

U.D. 8

I regolatori industriali

5.8.1 Introduzione

Molto spesso, soprattutto nel controllo di processi industriali nei quali sono presenti apparati molto complessi, i criteri di stabilità e i metodi di compensazione presentati nei precedenti paragrafi non si possono applicare perché è praticamente impossibile ricavare la esatta funzione di trasferimento del sistema controllato. In tali casi per ottenere dal sistema le prestazioni desiderate si ricorre ad apparecchiature standard note come regolatori o controllori industriali.

Nella sua forma più semplice un regolatore comprende un generatore che fornisce il segnale di riferimento, il nodo sommatore, un amplificatore del segnale e una rete di compensazione. Tramite apposite manopole di regolazione tarate in fabbrica, l'operatore addetto all'impianto può variare i valori di alcuni parametri del regolatore, ad esempio quelli relativi all'amplificatore e alla rete di compensazione, in relazione alle specifiche statiche e dinamiche richieste. I regolatori industriali, i quali si differenziano in base alla relazione matematica che lega il segnale d'uscita e quello d'ingresso della rete di compensazione, si suddividono in regolatori che esplicano azioni:

- proporzionale (**P**);
- integrale (**I**);
- proporzionale e integrale (**PI**);
- derivativa (**D**);
- proporzionale e derivativa (**PD**);
- proporzionale, derivativa e integrale (**PID**).

5.8.2 Il regolatore ad azione proporzionale P

In un regolatore ad azione proporzionale il legame tra il segnale presente alla sua uscita $m(t)$ ed il segnale differenza $e(t)$ applicato al suo ingresso è espresso da una relazione del tipo:

$$m(t) = K_P \cdot e(t) \quad [5.8.1]$$

dove K_P è il guadagno proporzionale.

Molto spesso al posto del guadagno proporzionale viene specificata la banda proporzionale B_P :

$$B_P \% = \frac{1}{K_P} \cdot 100$$

Dalla [5.8.1] si deduce che il regolatore esplica la sua azione correttiva quando la variabile controllata differisce dal valore desiderato perché il segnale d'uscita $m(t)$ è proporzionale al segnale differenza (fig. 5.8.1).

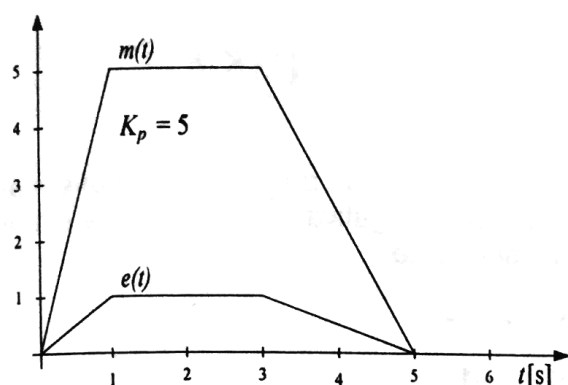


Fig. 5.8.1

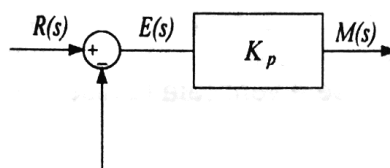


Fig. 5.8.2

Dalla trasformata di Laplace di ambo i membri della [5.8.1] si ottiene la [5.8.2], rappresentata dallo schema a blocchi di figura 5.8.2.

$$M(s) = K_p \cdot E(s) \quad [5.8.2]$$

Un regolatore proporzionale produce un errore a regime, detto errore residuo o di offset, che può essere minimizzato assegnando a K_p valori elevati che, come si vedrà, peggiorano il grado di stabilità del sistema. Si consideri infatti il sistema del secondo ordine a retroazione unitaria rappresentato in figura 5.8.3 e sia K_p la funzione di trasferimento del suo regolatore proporzionale.

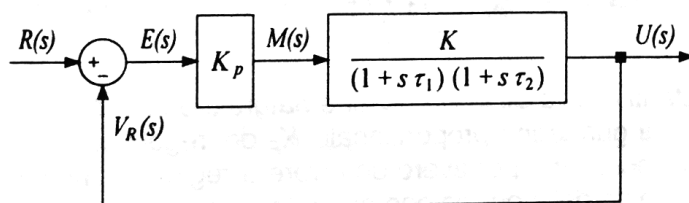


Fig. 5.8.3

Se il sistema è sollecitato da un segnale a gradino avente trasformata $R(s) = \frac{A}{s}$, l'errore a regime ε diminuisce all'aumentare del guadagno proporzionale K_p ed è nullo quando $K_p \rightarrow \infty$:

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{1 + K_p \cdot \frac{K}{(1 + s \cdot \tau_1) \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}} = \frac{A}{1 + K \cdot K_p}$$

Un regolatore ad azione proporzionale, come si vede, è in grado di diminuire l'entità dell'errore a regime ma non può eliminarlo completamente perché un amplificatore con un guadagno K_p elevato comporta la saturazione dell'amplificatore. Il valore di K_p influisce sia sull'errore a regime e sia sulle specifiche della risposta in regime transitorio. Nel sistema rappresentato nella figura 5.8.3 sia $W(s)$ la funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$$W(s) = \frac{K \cdot K_p}{s^2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 + s \cdot (\tau_1 + \tau_2) + (1 + K \cdot K_p)} \quad [5.8.3]$$

Considerando che le radici del denominatore della [5.8.3] sono

$$s_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot (1 + K \cdot K_P)}}{2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2}$$

e che le costanti di tempo di un sistema reale sono positive, si può affermare che i poli della [5.8.3] sono a parte reale negativa e che il sistema è stabile se è verificata la disequaglianza seguente

$$1 + K \cdot K_P > 0$$

$$K \cdot K_P > -1 \quad [5.8.4]$$

La [5.8.4] è sicuramente soddisfatta quando è $K_P > \frac{1}{K}$.

Si osserva che un guadagno proporzionale $K_P > \frac{1}{K}$ assicura la stabilità del sistema e riduce l'errore a regime ma peggiora le caratteristiche della risposta in regime transitorio. Infatti confrontando il denominatore della [5.8.3] con quello della funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine espresso nella forma $s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2$ si ricava:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1 + K \cdot K_P}{\tau_1 \cdot \tau_2}} \quad [5.8.5]$$

$$\zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2} \cdot \frac{1}{\omega_n} \quad [5.8.6]$$

Per valori costanti di τ_1 e τ_2 , la pulsazione naturale ed il fattore di smorzamento dipendono dal guadagno proporzionale K_P del regolatore. Un aumento del guadagno K_P , necessario per avere un errore a regime di modesta entità, determina un aumento della pulsazione naturale ω_n e una diminuzione del fattore di smorzamento, come si ricava dalla [5.8.5] e dalla [5.8.6]. Il sistema, conseguentemente, è meno stabile perché aumenta l'ampiezza delle oscillazioni della risposta. In definitiva un regolatore ad azione proporzionale determina:

- un errore di offset il cui valore è funzione di K_P ;
- un aumento della velocità della risposta del sistema.

Nella figura 5.8.4 è rappresentato lo schema di un regolatore proporzionale avente guadagno $K_P = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

Un regolatore ad azione proporzionale può essere utilizzato nei sistemi nei quali sono consentiti scostamenti tra il valore effettivo della grandezza controllata e quello desiderato (ad esempio negli impianti di riscaldamento degli edifici).

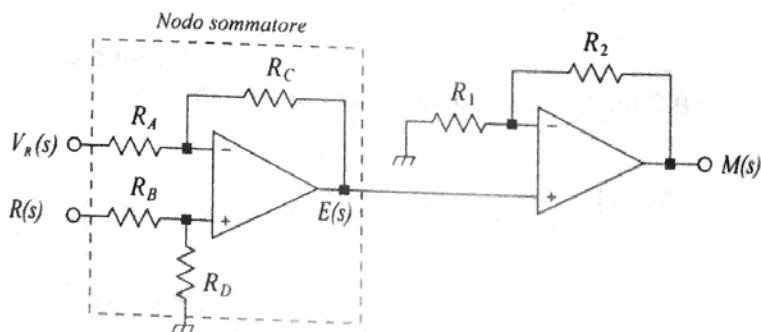


Fig. 5.8.4

Valutare gli effetti prodotti da un regolatore ad azione proporzionale sul sistema di controllo rappresentato in figura 5.8.5. Si assuma $K = 5$ e $K_p = 10$.

Esempio 1

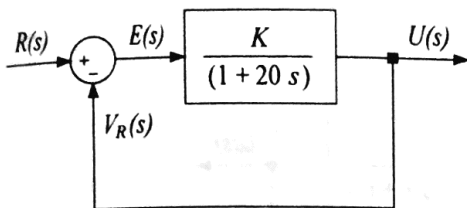


Fig.5.8.5

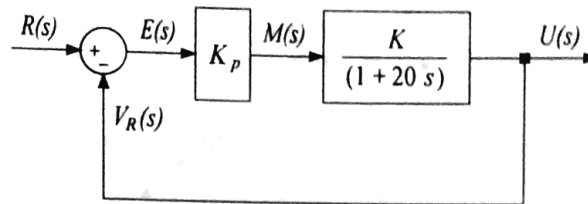


Fig.5.8.6

La funzione di trasferimento ad anello chiuso $W_1(s)$ del sistema rappresentato in figura 5.8.5, la risposta del sistema al segnale a gradino unitario e l'errore a regime sono rispettivamente uguali a

$$W_1(s) = \frac{0,25}{(s + 0,3)} \quad u_1(t) = 0,83 \cdot (1 - e^{-0,3t})$$

$$\varepsilon_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{1 + 20 \cdot s}} \cong 0,166$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso $W_2(s)$ del sistema rappresentato in figura 5.8.6, la risposta al segnale a gradino unitario e l'errore a regime sono rispettivamente uguali a

$$W_2(s) = \frac{2,5}{(s + 2,55)} \quad u_2(t) = 0,98 \cdot (1 - e^{-2,55t})$$

$$\varepsilon_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{50}{1 + 20 \cdot s}} \cong 0,02$$

Il regolatore ad azione proporzionale ha ridotto l'errore a regime ed ha aumentato la velocità di risposta del sistema come si rileva dalla figura 5.8.7 ottenuta utilizzando **Simulink**.

MATLAB

```
% Modulo 5 Unità didattica 8 Esempio 1
% Sistema senza regolatore proporzionale
G=tf(5,[ 20 1])
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W=G/(1+G)
% Regolatore proporzionale Kp=10
G1=tf(5*10,[ 20 1])
Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W=G1/(1+G1)
ltview
```

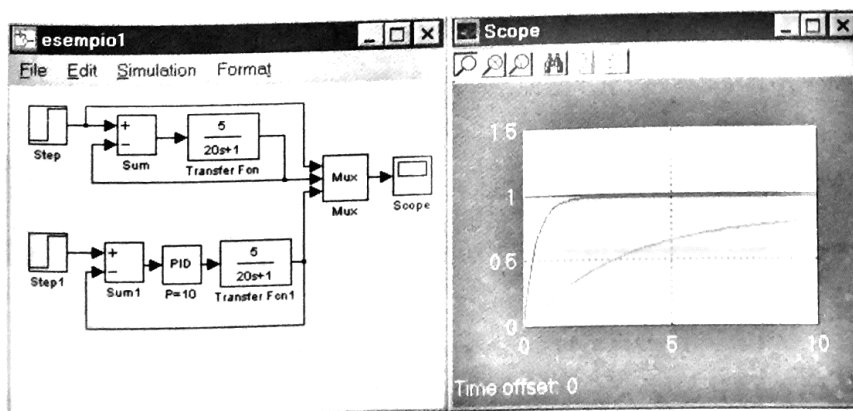


Fig. 5.8.7

Esempio 2

Studiare gli effetti prodotti dalle variazioni del guadagno proporzionale sul sistema di controllo del secondo ordine rappresentato in figura 5.8.8 nell'ipotesi che le costanti assumano i valori seguenti:

- $K = 100$ e $K_p = 0,05$
- $K = 100$ e $K_p = 0,5$

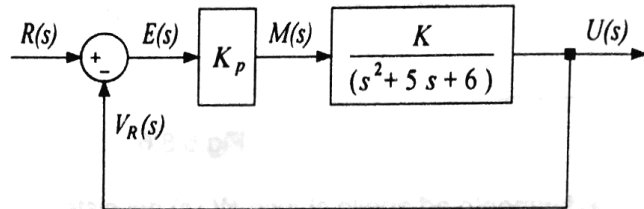


Fig. 5.8.8

- Per $K_p = 0,05$ la funzione di trasferimento ad anello chiuso e la risposta al gradino unitario sono rispettivamente uguali a

$$W_1(s) = \frac{5}{(s^2 + 5 \cdot s + 11)}$$

$$u_1(t) = 0,454 - e^{-2,5t} \cdot [0,454 \cdot \cos(2,18 \cdot t) + 0,52 \cdot \sin(2,18 \cdot t)]$$

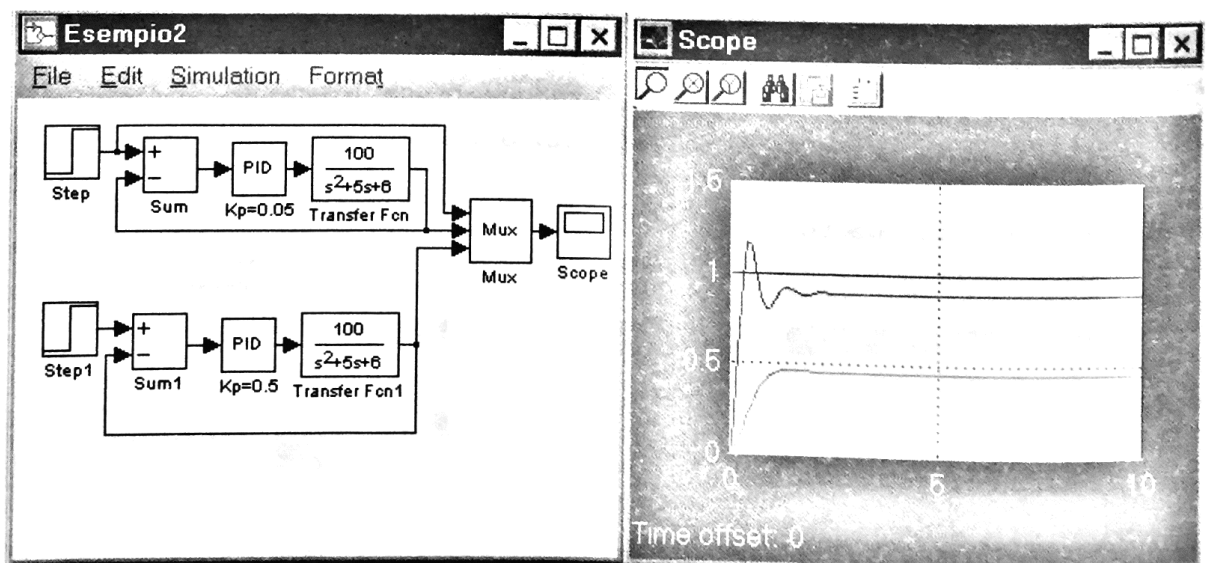
- Per $K_p = 0,5$ la funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema e la risposta al gradino unitario sono rispettivamente uguali a

$$W_2(s) = \frac{50}{(s^2 + 5 \cdot s + 56)}$$

$$u_2(t) = 0,892 - e^{-2,5t} \cdot [0,892 \cdot \cos(7 \cdot t) + 0,316 \cdot \sin(7 \cdot t)]$$

Fig. 5.8.9

Un aumento troppo grande del guadagno proporzionale provoca una sensibile diminuzione dell'errore a regime, ma anche un aumento dell'ampiezza dell'oscillazione della risposta dovuto alla diminuzione del fattore di smorzamento (fig. 5.8.9).

**MATLAB**

```
% Modulo 5 Unità didattica 8 Esempio 2
% Funzione di trasferimento del sistema
G=tf(100,[ 1 5 6])
```

```
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W=G/(1+G)
% Regolatore proporzionale Kp=0.05
G1=tf(0.05*100,[1 5 6])
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso con Kp=0.05
W1=G1/(1+G1)
% Regolatore proporzionale Kp=0.5
G2=tf(0.5*100,[1 5 6])
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso con Kp=0.5
W2=G2/(1+G2)
ltview
```

5.8.3 Il regolatore ad azione integrale I

Il segnale d'uscita di un regolatore ad azione integrale è proporzionale all'integrale del segnale differenza applicato al suo ingresso:

$$\frac{dm(t)}{dt} = K_I \cdot e(t)$$

$$m(t) = K_I \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt + m(0) \quad [5.8.7]$$

dove:

- K_I è una costante che ha le dimensioni dell'inverso di un tempo $[s^{-1}]$ e il suo reciproco $T_I = \frac{1}{K_I}$, detto tempo dell'azione integrale, è l'intervallo di tempo necessario affinché il segnale d'uscita del regolatore uguagli il valore di un segnale attuatore a gradino (fig. 5.8.10). Il segnale d'uscita $m(t)$ del regolatore è in ritardo rispetto al segnale differenza a gradino applicato al suo ingresso (fig. 5.8.10);
- $m(0)$ è il valore del segnale d'uscita del regolatore all'istante $t = 0$.

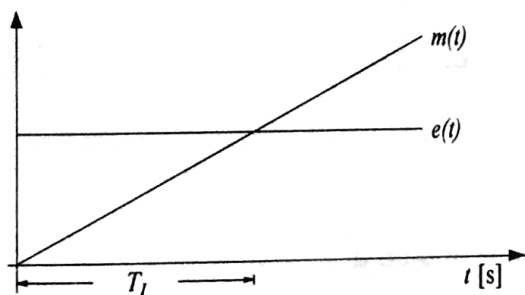


Fig. 5.8.10

Dalla trasformata di Laplace di entrambi i membri della [5.8.7] e posto $m(0) = 0$, si ottiene la funzione di trasferimento del regolatore ad azione integrale (fig. 5.8.11):

$$M(s) = \frac{K_I}{s} \cdot E(s)$$

$$G(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_I}{s}$$

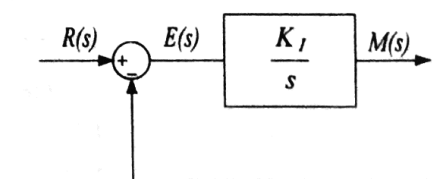


Fig. 5.8.11

[5.8.8]

Come si rileva dalla figura 5.8.12, ottenuta applicando la [5.8.7] con $K_I = 1 \text{ s}^{-1}$, la *velocità di variazione* del segnale d'uscita del regolatore $\frac{\Delta m(t)}{\Delta t}$ è proporzionale al segnale differenza (ad esempio nell'intervallo $0 \text{ s} \div 2,5 \text{ s}$ essa è maggiore di quella che si ha nell'intervallo $2,5 \text{ s} \div 4,5 \text{ s}$). L'azione del regolatore integrale è in ritardo rispetto a quella del regolatore proporzionale ma, a differenza di quest'ultimo, è in grado di riportare la grandezza controllata al valore desiderato in modo graduale e di *mantenere* in uscita il segnale che annulla $e(t)$.

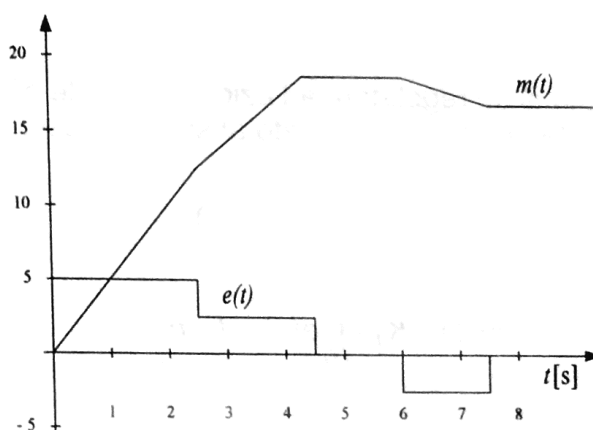


Fig. 5.8.12

Dato il sistema del 2° ordine rappresentato in figura 5.8.13, siano $R(s) = \frac{A}{s}$ e $\frac{K_I}{s}$ rispettivamente la trasformata della sollecitazione applicata ad esso e la funzione di trasferimento del regolatore nell'ipotesi che all'istante $t = 0$ il segnale d'uscita $m(0)$ sia nullo.

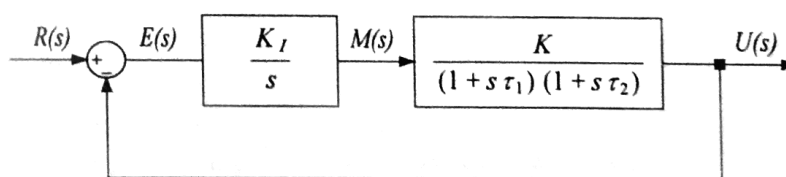


Fig. 5.8.13

L'errore a regime è uguale a

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_I}{s} \cdot \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot s) \cdot (1 + \tau_2 \cdot s)}} = 0$$

Un regolatore ad azione integrale annulla l'errore a regime nei sistemi sollecitati da un segnale a gradino indipendentemente dal valore della costante K_I e dalla complessità della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema. Per valutare gli effetti prodotti dalla variazione della costante K_I sulla risposta in regime transitorio si consideri, per semplicità, il sistema del primo ordine rappresentato in figura 5.8.14 e sia $\frac{K_I}{s}$ la funzione di trasferimento del regolatore ad azione integrale.

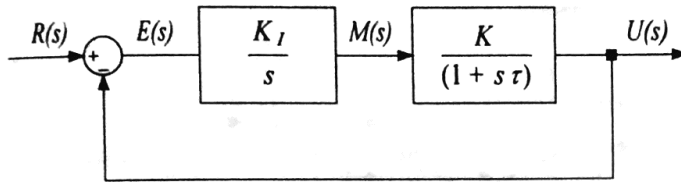


Fig. 5.8.14

La funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema è uguale a

$$W(s) = \frac{K \cdot K_I}{\tau \cdot s^2 + s + K \cdot K_I} \quad [5.8.9]$$

Poiché la costante di tempo di un sistema reale è positiva, le radici del denominatore della [5.8.9] sono a parte reale negativa se è verificata la disuguaglianza seguente

$$K \cdot K_I > 0 \quad [5.8.10]$$

Per $K > 0$ la [5.8.10] è soddisfatta quando è $K_I > 0$.

Confrontando il denominatore della [5.8.9] con il denominatore della funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine si ricava:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K \cdot K_I}{\tau}} \quad [5.8.11]$$

$$\zeta = \frac{1}{2 \cdot \omega_n \cdot \tau} \quad [5.8.12]$$

Un valore piccolo di K_I limita il valore della pulsazione naturale ω_n , ma determina un valore grande del fattore di smorzamento come si ricava dalla [5.8.11] e dalla [5.8.12]. In tal caso il sistema impiega un intervallo di tempo molto grande per portarsi a regime. Viceversa si ha un valore grande di ω_n e un basso valore di ζ con K_I grande. In quest'ultimo caso la risposta è una oscillazione quasi persistente. In definitiva un regolatore ad azione integrale:

- aumenta di *uno il tipo e l'ordine di un sistema* perché introduce un polo nullo nella funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema peggiorando così il suo grado di stabilità;
- elimina l'errore a regime nei sistemi che, sollecitati da un determinato segnale, hanno un errore a regime costante. Esempi che possono essere ricordati sono i sistemi di tipo 0 sollecitati da un segnale a gradino e quelli di tipo 1 sollecitati da un segnale a rampa.

La [5.8.8] è la funzione di trasferimento di un sistema che ha $|G(j \cdot \omega)| \rightarrow \infty$ quando è $\omega = 0$. Nella pratica si utilizza l'integratore reale rappresentato in figura 5.8.15 in cui la resistenza R_2 in parallelo al condensatore limita il guadagno in bassa frequenza. Infatti la funzione di trasferimento di un regolatore ad azione integrale reale è:

$$G(s) = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + R_2 \cdot C \cdot s}$$

e per $\omega = 0$ si ha $|G(j \cdot \omega)| = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1}$.

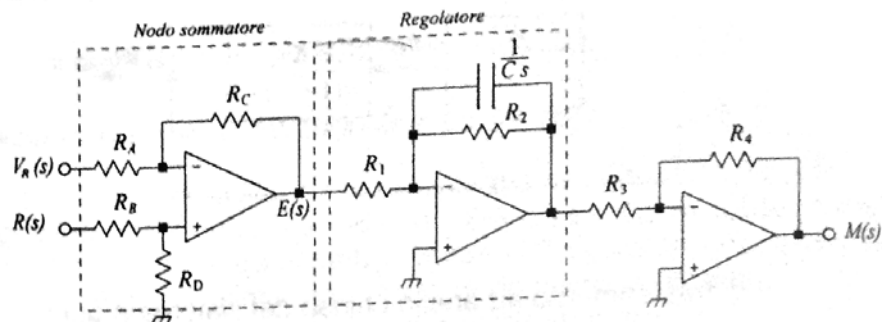


Fig. 5.8.15

Esempio 3

Valutare gli effetti prodotti da un regolatore ad azione integrale sul sistema di controllo rappresentato in figura 5.8.16 nell'ipotesi che le costanti abbiano i valori $K = 5$ e $K_I = 1 \text{ s}^{-1}$.

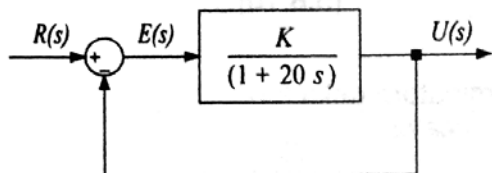


Fig. 5.8.16

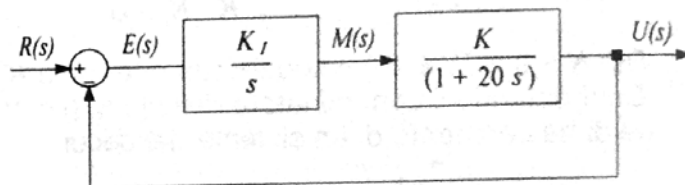


Fig. 5.8.17

La funzione di trasferimento ad anello chiuso $W_1(s)$ del sistema rappresentato in figura 5.8.16, la risposta del sistema al segnale a gradino unitario e l'errore a regime sono rispettivamente uguali a

$$W_1(s) = \frac{0,25}{(s+0,3)} \quad u_1(t) = 0,83 \cdot (1 - e^{-0,3t})$$

$$\varepsilon_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{1+20 \cdot s}} \cong 0,166$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso $W_2(s)$ del sistema rappresentato in figura 5.8.17, la risposta del sistema al segnale a gradino unitario e l'errore a regime sono rispettivamente uguali a

$$W_2(s) = \frac{5}{(20 \cdot s^2 + s + 5)}$$

$$u_2(t) = 1 - e^{-0,025t} \cdot [0,05 \cdot \sin(0,5 \cdot t) + \cos(0,5 \cdot t)]$$

$$\varepsilon_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{s \cdot (1+20 \cdot s)}} = 0$$

Dalla figura 5.8.18 si deduce che il regolatore ad azione integrale ha annullato l'errore a regime ma ha peggiorato il grado di stabilità del sistema in quanto ha dato origine a oscillazioni poco smorzate dovute alla presenza del polo nullo nella funzione di trasferimento ad anello aperto e al valore troppo elevato del coefficiente K_I .

MATLAB

```

% Modulo 5 Unità didattica 8 Esempio 3
% Funzione di trasferimento del sistema
G=tf(5,[20 1])
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W=G/(1+G)
% Funzione di trasferimento del regolatore integrale Ki=1
Gi=tf(1,[1 0])
% Funzione di trasferimento ad anello aperto con regolatore
GH1=G*Gi
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso con regolatore
W1=(G*Gi)/(1+G1*Gi)
ltview

```

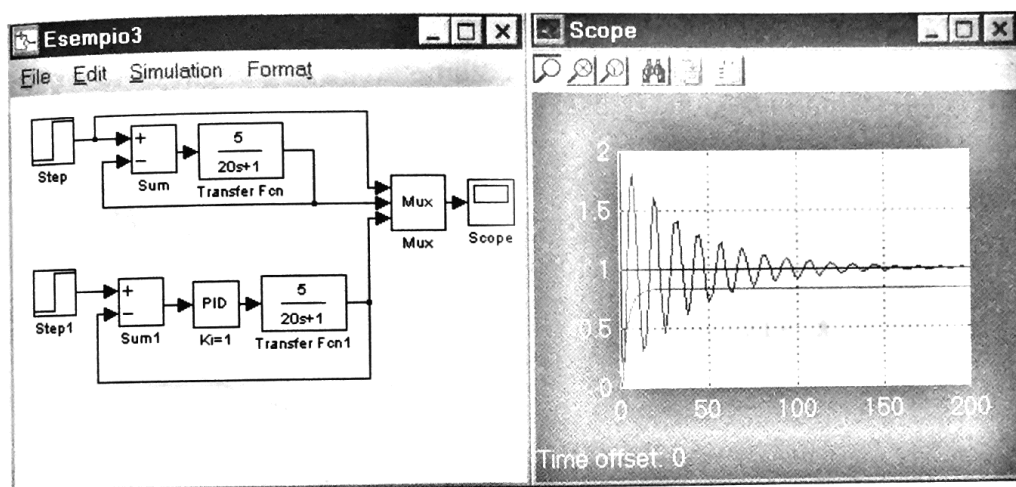


Fig. 5.8.18

5.8.4 Il regolatore ad azione proporzionale ed integrale PI

Il regolatore ad azione proporzionale ed integrale, costituito da un blocco proporzionale ed uno integrale connessi in parallelo, riunisce le caratteristiche dei due tipi di regolatori precedentemente studiati (fig. 5.8.19).

Il segnale d'uscita $m(t)$ del regolatore è uguale a

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t)$$

$$m(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \int_0^t e(t) \cdot dt + m(0) \quad [5.8.13]$$

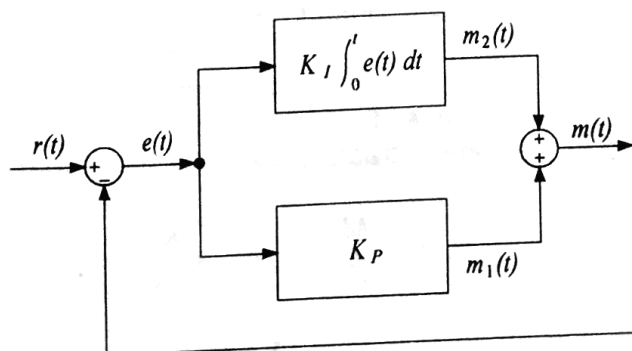


Fig. 5.8.19

Si consideri un regolatore **PI** sollecitato da un segnale a gradino di ampiezza unitaria $e(t)$ (fig. 5.8.20). All'istante $t = 0^+$ il regolatore, sollecitato dal

segnale differenza, genera il segnale $m_1(t) = K_p \cdot 1$ nel blocco proporzionale ed il segnale $m_2(t) = 0$ in quello integrale. Negli istanti successivi il segnale d'uscita del regolatore è uguale a

$$m(t) = K_p \cdot e(t) + K_I \cdot t \cdot e(t) \quad [5.8.14]$$

Il regolatore proporzionale interviene e genera un segnale proporzionale a $e(t)$, non appena la grandezza controllata si discosta dal valore di riferimento. Il regolatore integrale, invece, interviene successivamente e la sua azione uguaglia quella del regolatore proporzionale trascorso l'intervallo di

tempo $T_I = \frac{K_p}{K_I}$ (fig. 5.8.20). L'azione **PI** può essere considerata uguale a quella di un regolatore integrale che inizia l'azione correttiva T_I secondi prima dell'istante in cui si manifesta lo scostamento tra la grandezza controllata e quella di riferimento (fig. 5.8.20).

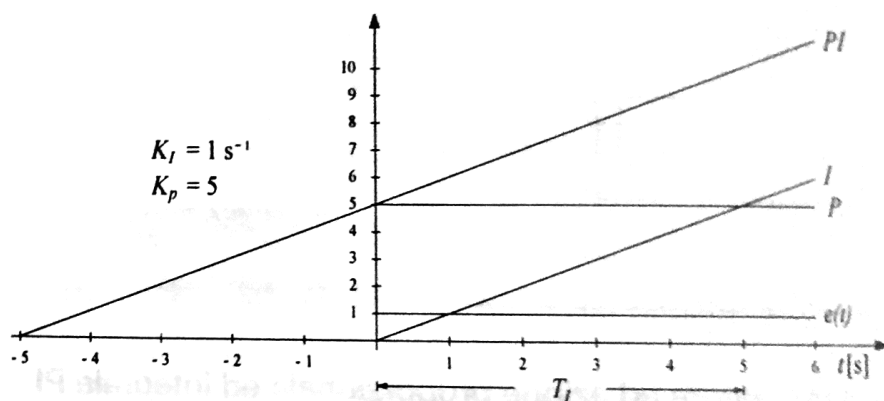


Fig. 5.8.20

In un sistema reale, nel quale il segnale differenza non sia mantenuto costante in modo forzato, l'azione prodotta dal regolatore proporzionale all'istante $t = 0^+$ riduce il segnale $e(t)$ e, di conseguenza, quella del segnale $m_1(t)$. Tuttavia a causa del permanere di un errore residuo che l'azione proporzionale non è in grado di eliminare, negli istanti successivi a $t = 0^+$ cresce il segnale $m_2(t)$ dovuto all'azione integrale. In tal modo l'azione combinata del regolatore proporzionale e di quello integrale provoca una ulteriore diminuzione dei segnali $e(t)$ e $m_1(t)$. Con il passare del tempo il segnale $m_1(t)$ continua a ridursi e l'azione integrale predomina rispetto a quella proporzionale. Al termine del processo di regolazione, quando hanno termine l'azione proporzionale e quella integrale, la grandezza controllata assume il valore di regime ed il regolatore mantiene in uscita il segnale $m(t)$ che ha annullato l'errore.

Dalla trasformata di Laplace di ambo i membri della [5.8.13] e posto $m(0) = 0$, si ricava la funzione di trasferimento del regolatore:

$$G(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} \quad [5.8.15]$$

$$G(s) = K_p \cdot \frac{1 + \frac{K_p}{K_I} \cdot s}{\frac{K_p}{K_I} \cdot s}$$

La funzione presenta un polo nell'origine ($p = 0$) e uno zero $\left(z = -\frac{K_I}{K_P}\right)$.

L'azione del regolatore **PI** è simile a quella di una rete ritardatrice attiva avente il guadagno K_P , il polo nell'origine e lo zero sono funzione delle costanti K_P e K_I . Variando il guadagno proporzionale si regola anche il guadagno in alta frequenza, mentre variando K_I si regola il guadagno in bassa frequenza con la conseguente traslazione del tratto di diagramma avente la pendenza di -20 dB per decade (fig. 5.8.21).

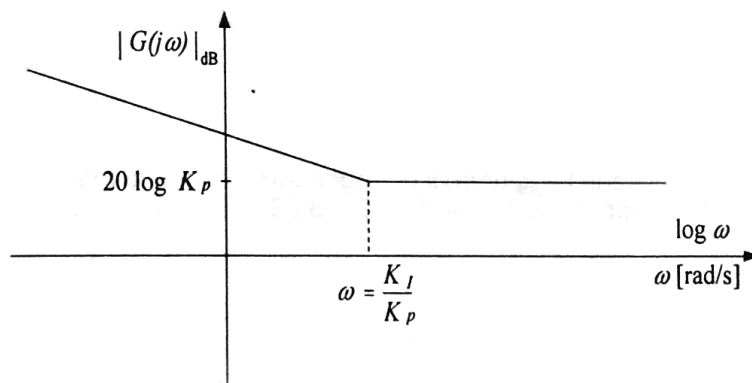


Fig. 5.8.21

La presenza dello zero compensa l'azione destabilizzante del polo nullo il quale, a sua volta, determina un incremento *unitario sia del tipo sia dell'ordine del sistema* e agisce sull'entità dell'errore a regime. Si dimostra che valori bassi di K_P e di K_I danno una risposta caratterizzata da una ampiezza della sovraelongazione molto limitata e, al limite, anche una risposta aperiodica. In definitiva un regolatore **PI** aumenta:

- la precisione del sistema senza peggiorare il suo grado di stabilità;
- la velocità della risposta.

Un regolatore **PI** è utile soprattutto nei sistemi in cui le variazioni del carico avvengono lentamente: infatti cambiamenti improvvisi di carico possono portare il sistema verso l'instabilità quando la costante integrale K_I non è scelta in modo opportuno.

Poiché in un regolatore **PI** il modulo della funzione di trasferimento tende all'infinito quando $\omega \rightarrow 0$ ed è funzione di K_P quando è $\omega \geq \frac{K_I}{K_P}$, nella

pratica si utilizza il regolatore **PI** reale rappresentato nello schema di figura 5.8.22, nel quale la resistenza R_2 connessa in parallelo al condensatore limita il guadagno in bassa frequenza. Posto $R_5 = R_6 = R_7$, la funzione di trasferimento del regolatore **PI** reale è:

$$G(s) = \frac{R_4}{R_3} + \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + R_2 \cdot C \cdot s}$$

e per $\omega = 0$ si ha $|G(j \cdot \omega)| = \frac{R_4}{R_3} + \frac{R_2}{R_1}$.

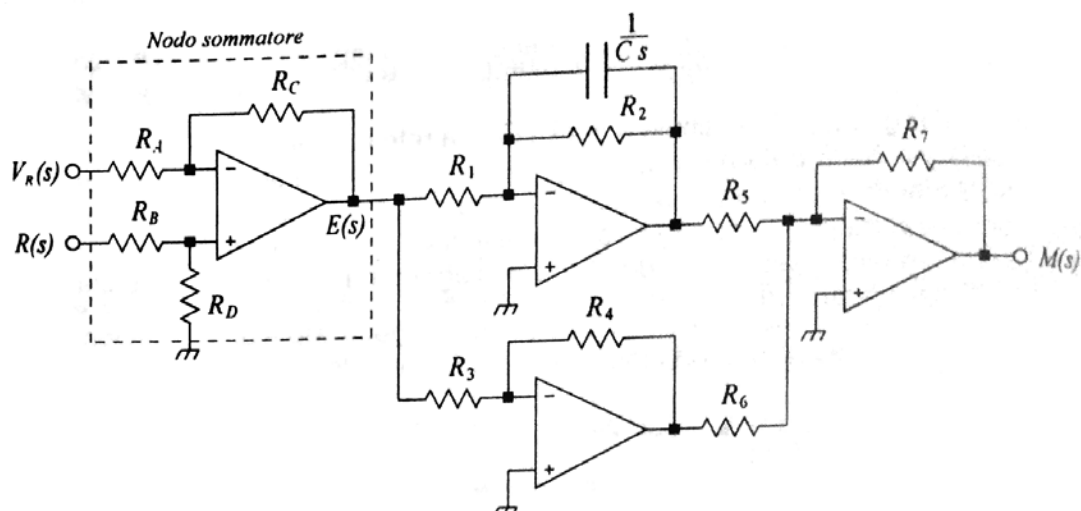


Fig. 5.8.22

Esempio 4

Valutare gli effetti che l'aggiunta di un regolatore ad azione *integrale* produce sul sistema di controllo rappresentato in figura 5.8.23 nell'ipotesi che le costanti siano $K = 5$ e $K_P = 10$.

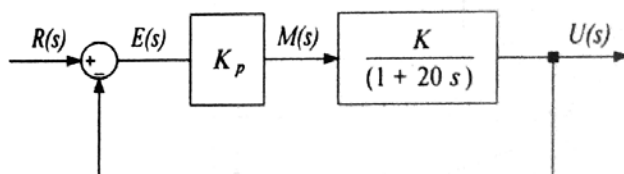


Fig. 5.8.23

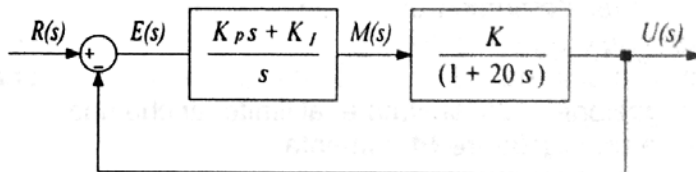


Fig. 5.8.24

La risposta del sistema di figura 5.8.23, nel quale è presente un regolatore ad azione proporzionale e la funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema di figura 5.8.24 sono rispettivamente uguali a

$$u_1(t) = 0,98 e^{-2,55t} \quad 0,98(1 - e^{-2,55t})$$

$$W_2(s) = \frac{K \cdot (K_P \cdot s + K_I)}{\tau \cdot \left(s^2 + \frac{K \cdot K_P + 1}{\tau} \cdot s + \frac{K \cdot K_I}{\tau} \right)} \quad [5.8.16]$$

Confrontando il denominatore della [5.8.16] con il polinomio $s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2$, posto il fattore di smorzamento $\zeta = 1$, si ricava:

$$\omega_n = \frac{K \cdot K_P + 1}{2 \cdot \zeta \cdot \tau} = \frac{5 \cdot 10 + 1}{2 \cdot 1 \cdot 20} = 1,275 \text{ rad/s}$$

$$K_I = \frac{\omega_n^2 \cdot \tau}{K} = \frac{1,275^2 \cdot 20}{5} = 6,5025 \text{ s}^{-1}$$

La trasformata della risposta al segnale a gradino unitario del sistema di figura 5.8.24 è uguale a

$$U_2(s) = \frac{0,25 \cdot (10 \cdot s + 6,5025)}{(s + 1,275)^2} \cdot \frac{1}{s} \quad [5.8.17]$$

La risposta e l'errore a regime sono:

$$u_2(t) = 1 + 1,225 \cdot t \cdot e^{-1,275t} - 1 \cdot e^{-1,275t}$$

$$\varepsilon_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(K_P \cdot s + K_I)}{s} \cdot \frac{K}{(1 + 20 \cdot s)}} = 0$$

Dalle curve di risposta di figura 5.8.25 si può dedurre che il regolatore ad azione **PI**, a differenza di quello a sola azione proporzionale, annulla l'errore a regime, aumenta la velocità di risposta del sistema e genera una sovraelongazione che, nel caso specifico, ha ampiezza limitata.

MATLAB

```
% Modulo 5 Unità didattica 8 Esempio 4
% Funzione di trasferimento del sistema
G=tf(5,[20 1])
% Funzione di trasferimento del sistema con regolatore P Kp=10
G1=G*10
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W=G1/(1+G1)
% Funzione di trasferimento del regolatore PI Kp= 10, Ki=6.5
Gpi=tf([10 6.5],[1 0])
% Funzione di trasferimento ad anello aperto
GH1=G*Gpi
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W1=(G*Gpi)/(1+G*Gpi)
ltview
```

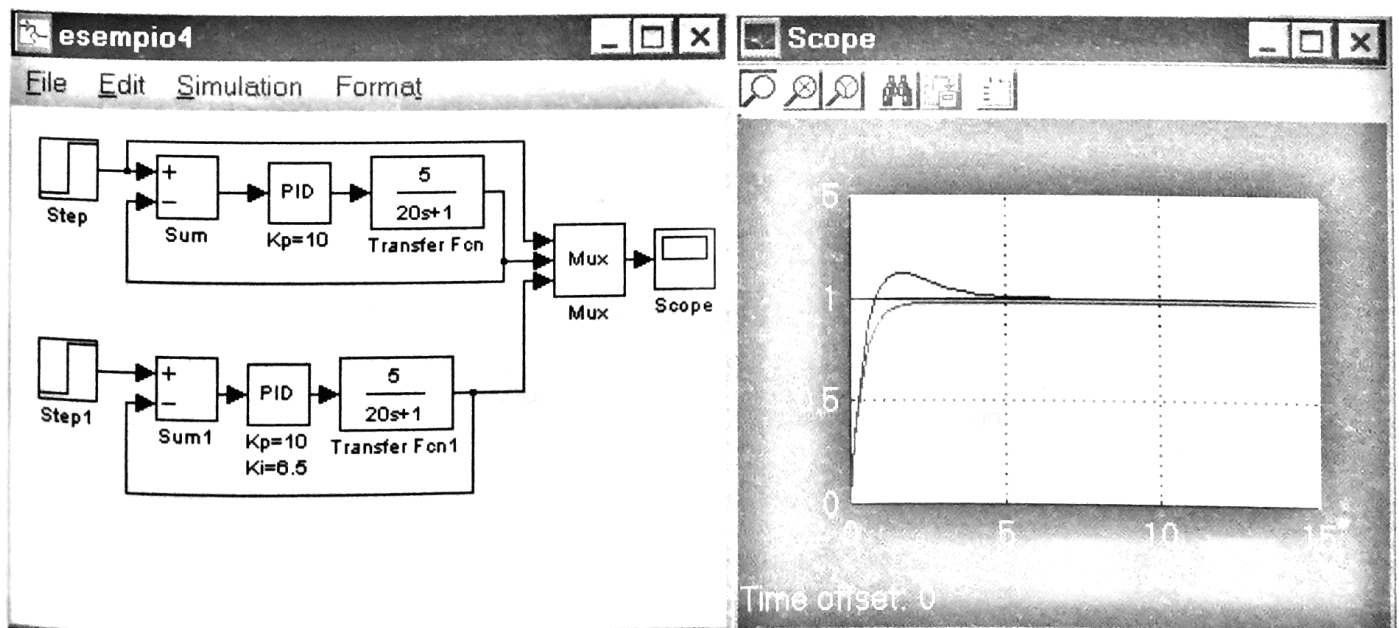


Fig. 5.8.25

Esempio 5

Studiare la risposta $u(t)$ al segnale a gradino unitario del sistema di controllo rappresentato in figura 5.8.26 nell'ipotesi che le costanti siano:

- $K_p = 40$ e $K_i = 10 \text{ s}^{-1}$
- $K_p = 4$ e $K_i = 1 \text{ s}^{-1}$

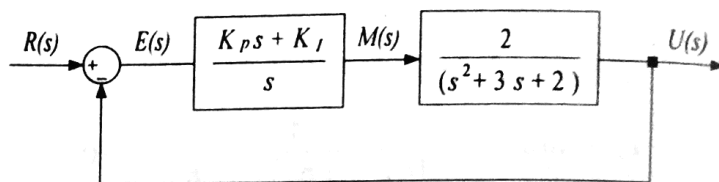


Fig. 5.8.26

La funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema di figura 5.8.26 è uguale a

$$W(s) = \frac{2 \cdot (K_p \cdot s + K_i)}{s^3 + 3 \cdot s^2 + 2 \cdot (K_p + 1) \cdot s + 2 \cdot K_i}$$

Si ha:

- posto $K_p = 40$ e $K_i = 10 \text{ s}^{-1}$

$$U_1(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{80 \cdot s + 20}{s^3 + 3 \cdot s^2 + 82 \cdot s + 20}$$

$$u_1(t) \cong 1 - 0,0164 \cdot e^{-0,2459 \cdot t} - e^{-1,377 \cdot t} \cdot [0,98 \cdot \cos(8,91 \cdot t) + 0,15 \cdot \sin(8,91 \cdot t)]$$

- posto $K_p = 4$ e $K_i = 1 \text{ s}^{-1}$

$$U_2(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{8 \cdot s + 2}{s^3 + 3 \cdot s^2 + 10 \cdot s + 2}$$

$$u_2(t) \cong 1 - 0,16 \cdot e^{-0,2126 \cdot t} - e^{-1,3937 \cdot t} \cdot [0,84 \cdot \cos(2,73 \cdot t) + 0,44 \cdot \sin(2,73 \cdot t)]$$

In entrambi i casi l'errore a regime è:

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(K_p \cdot s + K_i)}{s} \cdot \frac{2}{s^2 + 3 \cdot s + 2}} = 0$$

Dalle curve di risposta di figura 5.8.27 si rileva che:

- l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce al diminuire dei coefficienti K_p e K_i ;
- il tempo impiegato dal sistema per portarsi a regime, invece, aumenta al diminuire dei coefficienti K_p e K_i .

MATLAB

```
% Modulo 5 Unità didattica 8 Esempio 5
% Funzione di trasferimento del sistema
G=tf(2,[1 3 2])
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W=G/(1+G)
% Funzione di trasferimento del regolatore PI Kp= 40, Ki=10
Gpi1=tf([40 10],[1 0])
% Funzione di trasferimento ad anello aperto
```

```

GH1=G*Gpi1
%Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W1=(G*Gpi1)/(1+G*Gpi1)
% Funzione di trasferimento del regolatore PI Kp= 4, Ki=1
Gpi2=tf([4 1],[1 0])
% Funzione di trasferimento ad anello aperto
GH2=G*Gpi2
%Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W2=(G*Gpi2)/(1+G*Gpi2)
ltview

```

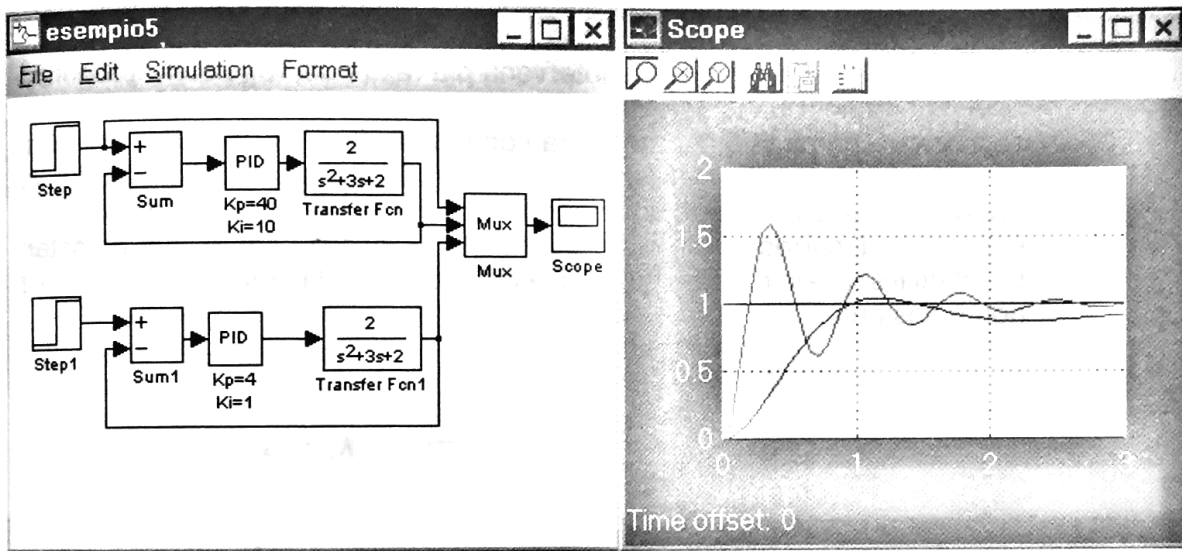


Fig. 5.8.27

5.8.5 Il regolatore ad azione derivativa D

Il segnale d'uscita di un regolatore ad azione derivativa (fig. 5.8.28) è proporzionale alla derivata del segnale differenza

$$m(t) = K_D \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad [5.8.18]$$

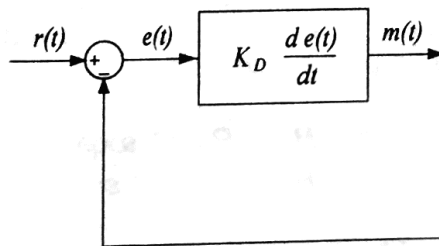


Fig. 5.8.28

La costante K_D , che ha la dimensione di un tempo, è l'intervallo di tempo necessario affinché $e(t)$ sia uguale al segnale d'uscita del regolatore (fig. 5.8.29).

Dalla trasformata di Laplace di ambo i membri della [5.8.18], posto $e(0) = 0$, si ricava la funzione di trasferimento del regolatore:

$$G(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_D \cdot s$$

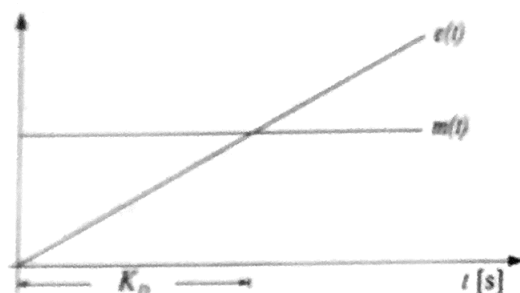


Fig. 5.8.29

Il regolatore ad azione derivativa è sensibile alla velocità di variazione del segnale differenza e consente interventi più rapidi del regolatore proporzionale perché anticipa le variazioni del segnale $e(t)$ e produce una correzione significativa prima che la grandezza controllata assuma un valore che si discosti molto da quello prefissato (fig. 5.8.30). Il regolatore ad azione derivativa deve essere associato ad un regolatore P o PI perché esso, da solo, non è in grado di correggere l'errore quando la grandezza controllata è costante. Infatti il segnale d'uscita del regolatore è diverso da zero solo quando $e(t)$ non è costante.

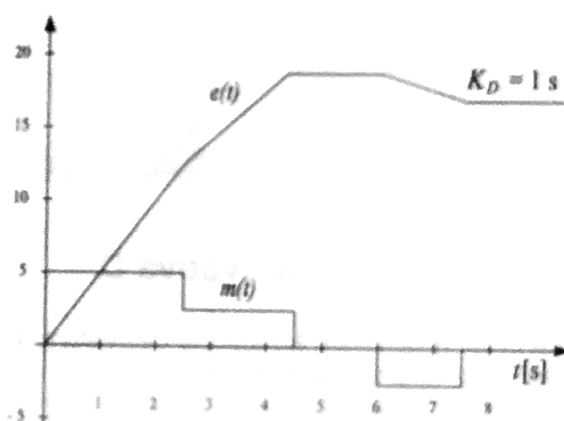


Fig. 5.8.30

Il regolatore ad azione derivativa, inoltre, non è in grado di attenuare i segnali in alta frequenza. La sua funzione di trasferimento, infatti, è quella di un sistema *improprio* perché $|G(j \cdot \omega)| \rightarrow \infty$ quando la pulsazione ω tende all'infinito. Nella pratica si usa il derivatore reale di figura 5.8.31, la cui funzione di trasferimento presenta un polo e uno zero:

$$G(s) = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_2 \cdot C \cdot s}{1 + R_1 \cdot C \cdot s}$$

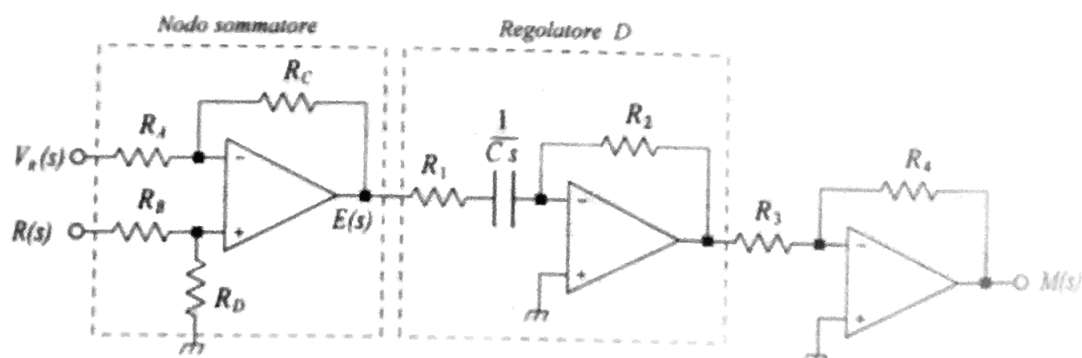


Fig. 5.8.31

La resistenza R_1 , infatti, limita il guadagno alle alte frequenze e pertanto si ha $|G(j \cdot \omega)| \rightarrow \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1}$ quando la pulsazione ω tende all'infinito.

5.8.6 Il regolatore ad azione proporzionale e derivativa PD

Il segnale d'uscita del regolatore **PD**, costituito da un blocco proporzionale e da un blocco derivativo connessi in parallelo (fig. 5.8.32), è uguale a

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t)$$

$$m(t) = K_P \cdot e(t) + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad [5.8.19]$$

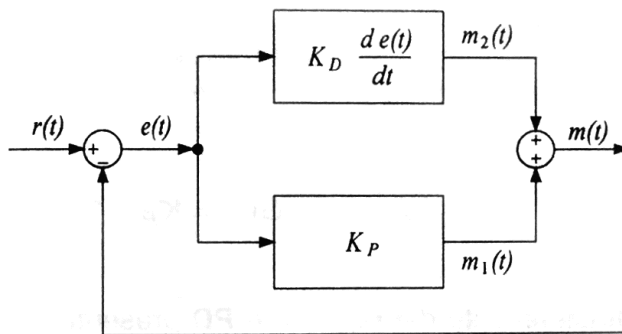


Fig. 5.8.32

Per illustrare l'azione di un regolatore **PD** si può ripetere un ragionamento simile a quello fatto per il regolatore **PI**. Si consideri un regolatore **PD** sollecitato da un segnale a rampa unitaria (fig. 5.8.33). All'istante $t = 0^+$ il regolatore genera il segnale $m_1(t) = 0$ nel blocco proporzionale e il segnale $m_2(t) = K_D \cdot 1$ nel blocco derivativo. In ogni istante il segnale d'uscita è uguale a

$$m(t) = K_P \cdot t + K_D \cdot 1 \quad [5.8.20]$$

Il regolatore derivativo interviene non appena si manifesta una variazione del segnale differenza e dopo genera un segnale di ampiezza costante. Il regolatore proporzionale, invece, interviene successivamente e la sua azione, che è tanto più efficace quanto più ampio è il segnale differenza $e(t)$, uguaglia, trascorso l'intervallo di tempo $T_D = \frac{K_D}{K_P}$, quella del regolatore derivativo.

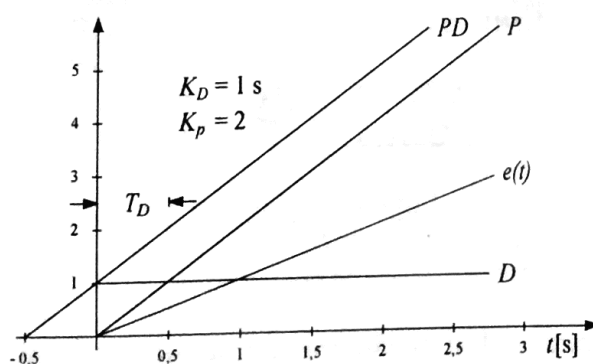


Fig. 5.8.33

L'azione **PD** può essere considerata uguale a quella di un regolatore proporzionale che inizia l'azione correttiva T_D secondi prima dell'istante in cui si manifesta il segnale $e(t)$ (fig. 5.8.33).

In un sistema reale, nel quale il coefficiente angolare del segnale $e(t)$ non sia mantenuto costante in modo forzato, l'azione prodotta dal regolatore derivativo all'istante $t = 0^+$ provoca la diminuzione del segnale $e(t)$. Tuttavia, a causa del permanere di un errore residuo che l'azione derivativa non è in grado di eliminare, negli istanti successivi a $t = 0^+$ cresce anche il segnale $m_1(t)$ dovuto all'azione proporzionale. In tal modo l'azione combinata del regolatore proporzionale e di quello derivativo provoca una ulteriore diminuzione del segnale $e(t)$. Il segnale $m_2(t)$ si riduce sempre più mentre decresce nel tempo la velocità di variazione del segnale $e(t)$ e, così, l'azione proporzionale diviene preponderante rispetto a quella derivativa. Al termine del processo di regolazione la grandezza controllata assume il nuovo valore di regime, il segnale $e(t)$ è costante, ha termine l'azione derivativa ed il regolatore genera un segnale $m_1(t)$ proporzionale all'errore residuo.

Per le sue caratteristiche il regolatore **PD** tende ad anticipare l'errore e pertanto può essere utilizzato nei sistemi in cui si hanno improvvise variazioni del carico, come in alcuni sistemi di controllo per servomotori nei quali si hanno piccole ma improvvise variazioni di velocità. Dalla [5.8.19], posto $e(0) = 0$, si ricava:

$$G(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_P + K_D \cdot s \qquad G(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{K_D}{K_P} \cdot s \right)$$

La funzione di trasferimento del regolatore **PD** presenta uno zero reale negativo $\left(z = -\frac{K_P}{K_D} \right)$ e la sua risposta in frequenza è simile a quella di una

rete anticipatrice attiva avente il guadagno K_P e il polo collocato a frequenza molto elevata, in modo che la sua influenza sulla funzione di trasferimento possa essere considerata trascurabile. Infatti il modulo in dB della funzione

$G(j \cdot \omega)$ è funzione del guadagno proporzionale quando è $\omega < \frac{K_P}{K_D}$ e au-

menta con una pendenza di +20 dB per decade quando è $\omega \geq \frac{K_P}{K_D}$ (fig.

5.8.34). Il guadagno in bassa frequenza e quello in alta frequenza, analogamente a quanto studiato per il regolatore **PI**, si regolano rispettivamente con una variazione di K_P e K_D . Il regolatore **PD** esalta i segnali di rumore a frequenza elevata sovrapposti al segnale differenza.

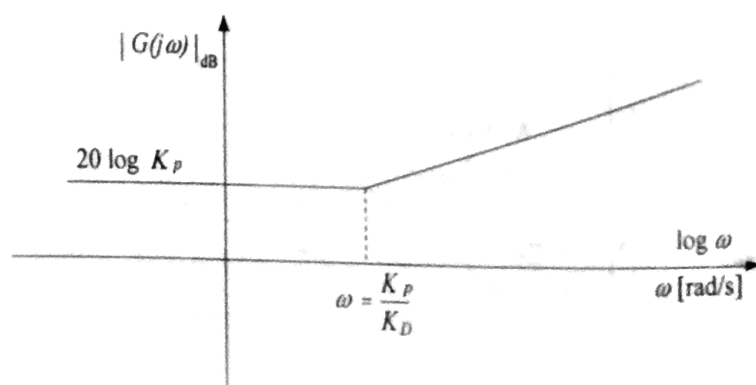


Fig. 5.8.34

Si consideri il sistema del secondo ordine rappresentato in figura 5.8.35 e sia $(K_P + K_D \cdot s)$ la funzione di trasferimento del regolatore **PD**.

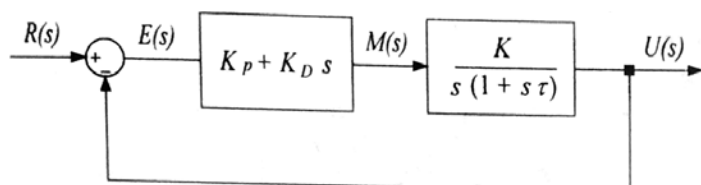


Fig. 5.8.35

L'errore a regime del sistema sollecitato da un segnale a rampa unitaria è uguale a

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + (K_P + K_D \cdot s) \cdot \frac{K}{s(1 + \tau \cdot s)}} = \frac{1}{K_P \cdot K}$$

Il regolatore **PD** non annulla l'errore a regime nei sistemi sollecitati da un determinato segnale. Come esempio si portano i sistemi di *tipo 0* sollecitati da un segnale a gradino e quelli di *tipo 1* sollecitati da un segnale a rampa. La funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema di figura 5.8.35, la pulsazione naturale e il fattore di smorzamento sono rispettivamente uguali a

$$W(s) = \frac{K \cdot (K_P + K_D \cdot s)}{s^2 + \frac{(1 + K \cdot K_D)}{\tau} \cdot s + \frac{K \cdot K_P}{\tau}} \quad [5.8.21]$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K \cdot K_P}{\tau}} \quad [5.8.22]$$

$$\zeta = \frac{(1 + K \cdot K_D)}{2 \cdot \sqrt{K \cdot K_P \cdot \tau}} \quad [5.8.23]$$

L'azione derivativa svolta dal regolatore **PD** consente di aumentare il valore del guadagno proporzionale e, contemporaneamente, di ridurre l'errore a regime perché essa determina, rispetto al regolatore a sola azione proporzionale e a parità di K_P , un aumento del fattore di smorzamento ζ [5.8.23]. Si dimostra che i valori ottimali di K_P e di K_D che non pregiudicano le caratteristiche della risposta devono essere tali da avere un coefficiente di smorzamento compreso tra $0,4 < \zeta < 0,8$.

Nella pratica si usa un regolatore **PD** reale rappresentato nella figura 5.8.36. Posto $R_5 = R_6 = R_7$, la funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{R_4}{R_3} + \frac{R_2 \cdot C \cdot s}{1 + R_1 \cdot C \cdot s}$$

La resistenza R_1 limita il guadagno in alta frequenza ed il polo è collocato a frequenza molto elevata (al di fuori della banda passante di interesse del sistema) in modo che la sua influenza sulla funzione di trasferimento possa essere considerata trascurabile.

Il guadagno in bassa frequenza e quello in alta frequenza, analogamen-

te a quanto studiato per il regolatore **PI**, si regolano rispettivamente con la variazione di K_P e di K_D .

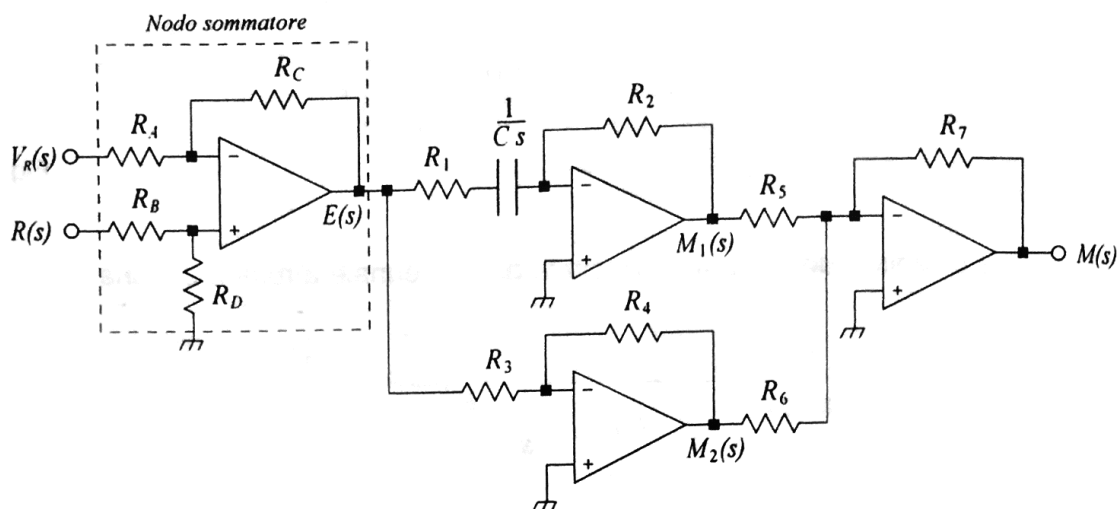


Fig. 5.8.36

Esempio 6

Valutare gli effetti prodotti da un regolatore **PD** sul sistema di controllo rappresentato in Figura 5.8.37 nell'ipotesi che le costanti siano $K = 10$ e $K_P = 10$.

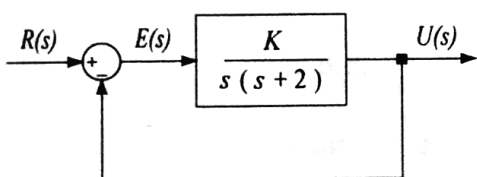


Fig. 5.8.37

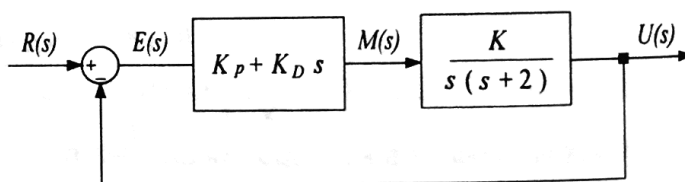


Fig. 5.8.38

La funzione di trasferimento ad anello chiuso e la risposta al gradino unitario del sistema rappresentato in figura 5.8.37 sono rispettivamente uguali a

$$W_1(s) = \frac{10}{s^2 + 2 \cdot s + 10} \quad u_1(t) = 1 - e^{-t} \cdot [\cos(3 \cdot t) + 0,33 \cdot \sin(3 \cdot t)]$$

Il sistema di figura 5.8.38, nel quale è stato inserito un regolatore ad azione **PD**, ha la funzione di trasferimento ad anello chiuso uguale a

$$W_2(s) = \frac{K \cdot (K_P + K_D \cdot s)}{s^2 + (K \cdot K_D + 2) \cdot s + K \cdot K_P} \quad [5.8.24]$$

Confrontando il denominatore della [5.8.24] con $s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2$, posto il fattore di smorzamento $\zeta = 0,7$, si ricavano ω_n e K_D :

$$\omega_n = \sqrt{K \cdot K_P} = \sqrt{10 \cdot 10} = 10 \text{ rad/s} \quad K_D = \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_n - 2}{K} = \frac{2 \cdot 0,7 \cdot 10 - 2}{10} = 1,2 \text{ s}$$

La risposta al segnale a gradino unitario è

$$W_2(s) = \frac{10 \cdot (10 + 1,2 \cdot s)}{s^2 + 14 \cdot s + 100}$$

$$u_2(t) = 1 - e^{-7t} \cdot [\cos(7,14 \cdot t) - 0,7 \cdot \sin(7,14 \cdot t)]$$

Dalle curve di risposta di figura 5.8.39 si deduce che l'effetto smorzatore prodotto dall'azione derivativa ha ridotto l'overshoot ed il tempo di assestamento. L'errore a regime è nullo perché il sistema considerato è di tipo 1 ed è sollecitato da un segnale a gradino.

MATLAB

```
% Modulo 5 Unità didattica 8 Esempio 6
% Funzione di trasferimento del sistema
G=tf(10,[1 2 0])
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W=G/(1+G)
% Funzione di trasferimento del regolatore PD Kp= 10, Kd=1.2
Gpd=tf([1.2 10],[0 1])
% Funzione di trasferimento ad anello aperto
GH=G*Gpd
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
Wl=(G*Gpd)/(1+G*Gpd)
ltview
```

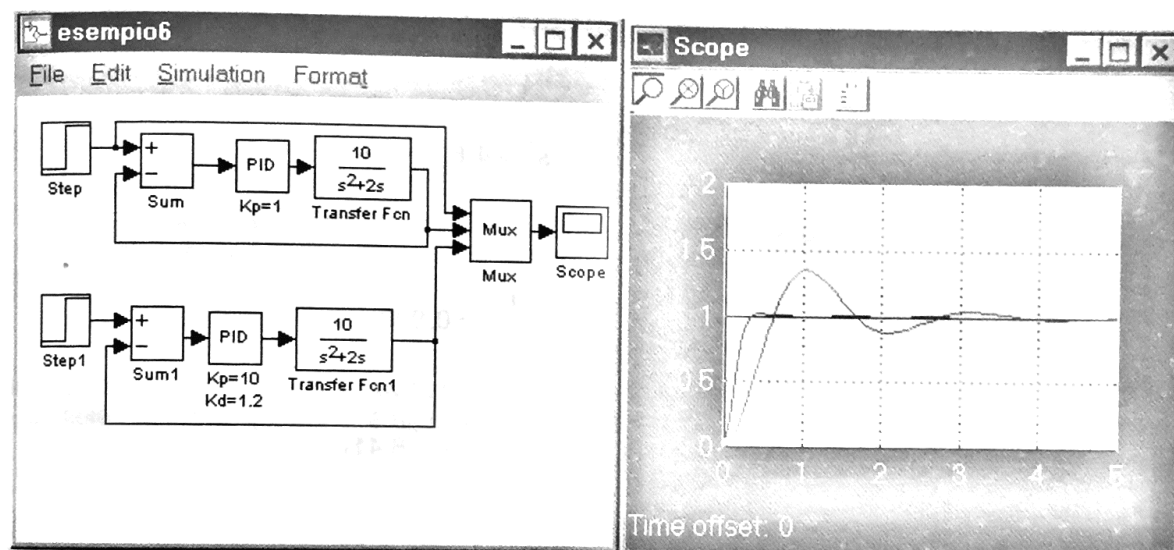


Fig. 5.8.39

Studiare la risposta $u(t)$ al segnale a gradino unitario del sistema di controllo rappresentato in figura 5.8.40 nell'ipotesi che i valori dei coefficienti K_p e K_D siano:

- $K_p = 5$ e $K_D = 0$
- $K_p = 10$ e $K_D = 0,8$ s

Esempio 7

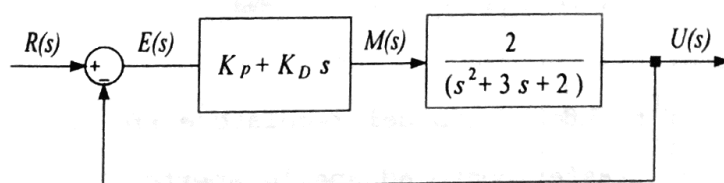


Fig. 5.8.40

La funzione di trasferimento ad anello chiuso, la trasformata della risposta al gradino unitario e l'errore a regime del sistema di figura 5.8.40 sono rispettivamente uguali a

$$W(s) = \frac{2 \cdot (K_p + K_D \cdot s)}{s^2 + (2 \cdot K_D + 3) \cdot s + 2 \cdot (K_p + 1)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{2 \cdot (K_p + K_D \cdot s)}{s^2 + (2 \cdot K_D + 3) \cdot s + 2 \cdot (K_p + 1)} \quad [5.8.25]$$

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + (K_p + K_D \cdot s) \cdot \frac{2}{s^2 + 3 \cdot s + 2}} = \frac{1}{1 + K_p} \quad [5.8.26]$$

Dalla [5.8.25] e dalla [5.8.26] si ricava:

- posto $K_p = 5$ e $K_D = 0$ si ha:

$$U_1(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{10}{s^2 + 3 \cdot s + 12}$$

$$u_1(t) = 0,833 - e^{-1,5t} \cdot [0,833 \cdot \cos(3,12 \cdot t) + 0,4 \cdot \sin(3,12 \cdot t)]$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1+5} = 0,166$$

- posto $K_p = 10$ e $K_D = 0,8$ si ha:

$$U_2(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1,6 \cdot s + 20}{s^2 + 4,6 \cdot s + 22}$$

$$u_2(t) = 0,909 - e^{-2,3t} \cdot [0,909 \cdot \cos(4,08 \cdot t) + 0,12 \cdot \sin(4,08 \cdot t)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{1+10} = 0,090$$

Dalla tabella 5.8.1 si rileva che l'azione derivativa ha consentito di aumentare il valore del coefficiente K_p , di ridurre l'errore a regime e di migliorare complessivamente le specifiche della risposta temporale (fig. 5.8.41).

Tab. 5.8.1

Regolatore	K_p	K_D	ε	ζ	ω_n	$M = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$	$T_s = \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n}$
P	5	0	0,166	0,433	3,46	0,221	2,66(s)
PD	10	0,8	0,090	0,49	4,69	0,171	1,74(s)

MATLAB

```
% Modulo 5 Unità didattica 8 Esempio 7
% Funzione di trasferimento del sistema
G=tf(10,[1 2 0])
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W=G/(1+G)
% Funzione di trasferimento del regolatore PD Kp= 5, Kd=0
Gpd1=tf([0 5],[0 1])
% Funzione di trasferimento ad anello aperto
GH=G*Gpd1
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W1=(G*Gpd1)/(1+G*Gpd1)
% Funzione di trasferimento del regolatore PD Kp= 10, Kd=0.8
Gpd2=tf([0.8 10],[0 1])
% Funzione di trasferimento ad anello aperto
GH1=G*Gpd2
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W2=(G*Gpd2)/(1+G*Gpd2)
ltview
```

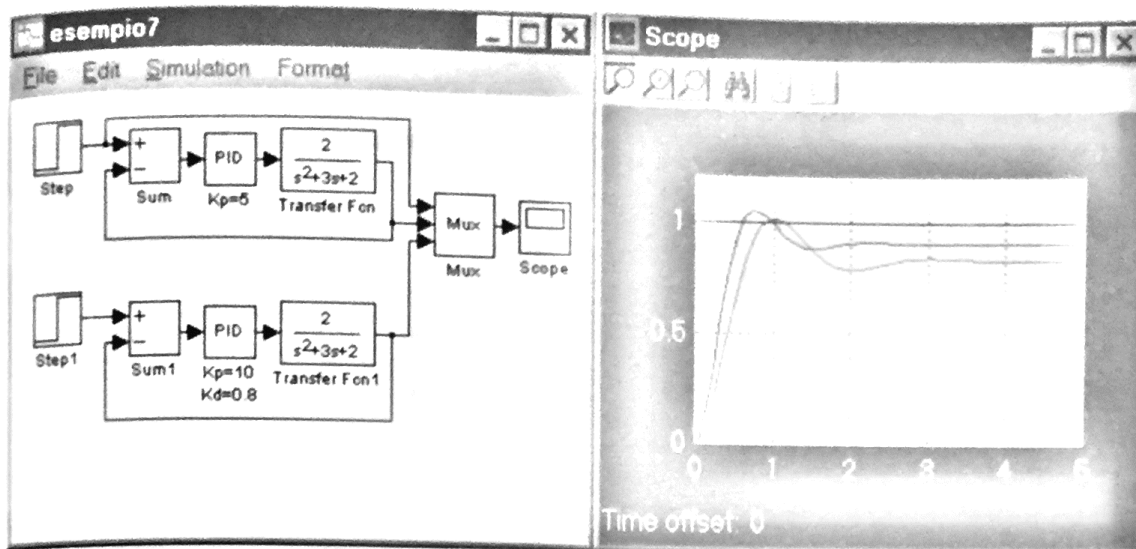


Fig. 5.8.41

5.8.7 Il regolatore ad azione proporzionale, derivativa ed integrale PID

Il regolatore **PID**, costituito dai blocchi proporzionale, integrale e derivativo connessi in parallelo, può essere utilizzato in tutte le applicazioni perché riunisce le caratteristiche dei singoli regolatori studiati precedentemente (fig. 5.8.42).

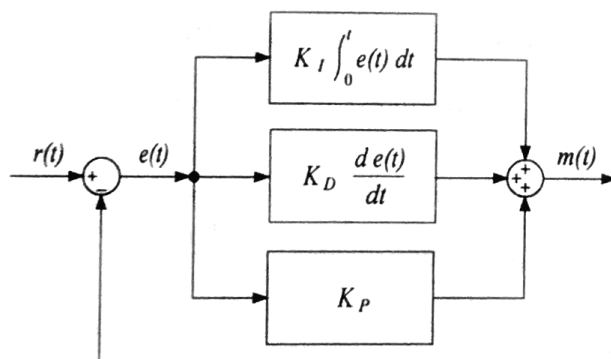


Fig. 5.8.42

Il segnale d'uscita $m(t)$ e la funzione di trasferimento $G(s)$ del regolatore, posto $e(0) = 0$, sono rispettivamente uguali a

$$m(t) = K_P \cdot e(t) + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt} + K_I \int_0^t e(t) dt \quad [5.8.27]$$

$$M(s) = K_P \cdot E(s) + K_D \cdot s \cdot E(s) + K_I \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s)$$

$$G(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_P \cdot \left(1 + \frac{K_D}{K_P} \cdot s + \frac{K_I}{K_P} \cdot \frac{1}{s} \right) \quad [5.8.28]$$

Dalla [5.8.28], posto $T_I = \frac{K_P}{K_I}$ e $T_D = \frac{K_D}{K_P}$, si ricava:

$$G(s) = K_P \cdot \left(1 + T_D \cdot s + \frac{1}{T_I \cdot s} \right) \quad [5.8.29]$$

La [5.8.29] consente di ridisegnare lo schema a blocchi del regolatore PID come in figura 5.8.43.

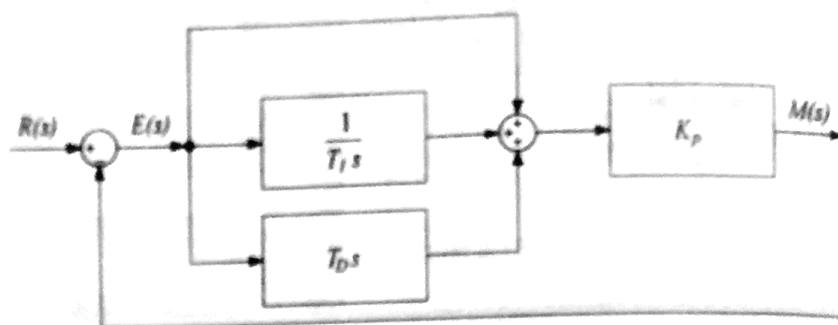


Fig. 5.8.43

Nell'ipotesi che sia $T_I \gg T_D$ la [5.8.29] può essere scritta nella forma

$$G(s) = \frac{K_P}{T_I} \cdot \frac{(1 + T_I \cdot s) \cdot (1 + T_D \cdot s)}{s} \quad [5.8.30]$$

$$G(s) = K_P \cdot \frac{\left(1 + \frac{K_P}{K_I} \cdot s \right) \cdot \left(1 + \frac{K_D}{K_P} \cdot s \right)}{\frac{K_P}{K_I} \cdot s}$$

La funzione di trasferimento di un regolatore PID presenta due zeri che, nel caso sia $T_I \gg T_D$, sono reali e negativi $\left(z_1 = -\frac{1}{T_I}; z_2 = -\frac{1}{T_D} \right)$ e un polo nell'origine (fig. 5.8.44). Il regolatore ha:

- guadagno tendente all'infinito quando è $\omega = 0$ e quando $\omega \rightarrow \infty$;
- guadagno uguale a K_P quando è $\frac{K_I}{K_P} \leq \omega \leq \frac{K_P}{K_D}$.

Il regolatore può essere messo a punto variando la posizione dei due zeri e traslando le semirette con pendenza ± 20 dB. La presenza del polo nell'origine aumenta la precisione a regime del sistema, ma peggiora il suo grado di stabilità anche se è compensato dalla presenza dei due zeri.

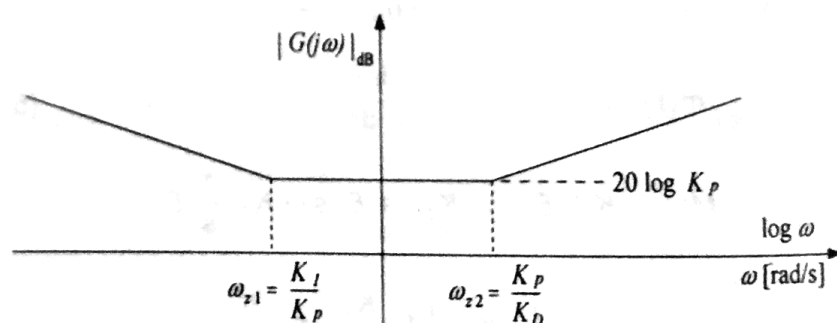


Fig. 5.8.44

Anche il regolatore PID ideale è un sistema "improprio" perché $|G(j \cdot \omega)| \rightarrow \infty$ quando la pulsazione ω tende all'infinito e quando è $\omega = 0$. Per limitare il guadagno, in alta e in bassa frequenza, si utilizza il regolatore PID

reale rappresentato in figura 5.8.45 che ha la funzione di trasferimento uguale a

$$G(s) = \frac{R_6}{R_5} + \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + R_2 \cdot C_1 \cdot s} + \frac{R_4 \cdot C_2 \cdot s}{1 + R_3 \cdot C_2 \cdot s}$$

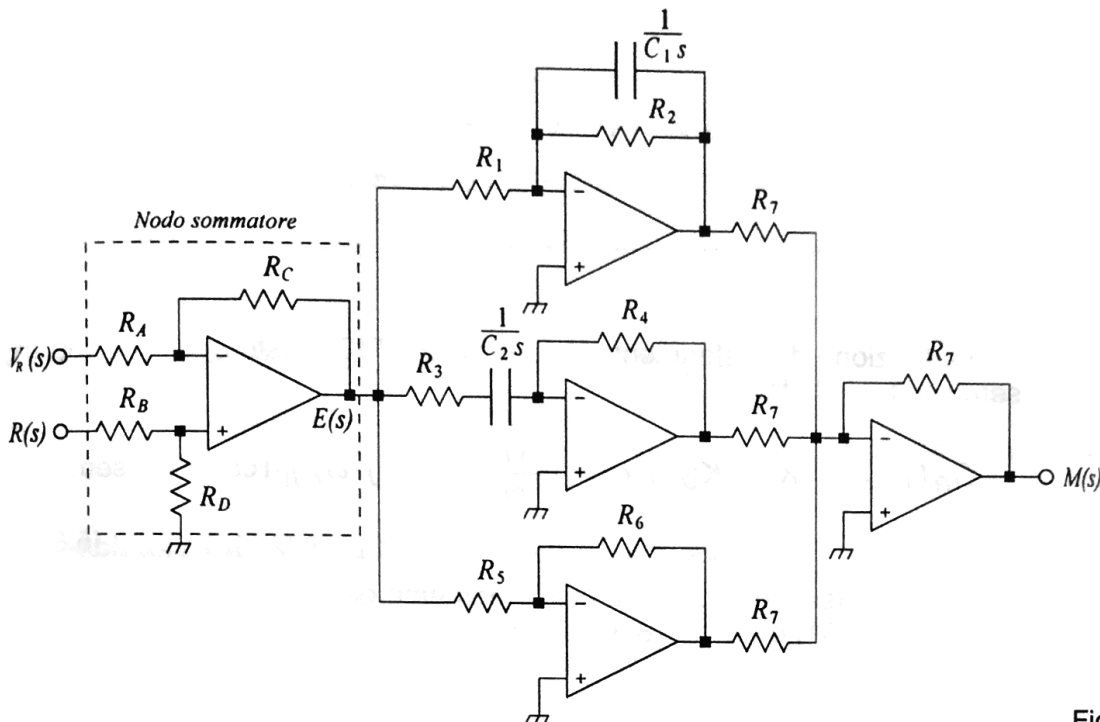


Fig. 5.8.45

5.8.8 Il progetto dei regolatori PID

Molto spesso il progettista di un sistema di controllo deve calcolare i valori dei coefficienti K_P , K_I e K_D che soddisfino le specifiche della risposta in frequenza (margine di fase e di guadagno, banda passante, ecc.) e quelle della risposta temporale (errore a regime, tempo di assestamento, tempo di ritardo, ecc.).

Il *metodo analitico della risposta in frequenza* e quello di *Ziegler-Nichols* sono i metodi, tra i tanti, considerati in questo testo per progettare un regolatore **PID**. Il primo è utilizzato per progettare i regolatori dei sistemi di controllo di cui è nota la funzione di trasferimento, mentre il secondo è utilizzato per mettere a punto i regolatori inseriti nei sistemi di controllo di processi industriali.

Il metodo analitico della risposta in frequenza

È noto che in corrispondenza della pulsazione di attraversamento il modulo e la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto di un sistema stabile, avente margine di fase m_ϕ , sono rispettivamente uguali a

$$|G_R(j \cdot \omega_T) \cdot G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)| = 1 \quad [5.8.31]$$

$$\angle G_R(j \cdot \omega_T) \cdot G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T) = -180^\circ + m_\phi \quad [5.8.32]$$

dove:

- ω_T e m_ϕ sono rispettivamente la pulsazione di crossover ed il margine di fase;
- $G_R(j \cdot \omega_T)$ è la funzione di trasferimento del regolatore (fig. 5.8.46);
- $G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)$ è la funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema (fig. 5.8.46).

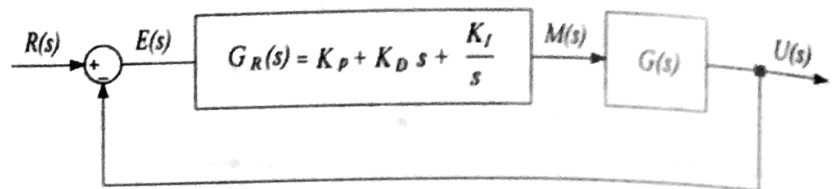


Fig. 5.8.46

La funzione di trasferimento del regolatore **PID**, posto $s = j \cdot \omega$, può essere scritta nella forma:

$$G_R(j \cdot \omega_T) = K_P + K_D \cdot j \cdot \omega_T + \frac{K_I}{j \cdot \omega_T} = |G_R(j \cdot \omega_T)| \cdot (\cos \vartheta + j \cdot \sin \vartheta) \quad [5.8.33]$$

dove ϑ è la fase della funzione di trasferimento del regolatore.

Dalla [5.8.31] e dalla [5.8.32] si ha:

$$|G_R(j \cdot \omega_T)| = \frac{1}{|G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)|} \quad [5.8.34]$$

$$\vartheta = \angle G_R(j \cdot \omega_T) = -180 + m_\phi - \angle G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T) \quad [5.8.35]$$

Uguagliando la parte reale e quella immaginaria della [5.8.33] e tenendo presente la [5.8.34] si ha:

$$K_P = \frac{\cos \vartheta}{|G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)|} \quad [5.8.36]$$

$$K_D \cdot \omega_T - \frac{K_I}{\omega_T} = \frac{\sin \vartheta}{|G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)|} \quad [5.8.37]$$

Per progettare i tre tipi di regolatori si procede preliminarmente nel modo seguente:

- si traccia il diagramma di Bode del modulo e quello della fase della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema non compensato e si calcola la pulsazione ω_1 in corrispondenza della quale si ha:

$$|G(j \cdot \omega_1) \cdot H(j \cdot \omega_1)|_{dB} = 0$$

- si sceglie una pulsazione ω_T , leggermente maggiore di ω_1 , tale che la fase ϑ del regolatore sia minore di 90° . Si tenga presente che la larghezza di banda e la velocità di risposta del sistema aumentano quando aumenta la pulsazione di attraversamento ω_T ;

- si calcola la fase della funzione di trasferimento del regolatore con la formula:

$$\vartheta = \angle G_R(j \cdot \omega_T) = -180 + m_\phi - \angle G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)$$

- si calcola il coefficiente K_P :

$$K_P = \frac{\cos \vartheta}{|G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)|} \quad [5.8.38]$$

Successivamente si scelgono i coefficienti in relazione al tipo di regolatore che si intende realizzare:

- **regolatore PD**: si pone $K_I = 0$ e dalla [5.8.37] si ricava:

$$K_D = \frac{\sin \vartheta}{\omega_T \cdot |G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)|} \quad [5.8.39]$$

- **regolatore PI**: si pone $K_D = 0$ e dalla [5.8.37] si ricava:

$$K_I = \frac{|\omega_T \cdot \sin \vartheta|}{|G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)|} \quad [5.8.40]$$

- **regolatore PID**: si fissa K_I e dalla [5.8.37] si ricava:

$$K_D = \frac{K_I}{\omega_T^2} + \frac{\sin \vartheta}{\omega_T \cdot |G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)|} \quad [5.8.41]$$

Si varia il valore di K_I in modo da ottenere una risposta soddisfacente del sistema quando essa si discosta dalle specifiche richieste.

Studiare la stabilità del sistema a retroazione unitaria di figura 5.8.47 ed, eventualmente, stabilizzarlo con un regolatore **PD** o **PID**. Si richiede un margine di fase $m_\phi = 40^\circ$.

Esempio 8

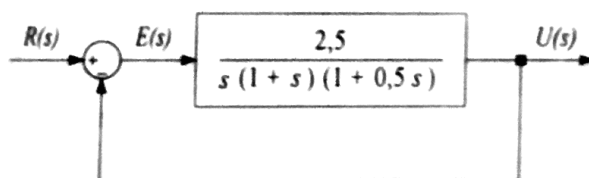


Fig. 5.8.47

La funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{2,5}{s \cdot (1+s) \cdot (1+0,5 \cdot s)}$$

ha un polo nullo $p_1 = 0$ e due poli reali e negativi $p_2 = -1$, $p_3 = -2$. Il sistema è stabile ad anello aperto perché non ha poli a parte reale positiva ($P = 0$). Per valutare la stabilità del sistema ad anello chiuso e, in caso affermativo, anche il suo grado di stabilità si ricorre al criterio di Bode. Posto $s = j \cdot \omega$ si ha:

$$|G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)|_{dB} = 20 \log 2,5 - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1 + (\omega)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\Phi = -90^\circ - \arctg \omega - \arctg \frac{\omega}{2}$$

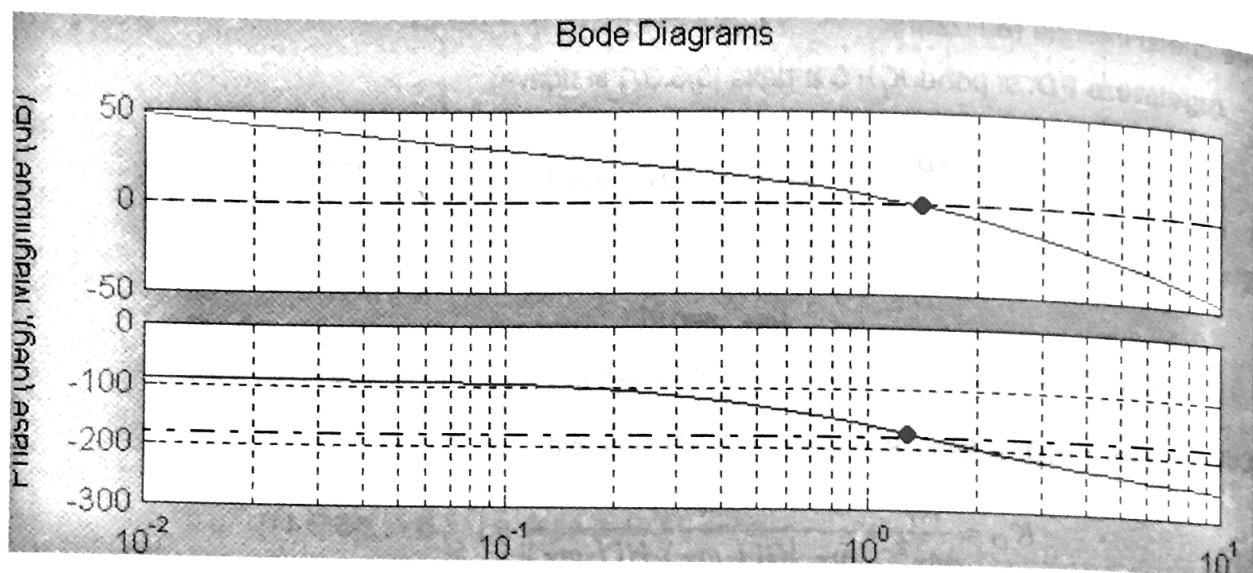
Il diagramma non asintotico del modulo interseca l'asse delle ascisse con una pendenza di -40 dB in corrispondenza della pulsazione $\omega_T \cong 1,3$ rad/s (fig. 5.8.48). Sul diagramma della fase si legge $\Phi_{\omega_T} \cong -175^\circ$ in corrispondenza di $\omega_T \cong 1,3$ rad/s (fig. 5.8.48). Pertanto il margine di fase m_ϕ e il margine di guadagno di $\omega_T \cong 1,3$ rad/s calcolato quando $\Phi = -180^\circ$, sono rispettivamente uguali a

$$m_\phi \cong 180 - |-175| \cong 5^\circ$$

$$m_g \cong 1,6 \text{ dB}$$

Fig. 5.8.48

Il sistema è stabile ad anello chiuso per il criterio di Bode, ma il margine di fase e il margine di guadagno sono al di sotto dei valori consigliati.



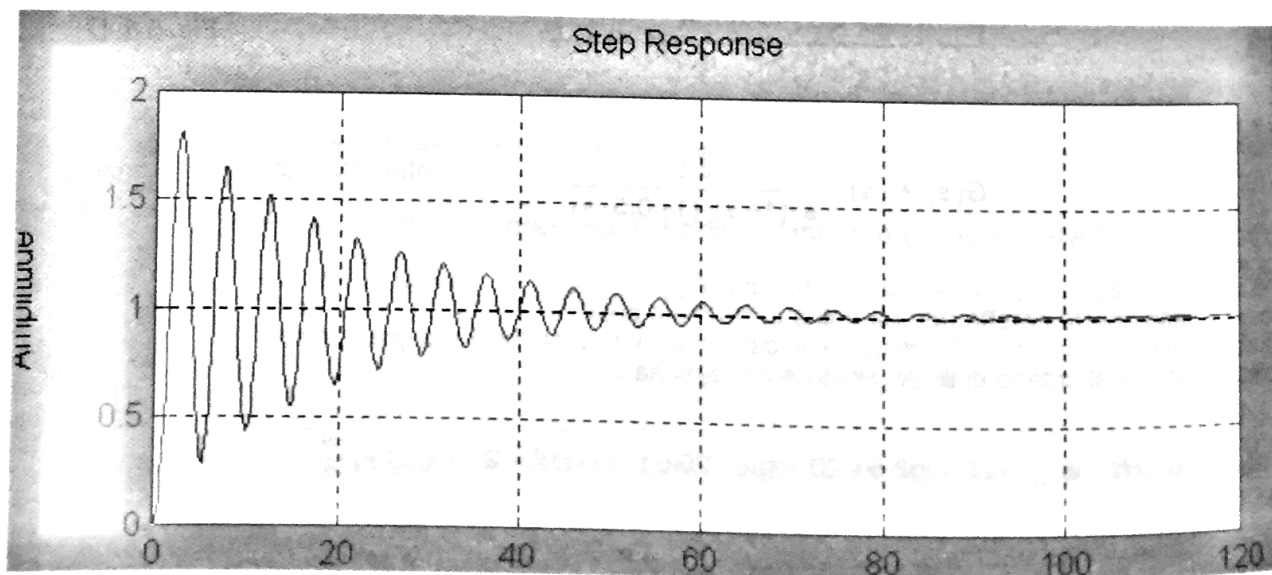
Infatti dalla funzione di trasferimento ad anello chiuso e dalla risposta del sistema al gradino unitario si ricava:

$$W_1(s) = \frac{2,5}{0,5 \cdot s^3 + 1,5 \cdot s^2 + s + 2,5}$$

$$u_1(t) = 1 - 0,17 \cdot e^{-2,9t} - e^{-0,048t} \cdot [0,82 \cdot \cos(1,3 \cdot t) + 0,416 \cdot \sin(1,3 \cdot t)]$$

Fig. 5.8.49

La risposta presenta una sovraelongazione accentuata, un'oscillazione poco smorzata e, pertanto, si rende necessario compensare il sistema (fig. 5.8.49).



Per migliorare le caratteristiche statiche e dinamiche del sistema si ricorre ai regolatori di tipo **PD** o **PID**. Seguendo la metodologia precedentemente illustrata e considerato che la pulsazione di attraversamento calcolata con MATLAB $\omega_1 = 0,9$ rad/s, si assume la pulsazione

$$\omega_T = 1,5 \text{ rad/s}$$

maggiore, di poco, di $\omega_1 = 0,9$ rad/s. In corrispondenza di $\omega_T = 1,5$ rad/s il modulo e la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema non compensato sono rispettivamente uguali a

$$|G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)| = \frac{2,5}{1,5 \cdot \sqrt{1 + (1,5)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1,5}{2}\right)^2}} \cong 0,74$$

$$\Phi = -90^\circ - \arctg 1,5 - \arctg \frac{1,5}{2} \cong -183,16^\circ$$

La fase ϑ del regolatore è uguale a

$$\vartheta = -180^\circ + 40^\circ - (-183,16^\circ) = 43,16^\circ$$

Dalla [5.8.38] si ricava

$$K_P = \frac{\cos 43,16}{|G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)|} = \frac{0,729}{0,74} = 0,98$$

• Regolatore PD

Dalla [5.8.39] si ricava:

$$K_D = \frac{\sin \vartheta}{\omega_T \cdot |G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)|} = \frac{0,684}{1,5 \cdot 0,74} = 0,616$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema compensato con il regolatore **PD** e la risposta al gradino unitario sono rispettivamente uguali a

$$W_2(s) = \frac{1,54 \cdot s + 2,45}{0,5 \cdot s^3 + 1,5 \cdot s^2 + 2,54 \cdot s + 2,45}$$

$$u_2(t) = 1 + 0,058 \cdot e^{-1,7t} - e^{-0,647t} \cdot [1,058 \cdot \cos(1,56 \cdot t) + 0,373 \cdot \sin(1,56 \cdot t)]$$

• Regolatore PID

Dalla [5.8.41], noto K_P e fissato $K_I = 0,04 \text{ s}^{-1}$, si ricava:

$$K_D = \frac{K_I}{\omega_T^2} + \frac{\sin \vartheta}{\omega_T \cdot |G_s(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)|} = \frac{0,04}{2,25} + \frac{0,684}{1,5 \cdot 0,74} = 0,634$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema compensato con il regolatore **PID** e la risposta al gradino unitario sono rispettivamente uguali a

$$W_2(s) = \frac{1,585 \cdot s^2 + 2,45 \cdot s + 0,1}{0,5 \cdot s^4 + 1,5 \cdot s^3 + 2,585 \cdot s^2 + 2,45 \cdot s + 0,1}$$

$$u_2(t) = 1 + 0,071 \cdot e^{-1,66t} + 0,018 \cdot e^{-0,0427t} - e^{-0,665t} \cdot [1,089 \cdot \cos(1,56 \cdot t) + 0,389 \cdot \sin(1,56 \cdot t)]$$

Dalle curve di figura 5.8.50 si rileva che le azioni dei regolatori **PD** e **PID** hanno ridotto la sovraeleongazione e migliorato notevolmente la risposta del sistema quasi in egual misura. Infatti le curve di risposta del sistema compensato con i due tipi di regolatori sono così simili che risultano indistinguibili.

MATLAB

```
% Modulo 5 Unità didattica 8 Esempio 8
g1=tf(2.5,[1 0]);g2=tf(1,[0.5 1]);g3=tf(1,[1 1])
% Funzione di trasferimento del ramo diretto
G=g1*g2*g3
%Funzione di trasferimento ad anello aperto
GH=G*1
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W=(G)/(1+GH)
% Funzione di trasferimento del regolatore PD Kp=0.98, Kd=0.616
Gpd=tf(0.616 0.98],[0 1])
% Funzione di trasferimento ad anello aperto
GH1=G*Gpd
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W1=(G*Gpd)/(1+G*Gpd)
% Funzione di trasferimento del regolatore PID Kp=0.98,Ki=0.04,Kd=0.634
Gpid=tf([0.634 0.98 0.04],[1 0])
% Funzione di trasferimento ad anello aperto
GH2=G*Gpid
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W2=G*Gpid/(1+G*Gpid)
ltiview
```

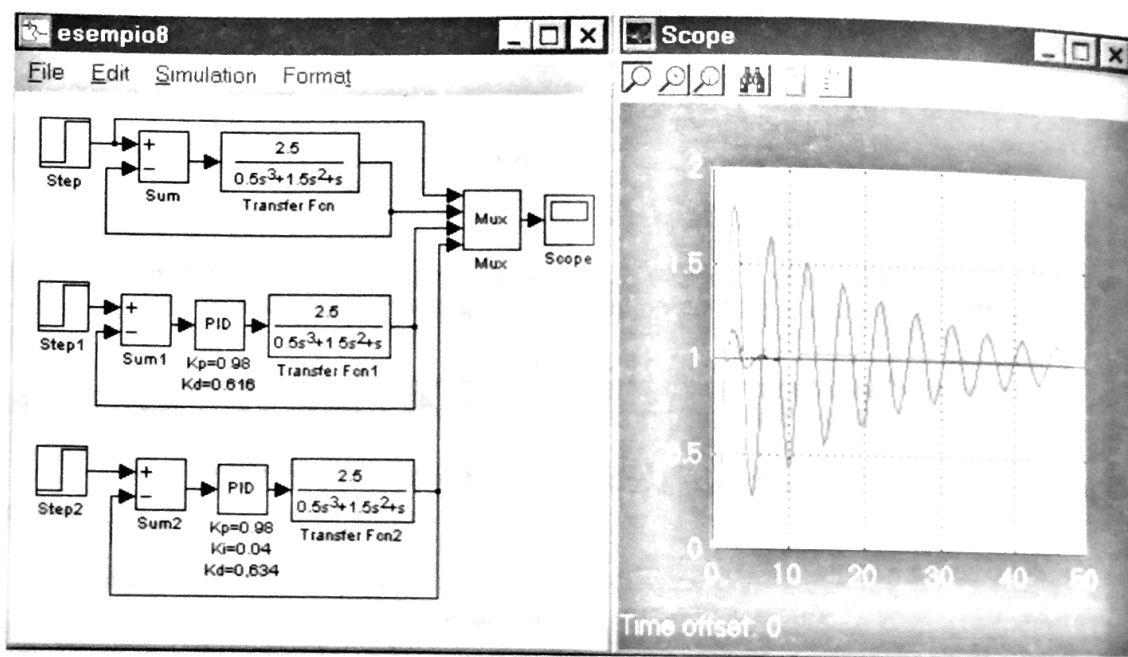


Fig. 5.8.50

Il metodo di Ziegler-Nichols

Un metodo di compensazione molto semplice e abbastanza diffuso in ambito industriale è quello di Ziegler-Nichols che consiste nel ricavare i valori ottimali dei parametri K_p , K_i e K_d agendo su apposite manopole del regolatore tarate in fabbrica. Le fasi della regolazione ottimale sono:

- si pone $K_p = 0$, $K_i = 0$ e $K_d = 0$ e si chiude l'anello di regolazione;
- dopo aver escluso l'azione derivativa e quella integrale si aumenta gradualmente il valore del parametro K_p fino a portare il sistema al limite della stabilità;

- si misura il valore $K_P = K_{Pmax}$ in corrispondenza del quale la risposta del sistema al gradino unitario è un'oscillazione di ampiezza costante;
- si misurano i valori della pulsazione ω_c e del periodo T_c dell'oscillazione persistente.

Dopo aver compiuto le operazioni sopra descritte si regolano le altre manopole in modo che i parametri K_P , K_I e K_D assumano i valori riportati nella tabella 5.8.2.

Tab. 5.8.2

Regolatore	K_P	K_I	K_D	T_I	T_D
P	$0,5 \cdot K_{Pmax}$	0	0		
PD	$0,5 \cdot K_{Pmax}$	0	$(0,5 \cdot K_{Pmax}) \cdot (0,2 \cdot T_c)$		$0,2 \cdot T_c$
PI	$0,45 \cdot K_{Pmax}$	$\frac{0,45 \cdot K_{Pmax}}{0,83 \cdot T_c}$	0	$0,83 \cdot T_c$	
PID	$0,6 \cdot K_{Pmax}$	$\frac{0,6 \cdot K_{Pmax}}{0,5 \cdot T_c}$	$(0,6 \cdot K_{Pmax}) \cdot (0,125 \cdot T_c)$	$0,5 \cdot T_c$	$0,125 \cdot T_c$

L'esempio che segue vuole illustrare i contenuti concettuali sui quali si fonda il metodo di Ziegler-Nichols anche se, nella realtà, i coefficienti K_P , K_I e K_D sono ricavati unicamente per via sperimentale.

Si consideri il sistema a retroazione unitaria di figura 5.8.46, già studiato nell'esempio 8 e sia

Esempio 9

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{2,5}{s \cdot (1+s) \cdot (1+0,5 \cdot s)}$$

la funzione di trasferimento ad anello aperto.

Si tracci il luogo delle radici e si calcoli il valore del guadagno K_P in corrispondenza del quale le radici dell'equazione caratteristica sono complesse coniugate a parte reale nulla. Si ricava che il luogo delle radici interseca l'asse delle ordinate nei punti $s = \pm j \cdot 1,412$ quando è $K_{Pmax} \cong 1,2$ (fig 5.8.51). Pertanto la pulsazione e il periodo dell'oscillazione persistente sono rispettivamente uguali a

$$\omega_c = 1,412 \text{ rad/s} \quad T_c = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_c} = \frac{2 \cdot 3,14}{1,412} = 4,44 \text{ s}$$

Applicando le formule di Ziegler-Nichols si ricavano i valori dei parametri riportati nella tabella 5.8.3

Tab. 5.8.3

Regolatore	K_P	K_I	K_D
P	0,6	0	0
PD	0,6	0	0,53
PI	0,54	0,146	0
PID	0,72	0,32	0,4

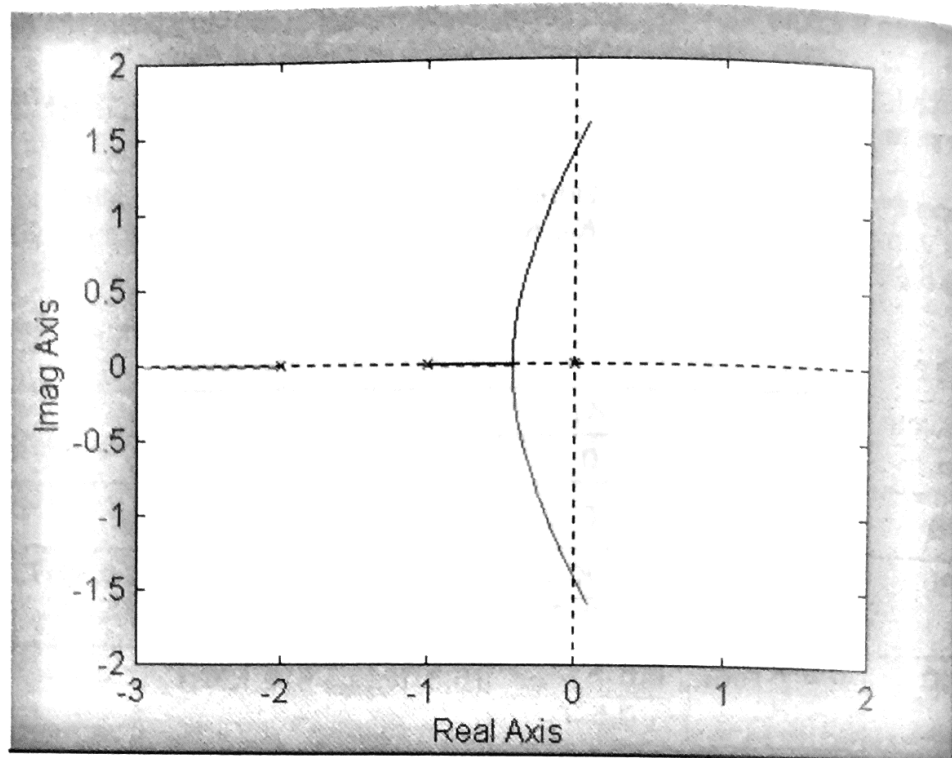


Fig. 5.8.51

- **Regolatore PD**

La funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema compensato con il regolatore **PD** e la sua risposta al gradino unitario sono rispettivamente uguali a

$$W_2(s) = \frac{1,325 \cdot s + 1,5}{0,5 \cdot s^3 + 1,5 \cdot s^2 + 2,325 \cdot s + 1,5}$$

$$u_2(t) \cong 1 + 0,1 \cdot e^{-1,2t} - e^{-0,896t} \cdot [1,1 \cdot \cos(1,3 \cdot t) + 0,67 \cdot \sin(1,3 \cdot t)]$$

- **Regolatore PID**

La funzione di trasferimento ad anello chiuso del sistema compensato con il regolatore **PID** e la sua risposta al gradino unitario sono rispettivamente uguali a

$$W_3(s) = \frac{s^2 + 1,8 \cdot s + 0,8}{0,5 \cdot s^4 + 1,5 \cdot s^3 + 2 \cdot s^2 + 1,8 \cdot s + 0,8}$$

$$u_3(t) \cong 1 + 0,38 \cdot e^{-1,39t} - e^{-0,3t} \cdot [1,38 \cdot \cos(1,03 \cdot t) + 0,1 \cdot \sin(1,03 \cdot t)]$$

In figura 5.8.52 sono riportate le curve di risposta al gradino unitario del sistema non compensato e quelle del sistema compensato con i regolatori **PD** e **PID** progettati utilizzando il metodo di Ziegler-Nichols. Confrontando le curve di risposta di figura 5.8.50 e quelle di figura 5.8.52 si deduce che la differenza dell'ampiezza dell'overshoot tra le curve di risposta del sistema compensato con il regolatore **PID** e quello compensato con il regolatore **PD** è dovuta al fatto che il coefficiente K_I calcolato con il metodo di Ziegler-Nichols è molto maggiore di quello calcolato con il metodo analitico.

MATLAB

```
% Modulo 5 Unità didattica 8 Esempio 9
g1=tf(2.5,[1 0]);g2=tf(1,[0.5 1]);g3=tf(1,[1 1])
% Funzione di trasferimento del ramo diretto
G=g1*g2*g3
```

```

% Funzione di trasferimento ad anello aperto
GH=G*1
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W=G/(1+GH)
W=minreal(W)
rlocus(GH)
% Funzione di trasferimento del regolatore PD Kp=0.6, Kd=0.53
Gpd=tf(0.53 0.6],[0 1])
% Funzione di trasferimento ad anello aperto
GH1=G*Gpd
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W1=(G*Gpd)/(1+G*Gpd)
% Funzione di trasferimento del regolatore PID Kp=0.72, Ki=0.32 Kd=0.4
Gpid=tf([0.4 0.72 0.32],[1 0])
% Funzione di trasferimento ad anello aperto
GH2=G*Gpid
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso
W2=G*Gpid/(1+G*Gpid)
ltiview

```

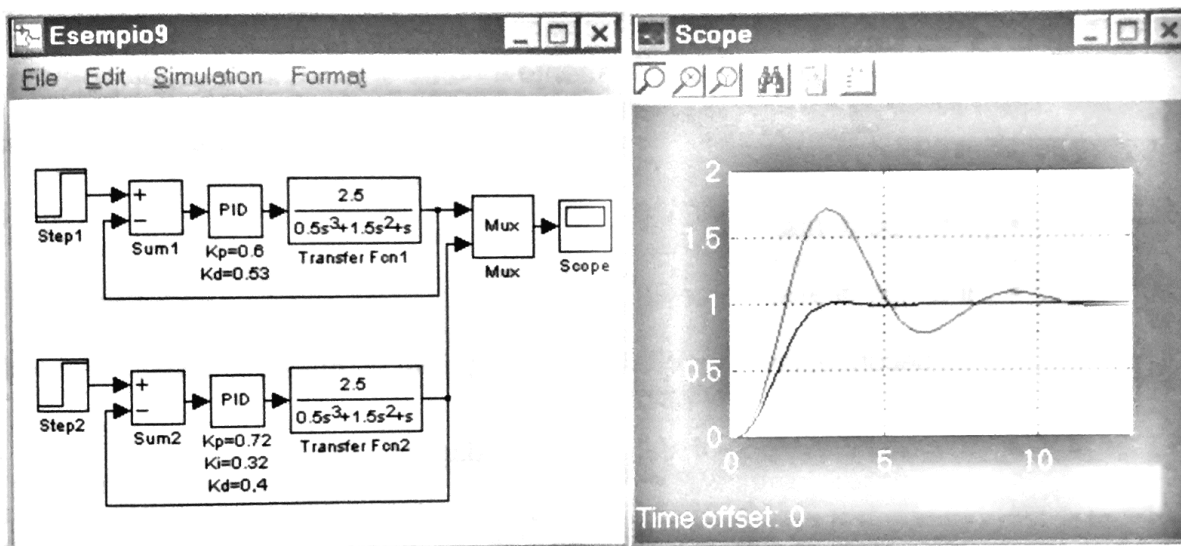


Fig. 5.8.52