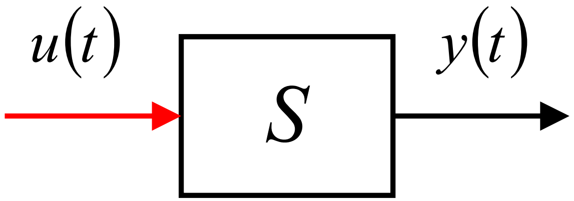
Lezione 6.
Funzione di trasferimento

Schema della lezione

1. Definizione (operativa)
2. Interpretazione della funzione di trasferimento
3. Funzione di trasferimento: poli e zeri
4. Funzione di trasferimento: parametrizzazioni
5. Guadagno statico e guadagno di una funzione di trasferimento

1. Definizione (operativa)



Sistema LTI SISO

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \qquad \alpha_n = 1$$

$$y_0 = y_{1,0} = \cdots = y_{n-1,0} = 0$$

condizioni iniziali nulle

Si effettui la trasformata di Laplace di entrambi i membri dell'equazione

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i Y(s) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i s^i U(s)$$

$$\left(s^n + \ldots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0\right) Y(s) = \left(\beta_m s^m + \ldots + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0\right) U(s)$$

Si definisce **funzione di trasferimento** il rapporto tra le trasformate di Laplace dell'uscita e dell'ingresso (con <u>condizioni iniziali nulle</u>).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boxed{\frac{\beta_m s^m + \ldots + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \ldots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}}$$

Funzione di trasferimento

da cui $Y(s) = G(s)U(s)$

2. Interpretazione della funzione di trasferimento

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento $G(s)$

Siano $u(t) = \text{imp}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 1$

condizioni iniziali nulle

Allora

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

La funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso del sistema

Esempio 1

$$\dot{y}(t)+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}u(t)$$ Equazione del circuito RC

$$sY(s)+\frac{1}{RC}Y(s)=\frac{1}{RC}U(s)$$

$$\left(s+\frac{1}{RC}\right)Y(s)=\frac{1}{RC}U(s)$$

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}U(s)$$

$$\boxed{G(s)=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}}$$

Esempio 2

$$\dot{y}(t)+\frac{k}{A}y(t)=\frac{k}{A}u(t)$$

Equazione del serbatoio

$$sY(s)+\frac{k}{A}Y(s)=\frac{k}{A}U(s)$$

$$\left(s+\frac{k}{A}\right)Y(s)=\frac{k}{A}U(s)$$

$$Y(s)=\frac{\frac{k}{A}}{s+\frac{k}{A}}U(s)$$

$$\boxed{G(s)=\frac{\frac{k}{A}}{s+\frac{k}{A}}}$$

Esempio 3

$$\dot{y}(t)+\frac{k}{C}y(t)=\frac{1}{C}u(t)$$ Equazione del forno

$$sY(s)+\frac{k}{C}Y(s)=\frac{1}{C}U(s)$$

$$\left(s+\frac{k}{C}\right)Y(s)=\frac{1}{C}U(s)$$

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{C}}{s+\frac{k}{C}}U(s)$$

$$\boxed{G(s)=\frac{\frac{1}{C}}{s+\frac{k}{C}}}$$

Esempio 4

$$\ddot{y}(t)+\frac{R}{L}\dot{y}(t)+\frac{1}{LC}y(t)=\frac{1}{LC}u(t)$$

Equazione del circuito RLC

$$s^2Y(s)+\frac{R}{L}sY(s)+\frac{1}{LC}Y(s)=\frac{1}{LC}U(s)$$

$$\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)Y(s)=\frac{1}{LC}U(s)$$

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}U(s)$$

$$\boxed{G(s)=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}}$$

Esempio 5

$$\ddot{y}(t)+\frac{h}{M}\dot{y}(t)+\frac{k}{M}y(t)=\frac{1}{M}u(t)$$ Equazione massa molla smorzatore

$$s^2Y(s)+\frac{h}{M}sY(s)+\frac{k}{M}Y(s)=\frac{1}{M}U(s)$$

$$\left(s^2+\frac{h}{M}s+\frac{k}{M}\right)Y(s)=\frac{1}{M}U(s)$$

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{M}}{s^2+\frac{h}{M}s+\frac{k}{M}}U(s)$$

$$\boxed{G(s)=\frac{\frac{1}{M}}{s^2+\frac{h}{M}s+\frac{k}{M}}}$$

Proprietà

$G(s)$ è sempre razionale $\qquad G(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$

$$D(s)=s^n+\ldots+\alpha_2 s^2+\alpha_1 s+\alpha_0=\varphi(s)$$

è il **polinomio caratteristico** $\varphi(s)$ dell'equazione omogenea. Le radici dell'**equazione caratteristica** $\varphi(s)=0$ sono gli **autovalori**.

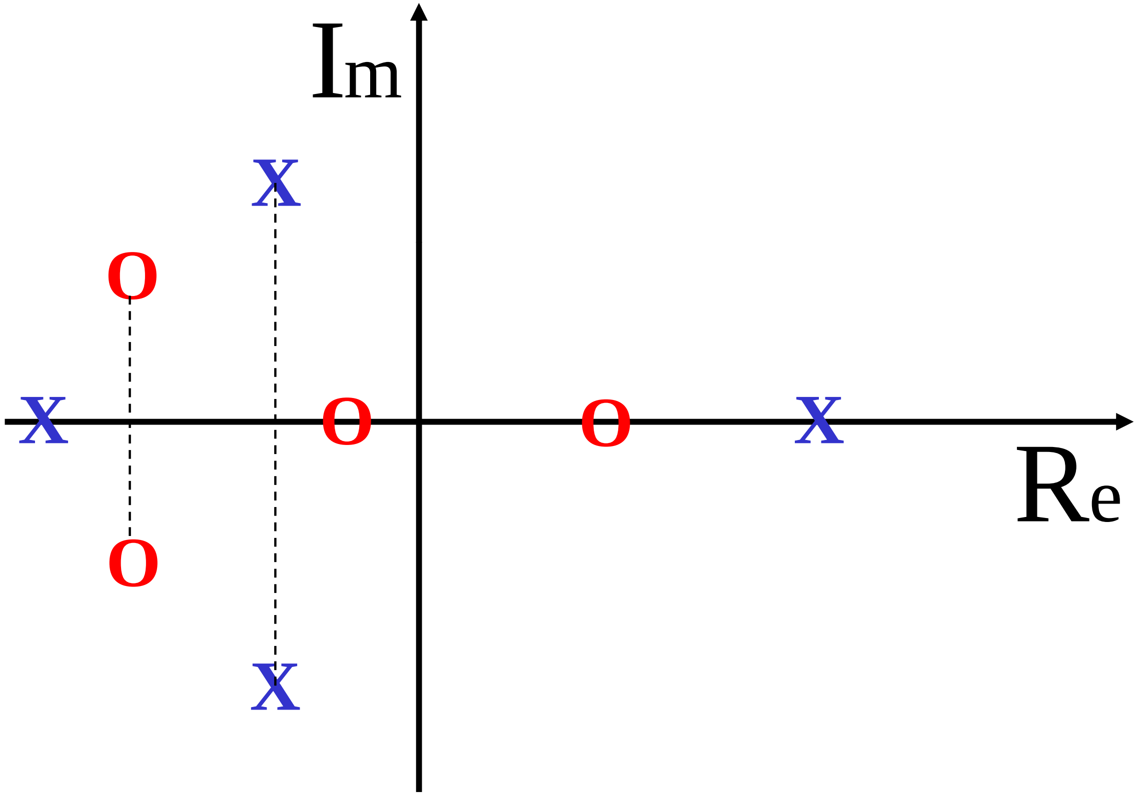
$N(s)$ è un polinomio in s di grado $m \le n$

3. Funzione di trasferimento : poli e zeri

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

O Zeri : radici di $N(s)=0$

X Poli : radici di $D(s)=0$



Proprietà

I **poli** della funzione di trasferimento sono tutti **autovalori**.

Il **numero di zeri è inferiore, al più uguale, al numero di poli**.

Se il numero di zeri è strettamente inferiore al numero di poli, il sistema LTI si dice **strettamente proprio**.

Altrimenti, si dice **proprio**.

4. Funzione di trasferimento : parametrizzazioni

1. $G(s)=\dfrac{\beta_m s^m+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{\alpha_n s^n+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}$ parametri: β_i,α_i

2. $G(s)=\rho\,\dfrac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\rho\,\dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$

parametri: ρ costante di trasferimento

z_i zeri p_i poli

3. $G(s)=\dfrac{\mu}{s^g}\,\dfrac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}$

parametri: μ guadagno della FdT

T_i , τ_i costanti di tempo

g tipo

Osservazione – Relazione tra la 2 e la 3

$$G(s)=\rho\frac{\prod_i (s-z_i)}{\prod_i (s-p_i)}=\frac{\rho}{s^g}\frac{\prod_i z_i\left(\frac{s}{z_i}-1\right)}{\prod_i p_i\left(\frac{s}{p_i}-1\right)}=$$

$$=\frac{1}{s^g}\underbrace{\rho\frac{\prod_i (-z_i)}{\prod_i (-p_i)}}_{\mu}\frac{\prod_i\left(1-\frac{s}{z_i}\right)}{\prod_i\left(1-\frac{s}{p_i}\right)}=\frac{\mu}{s^g}\frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)}$$

dove $-\frac{1}{z_i}=T_i \quad -\frac{1}{p_i}=\tau_i$

Esempio

$$G(s)=\frac{5s^2+35s+50}{s^2+10s+21}$$ è nella forma 1 $$\begin{cases}\beta_0=50,\beta_1=35,\beta_2=5\\ \alpha_0=21,\alpha_1=10,\alpha_2=1\end{cases}$$

Calcolando poli e zeri è possibile metterla nella forma 2

$$G(s)=\frac{5s^2+35s+50}{s^2+10s+21}=\frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)}\qquad\begin{cases}\rho=5\\ z_1=-2,z_2=-5\\ p_1=-3,p_2=-7\end{cases}$$

Raccogliendo z_i e p_i si può passare alla forma 3

$$G(s)=\frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)}=\frac{5\cdot5\cdot2\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{5}s+1\right)}{3\cdot7\left(\frac{1}{3}s+1\right)\left(\frac{1}{7}s+1\right)}=\frac{\frac{50}{21}\left(1+\frac{1}{2}s\right)\left(1+\frac{1}{5}s\right)}{\left(1+\frac{1}{3}s\right)\left(1+\frac{1}{7}s\right)}$$

$$\mu=\frac{50}{21},T_1=\frac{1}{2},T_2=\frac{1}{5},\tau_1=\frac{1}{3},\tau_2=\frac{1}{7},g=0$$

5. Guadagno statico e guadagno di una funzione di trasferimento

C'è una relazione tra guadagno della funzione di trasferimento e guadagno statico?

Se $g = 0$

il guadagno statico del sistema è uguale al guadagno della funzione di trasferimento.

$$\boxed{\mu = G(0)}$$

Se $g \neq 0$

il guadagno della funzione di trasferimento si calcola così:

$$\mu = \lim_{s \to 0} s^g G(s)$$

Si dice **guadagno "generalizzato"** della funzione di trasferimento e non ha alcuna relazione con il guadagno statico del sistema.

Osservazione

Perché nel caso $g = 0$ il guadagno statico può essere calcolato come $\mu = G(0)$?

Il sistema è descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \qquad \alpha_n = 1$$

che nel dominio delle trasformate diventa

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i Y(s) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i s^i U(s) \quad \alpha_n = 1$$

Per il calcolo dell'equilibrio si annullano le derivate di ingresso ed uscita. Ciò equivale a porre $s = 0$ nel dominio delle trasformate.

Esempio

Sistema 1

$$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+21y(t)=\dot{u}(t)+8u(t)$$

$$u(t)=\bar{u} \Rightarrow 21\bar{y}=8\bar{u} \Rightarrow \mu=\frac{\bar{y}}{\bar{u}}=\frac{8}{21}$$

guadagno statico del sistema

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s)=\frac{s+8}{s^2+5s+21} \xrightarrow{\text{forma 3}} G(s)=\underbrace{\frac{8}{21}}_{\mu}\frac{1+\frac{1}{8}s}{1+\frac{5}{21}s+\frac{1}{21}s^2}$$

$\boxed{g=0}$

guadagno della funzione di trasferimento

Sistema 2

$$\ddot{y}(t)+14\dot{y}(t)+40y(t)=4\ddot{u}(t)+32\dot{u}(t)$$

$$u(t)=\bar{u} \Rightarrow 40\bar{y}=0 \Rightarrow \mu=\frac{\bar{y}}{\bar{u}}=0$$

guadagno statico del sistema

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

g<0

$$G(s)=\frac{4s^2+32s}{s^2+14s+40} \xrightarrow{\text{forma 2}} \frac{4s(s+8)}{(s+4)(s+10)} \xrightarrow{\text{forma 3}} \frac{\frac{4}{5}s\left(1+\frac{1}{8}s\right)}{\left(1+\frac{1}{4}s\right)\left(1+\frac{1}{10}s\right)}$$

μ **guadagno (generalizzato) della funzione di trasferimento**

Infatti: $\mu=\lim_{s\to 0} s^g G(s)=\frac{4}{5}$

Sistema 3

$$\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)=4\dot{u}(t)+32u(t)$$

$$u(t)=\bar{u} \quad \Rightarrow \quad 0=32\bar{u} \quad \Rightarrow \quad \text{Per } \bar{u}\neq 0 \quad \nexists\ \mu$$

Il guadagno statico del sistema non è definito

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s)=\frac{4s+32}{s^2+4s} \xrightarrow{\text{forma 2}} \frac{4(s+8)}{s(s+4)} \xrightarrow{\text{forma 3}} \frac{8\left(1+\frac{1}{8}s\right)}{s\left(1+\frac{1}{4}s\right)} \qquad \boxed{g>0}$$

μ **guadagno (generalizzato) della funzione di trasferimento**

Infatti: $\mu=\lim_{s\to 0} s^g G(s)=8$

Esempio 1

$$G(s)=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}=\frac{1}{1+sRC}$$

FdT del circuito RC

Poli: $s=-\frac{1}{RC}$

Costante di tempo del polo: $\tau = RC$

Zeri: no

Tipo: $g=0$

Guadagno: $\mu = G(0) = 1$

Esempio 2

$$G(s) = \frac{\frac{k}{A}}{s + \frac{k}{A}} = \frac{k}{As + k} = \frac{1}{1 + s\frac{A}{k}}$$ FdT del serbatoio

Poli: $s = -\frac{k}{A}$ Costante di tempo del polo: $\tau = \frac{A}{k}$

Zeri: no

Tipo: $g = 0$

Guadagno: $\mu = G(0) = 1$

Esempio 3

$$G(s)=\frac{\frac{1}{C}}{s+\frac{k}{C}}=\frac{1}{sC+k}=\frac{\frac{1}{k}}{1+s\frac{C}{k}}$$

FdT del forno

Poli: $s=-\frac{k}{C}$

Costante di tempo del polo: $\tau=\frac{C}{k}$

Zeri: no

Tipo: $g=0$

Guadagno: $\mu=G(0)=\frac{1}{k}$

Esempio 4

$$G(s)=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}=\frac{1}{1+sRC+s^2LC}$$ FdT del circuito RLC

Poli: $s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\frac{R}{2L}\sqrt{1-\frac{4L}{R^2C}}$

I poli sono complessi coniugati se: $R^2C-4L<0$

I poli sono immaginari se: $R=0$ e valgono $s_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}}$

Zeri: no

Tipo: $g=0$

Guadagno: $\mu=G(0)=1$

Esempio 5

$$G(s) = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{h}{k}s + \frac{M}{k}s^2}$$

FdT del sistema massa molla smorzatore

Poli: $s_{1,2} = -\frac{h}{2M} \pm \frac{h}{2M}\sqrt{1 - \frac{4kM}{h^2}}$

I poli sono complessi coniugati se: $h^2 - 4kM < 0$

I poli sono immaginari se: $h = 0$

e valgono $s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{M}}$

Zeri: no

Tipo: $g = 0$

Guadagno: $\mu = G(0) = \frac{1}{k}$