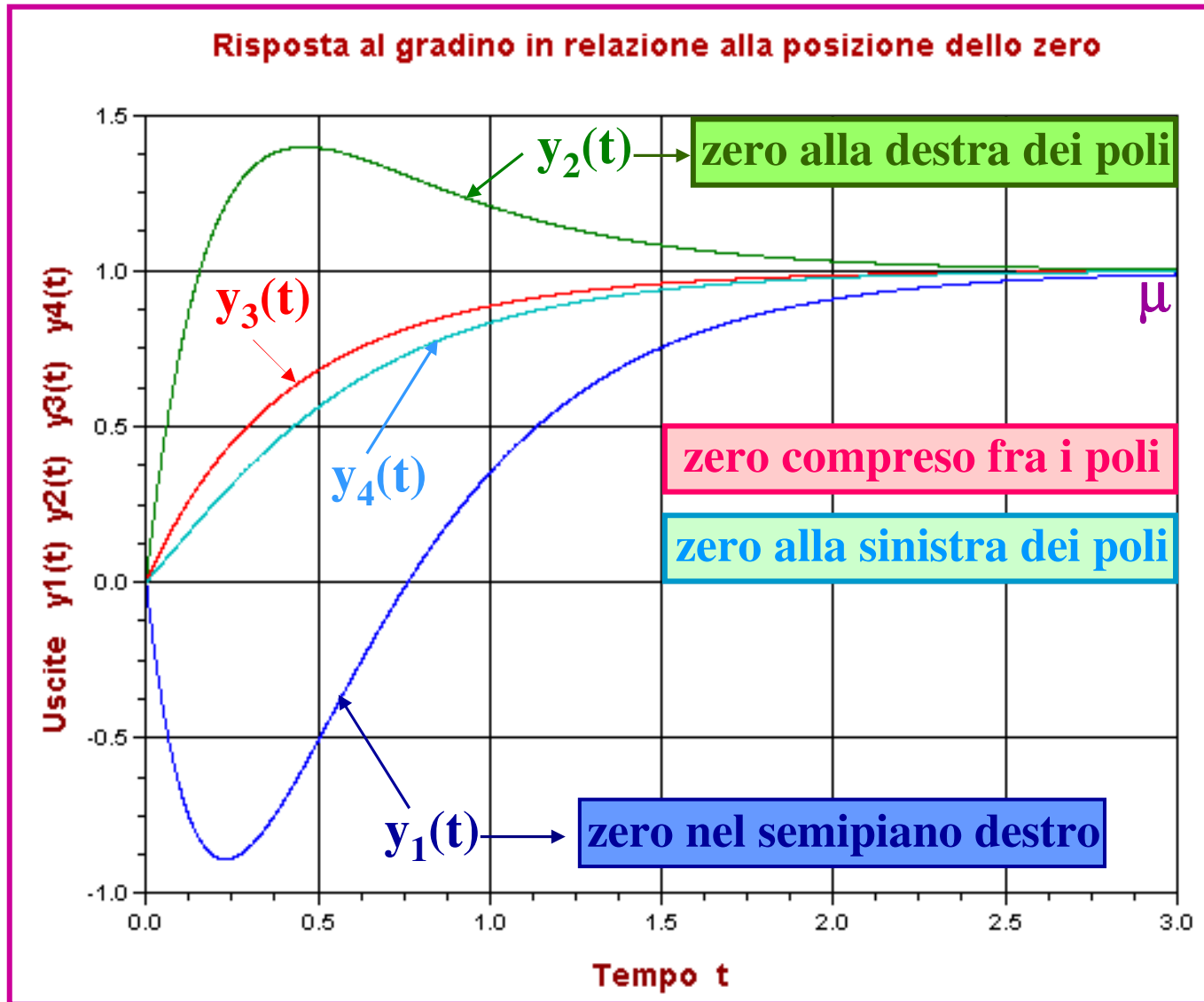
```
-->t=0:0.001:3;  
-->y1=csim('step', t, giesse1);  
-->y2=csim('step', t, giesse2);  
-->y3=csim('step', t, giesse3);  
-->y4=csim('step', t, giesse4);  
-->plot(t,y1,t,y2,t,y3,t,y4),xgrid
```

A diagram showing a small box containing  $\mu=1$  with a downward arrow pointing to a larger box containing the transfer function  $G(s) = \frac{\mu \cdot (1 + \tau s)}{(1 + sT_1) \cdot (1 + sT_2)}$ .

$$G(s) = \frac{\mu \cdot (1 + \tau s)}{(1 + sT_1) \cdot (1 + sT_2)}$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine

(39)



$$\begin{aligned}\mu &= 1 \\ T_1 &= 0,2 \\ T_2 &= 0,5\end{aligned}$$

# Sistemi Lineari del 2° Ordine (40)

Sistema descritto dalla Funzione di Trasferimento  $G(s)$

**Sistema con poli reali o complessi, con zero aggiuntivo**

Si definiscono in **ambiente Scilab** i seguenti *sistemi lineari* del secondo ordine tramite le rispettive **funzioni di trasferimento**:

```
-->num=poly([1 2],'s','c');  
-->den1=poly([4 1 1],'s','c');  
-->giesse1=syslin('c',num,den1);
```

$$G_1(s) = \frac{1 + 2s}{s^2 + s + 4}$$

```
-->den2=poly([4 2 1],'s','c');  
-->giesse2=syslin('c',num,den2);
```

$$G_2(s) = \frac{1 + 2s}{s^2 + 2s + 4}$$

```
-->den3=poly([4 4 1],'s','c');  
-->giesse3=syslin('c',num,den3);
```

$$G_3(s) = \frac{1 + 2s}{s^2 + 4s + 4}$$

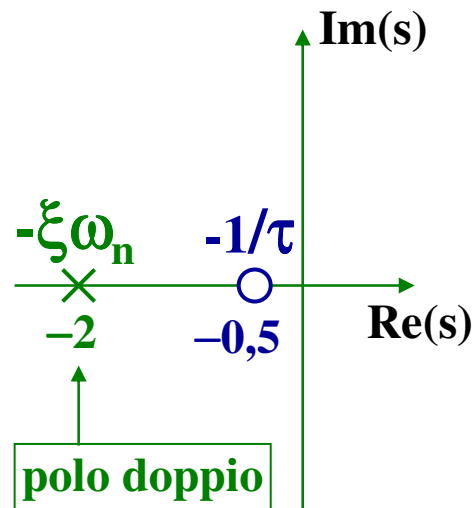
# Sistemi Lineari del 2° Ordine (41)

Rappresentazione cartesiana dei **poli** e degli **zeri** della F.d.T.

$$\omega_n = 2 \quad z = -(1/\tau) = -1/2$$

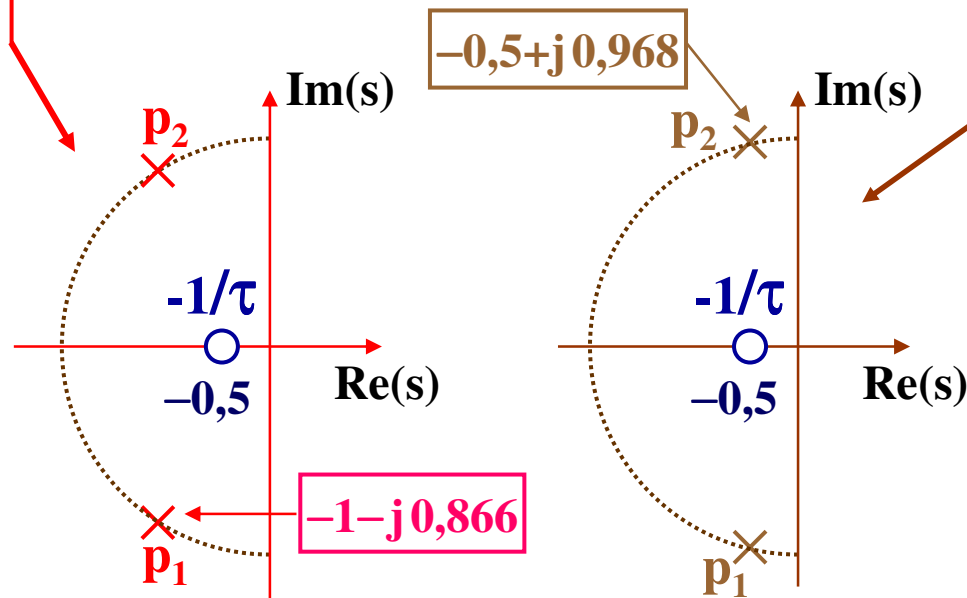
$$\xi = 1$$

$$p_1 = p_2 = -\xi\omega_n = -2$$



$$\xi = (1/2) \quad p_{1,2} = -\xi\omega_n(1 \pm j\sqrt{1-\xi^2})$$

$$\xi = (1/4) \quad p_{1,2} = -\xi\omega_n(1 \pm j\sqrt{1-\xi^2})$$



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (42)

I tre sistemi lineari presentano la stessa **pulsazione naturale non smorzata**  $\omega_n = 2\text{rad/sec}$ , ma con diverso **smorzamento**  $\xi$ .  
Determiniamo le rispettive **risposte** al **gradino unitario** in **ambiente Scilab** con le istruzioni seguenti:

--> **t=0:0.01:12;**

--> **y1=csim('step', t, giesse1);**

--> **y2=csim('step', t, giesse2);**

--> **y3=csim('step', t, giesse3);**

--> **plot(t, y1, t, y2, t, y3), xgrid**

$$G(s) = \frac{1+2s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

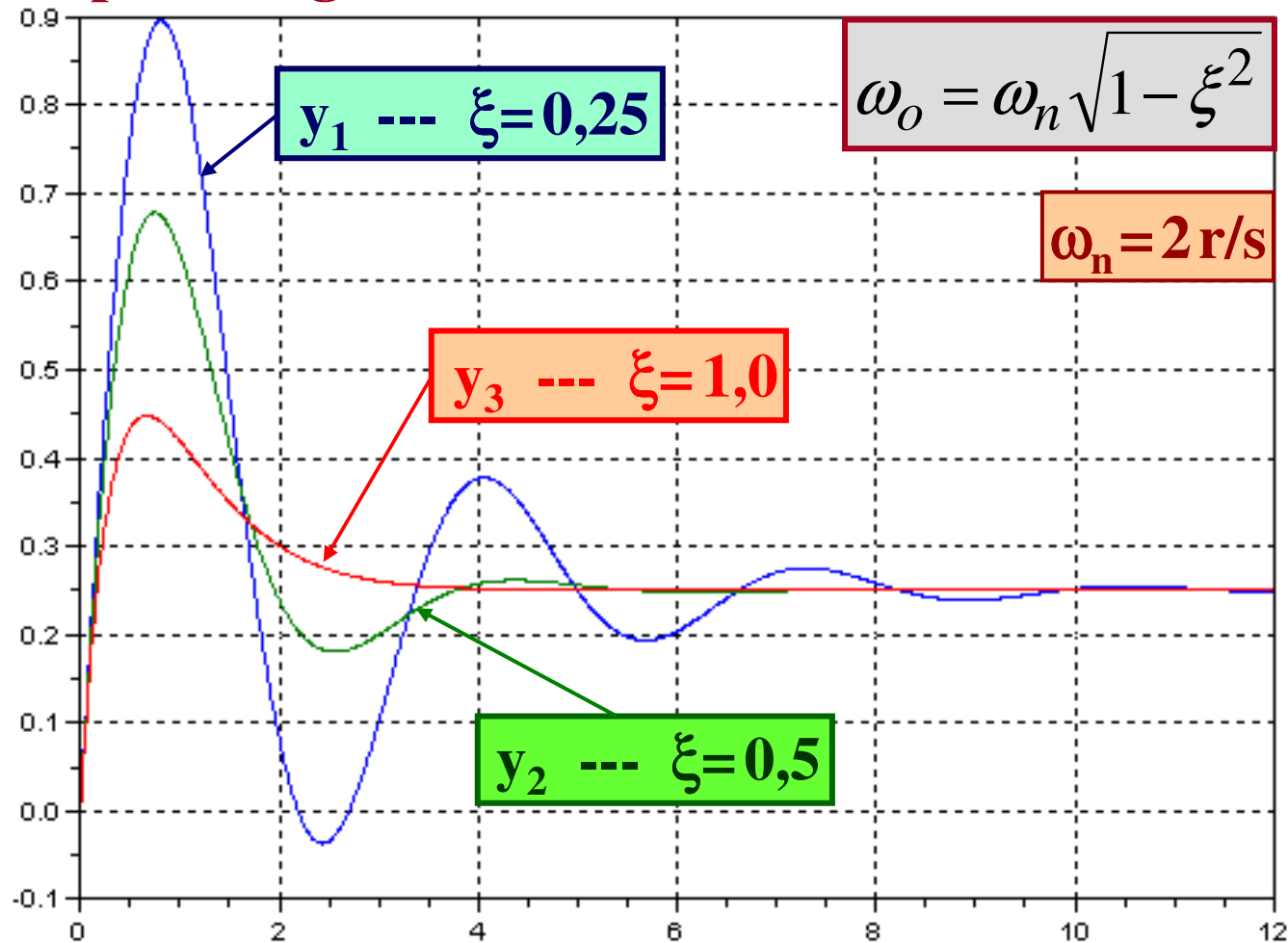
$$G(s) = \frac{1+2s}{s^2 + as + b}$$

$$\tau = 2 \quad \omega_n = \sqrt{b} \quad \xi = (a/2\sqrt{b})$$

$$T_a = 5/(\omega_n \xi)$$

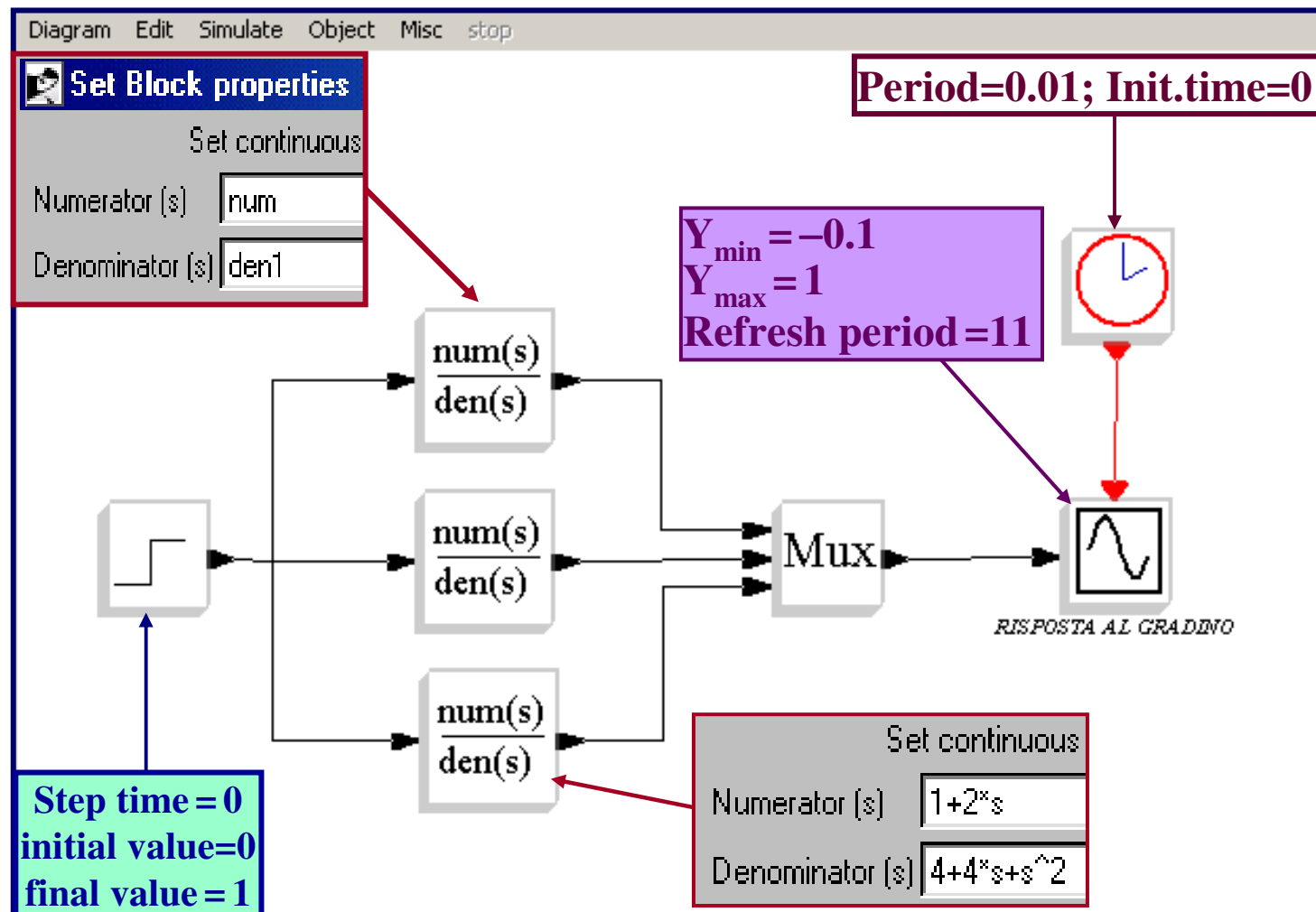
# Sistemi Lineari del 2° Ordine (43)

Risposta al gradino unitario in ambiente SCILAB



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (44)

**Simuliamo** i tre sistemi lineari in **ambiente SCICOS** ed a tale fine si realizza lo schema corrispondente di seguito mostrato.



# Sistemi Lineari del 2° Ordine (45)

## Risposta al gradino unitario in ambiente SCICOS

