



Fondamenti di Automatica

Analisi armonica e metodi grafici

Dott. Ing. Marcello Bonfè

Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara

Tel. +39 0532 974839

E-mail: marcello.bonfe@unife.it

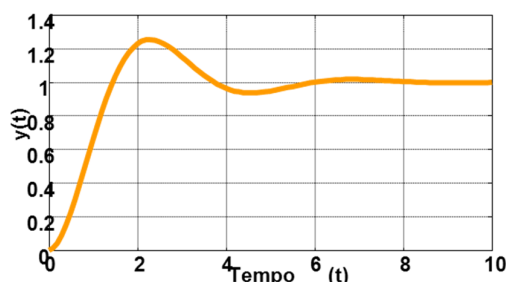


Analisi armonica e metodi grafici RISPOSTA ARMONICA



Analisi armonica e motivazioni

- ➡ **L'analisi armonica** si contrappone alle analisi nel **dominio del tempo** viste finora:



- ➡ Tramite l'analisi armonica infatti, si considerano le proprietà dei sistemi dinamici osservabili da risposte in regime sinusoidale, caratterizzate dalla frequenza (analisi nel **dominio della frequenza**)

Analisi armonica e motivazioni - 1

- ➡ **L'analisi armonica** si basa sul modello matematico (per sistemi LTI) fornito dalle funzioni di trasferimento
- ➡ Tale modello matematico è equivalente ai modelli basati su equazioni differenziali:
 - per condizioni iniziali nulle (sistemi **in quiete**)
 - per il comportamento **ingresso-uscita**
- ➡ Tuttavia, il modello utilizzato per l'analisi armonica ha il notevole vantaggio di essere più facilmente **identificabile sperimentale**

Risposta armonica

- ➡ Si consideri un sistema LTI con $Y(s) = G(s)U(s)$ e con **tutti i poli a parte reale negativa**

- ➡ Si applichi ingresso al sistema un ingresso sinusoidale:

$$u(t) = X \sin(\omega t) \rightarrow U(s) = \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- ➡ L'uscita ottenuta è una funzione:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{X\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} G(s)$$

i cui poli sono quelli di $G(s)$ più quelli imposti dall'ingresso sinusoidale



Risposta armonica - 1

- ➡ Antitrasformando si ha quindi:

$$y(t) = y_0(t) + k_1 e^{j\omega t} + k_2 e^{-j\omega t}$$

nella quale $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$ e i residui k_1 e k_2 :

$$k_1 = \left[G(s) \frac{X\omega}{s + j\omega} \right]_{s=j\omega} = \frac{X}{2j} G(j\omega)$$

$$k_2 = \left[G(s) \frac{X\omega}{s - j\omega} \right]_{s=-j\omega} = \frac{X}{-2j} G(-j\omega)$$



Risposta armonica - 2

► Ponendo: $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$; $G(-j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}$
con $\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)]$

► Risulta quindi:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= |G(j\omega)| X \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j} \\ &= |G(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi(\omega))\end{aligned}$$

cioè l'uscita del sistema è una sinusoide con:

- **stessa pulsazione** ω di quella in ingresso
- **ampiezza** $Y(\omega) = |G(j\omega)| X$
- **fase** $\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)]$

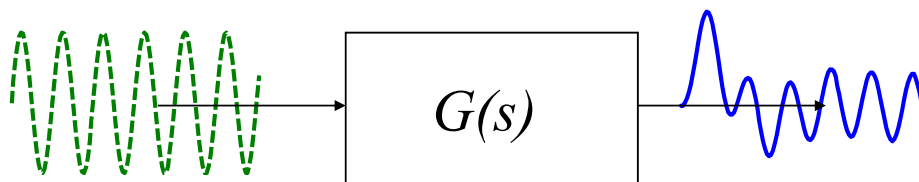


Risposta armonica - 3

► Si ha pertanto che l'ampiezza e lo sfasamento della risposta, rispetto all'ingresso sono funzioni della pulsazione ω :

$$u(t) = X \sin(\omega t)$$

$$y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

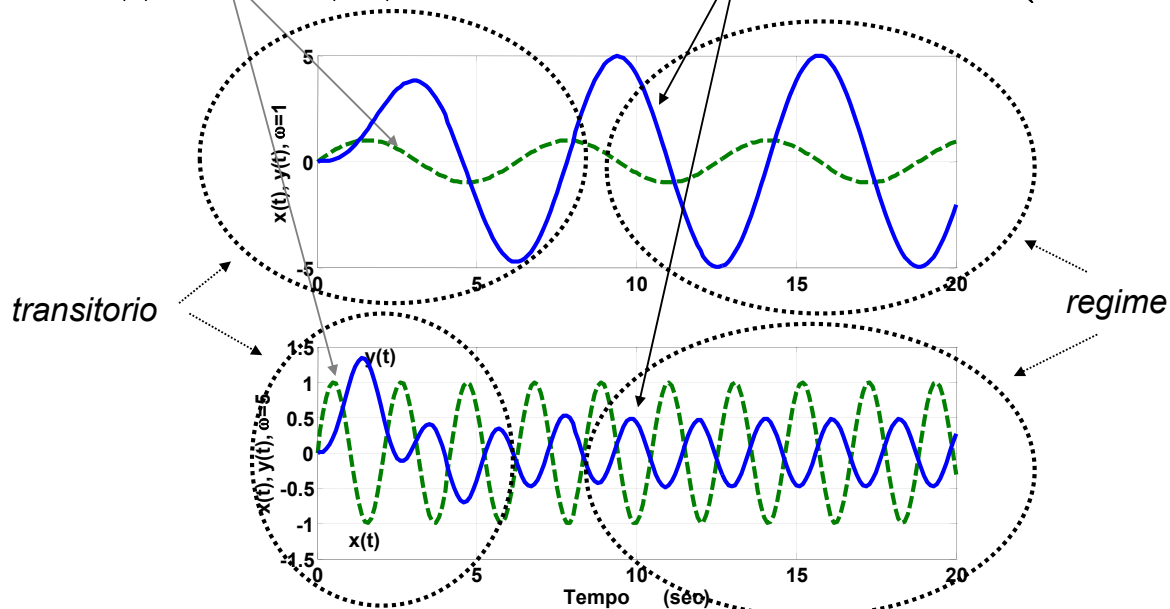


Risposta armonica - 4

- Il regime sinusoidale puro si ottiene una volta terminato il transitorio dipendente dai poli di $G(s)$:

$$u(t) = X \sin(\omega t)$$

$$y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$



pag. 9

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Risposta armonica - 4a

- N.B.:** Nel caso in cui la funzione di trasferimento abbia una coppia di **zeri** puramente immaginari in $\pm j\omega$, allora la risposta del sistema a regime sarà **identicamente nulla**
- In generale, agli zeri z_i della funzione di trasferimento corrispondono dei segnali di ingresso la cui trasformata di Laplace sia:

$$U(s) = \frac{X}{s - z_i}$$

per i quali la risposta forzata è nulla, situazione che evidenzia la **proprietà bloccante degli zeri**

pag. 10

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Risposta armonica - 5

- Si definisce **funzione di risposta armonica** la funzione di variabile reale a valori complessi:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} (\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega))$$

$$F(\omega) \Rightarrow \begin{cases} \text{modulo: rapporto } Y(\omega)/X \\ \text{argomento: angolo } \varphi(\omega) \end{cases}$$

- Essa descrive completamente il comportamento del sistema in condizione di regime periodico alle varie pulsazioni (o frequenze $f = \omega/(2\pi)$): $0 \leq \omega < \infty$



Risposta armonica - 6

- La **funzione di risposta armonica** è legata alla **funzione di trasferimento**:

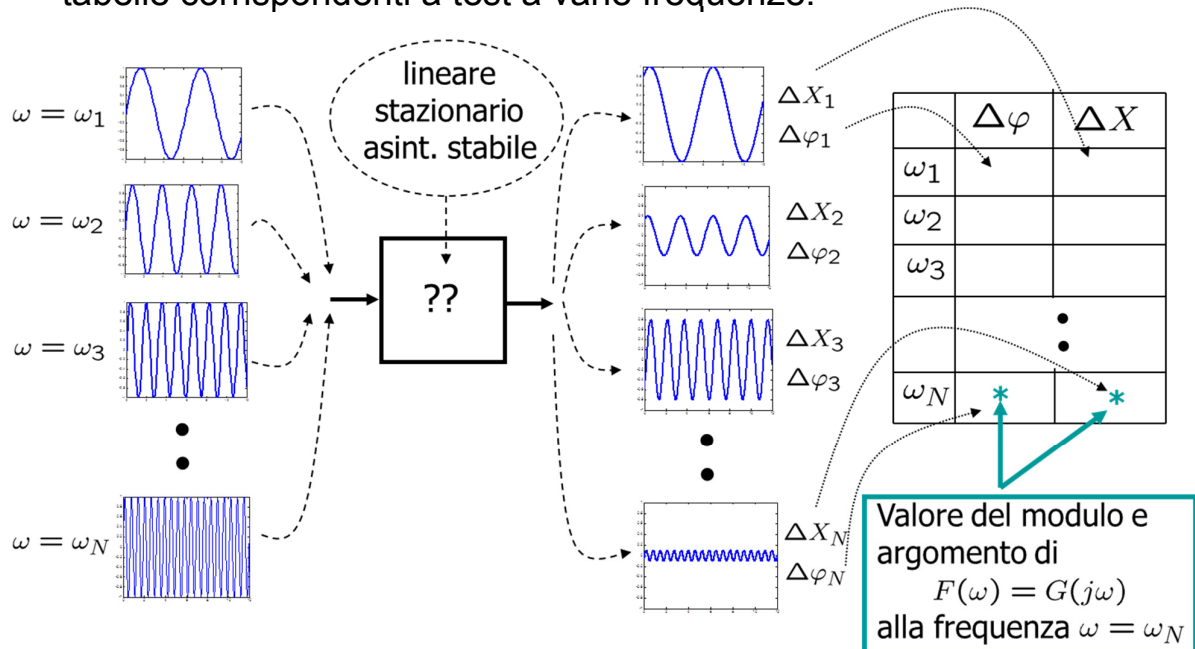
$$F(\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

- Poiché la risposta impulsiva di un sistema determina la sua $G(s)$ (trasformata di Laplace):
- la **risposta impulsiva** di un sistema LTI (asintoticamente stabile e puramente dinamico) determina la **funzione di risposta armonica**
- Tale funzione può quindi essere identificata sperimentalmente



Risposta armonica - 7

- Più comunemente, data la difficoltà di ottenere sperimentalmente una risposta impulsiva, si usa caratterizzare la risposta armonica tramite tabelle corrispondenti a test a varie frequenze:



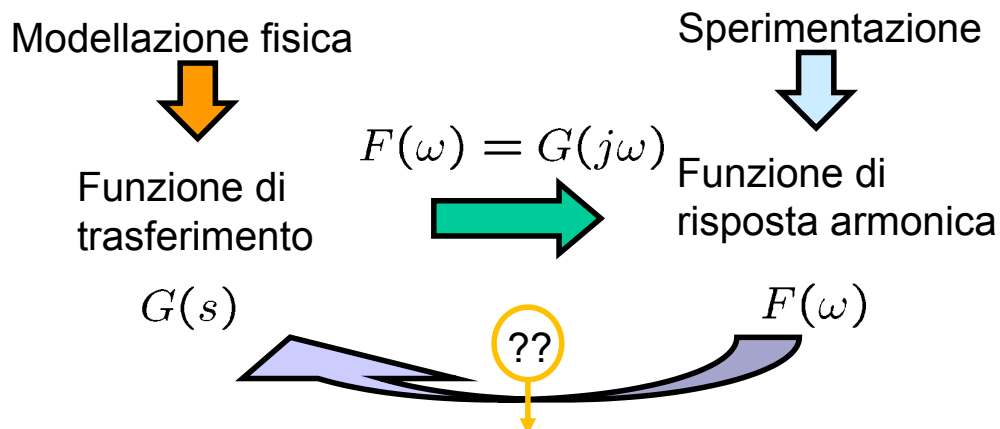
pag. 13

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Risposta armonica - 8

- Si hanno quindi i seguenti possibili procedimenti per ottenere il modello della funzione di trasferimento:



Si possono applicare metodi grafici per la rappresentazione della risposta armonica, tramite i quali è possibile determinare la relazione con la posizione di poli/zeri della funzione di trasferimento

pag. 14

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Analisi armonica e metodi grafici

DIAGRAMMI DI BODE



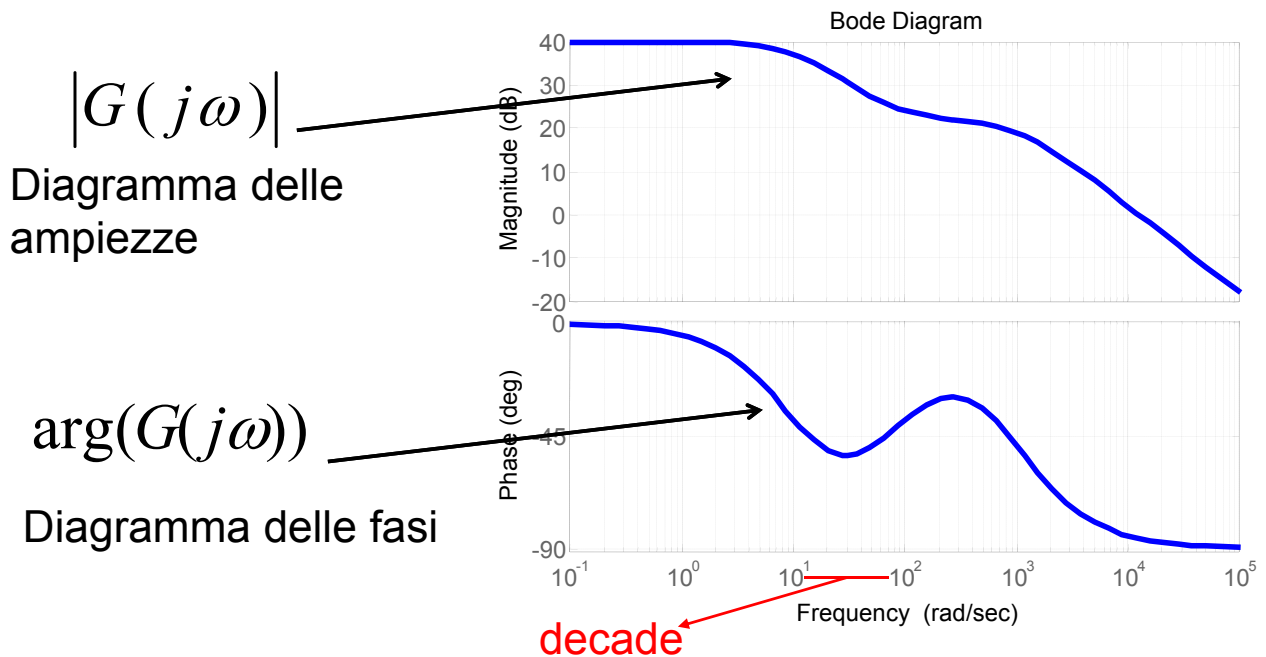
Diagrammi di Bode

- ➡ Sono rappresentazioni grafiche della risposta armonica, che si considera da qui in poi: $G(j\omega)$
- ➡ Poiché $G(j\omega)$ è funzione del numero reale ω , ma ha valori complessi, si usano due differenti grafici:
 - Il **diagramma della ampiezze** (o moduli) $|G(j\omega)|$
 - Il **diagramma delle fasi** $\arg[G(j\omega)]$
- ➡ Il diagramma delle ampiezze è di tipo logaritmico:
 - ascissa: $\log(\omega)$, ordinata: $\log(|G(j\omega)|)$
- ➡ Il diagramma delle fasi è semilogaritmico:
 - ascissa: $\log(\omega)$, ordinata: $\arg[G(j\omega)]$



Diagrammi di Bode - 1

$$G(j\omega) = F(\omega) = |G(j\omega)|e^{j\arg(G(j\omega))}$$



pag. 17

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode - 2

➡ Spesso si usa come unità di misura per il diagramma delle ampiezze il dB (decibel), cioè si pone sull'asse delle ordinate: $20\log(|G(j\omega)|)$

- Se $|G(j\omega)| = 2 \Rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 6$
- Se $|G(j\omega)| = 10 \Rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20$
- Se $|G(j\omega)| = 100 \Rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 40$

➡ I diagrammi logaritmici:

- consentono di rappresentare intervalli molto ampi
- consentono di rappresentare il prodotto di funzioni di risposta armonica sommandone i diagrammi

pag. 18

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode di funzioni elementari

- Per la costruzione dei diagrammi di Bode a partire di $G(s)$, risulta agevole considerare una delle due seguenti fattorizzazioni:

1. Forma *guadagno-zeri-poli*:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \\ &= K_1 \frac{(s-z_1)^{m_1} (s-z_2)^{m_2} \dots (s-z_l)^{m_l}}{(s-p_1)^{n_1} (s-p_2)^{n_2} \dots (s-p_h)^{n_h}} \quad (\text{con } K_1 = b_m) \end{aligned}$$

In tale forma K_1 viene anche detto *guadagno ad alta frequenza*



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - a

2. Forma *costanti di tempo, pulsazioni naturali e coefficienti di smorzamento*

$$G(s) = K \frac{(1+\tau_{z_1}s)^{m_1} (1+\tau_{z_2}s)^{m_2} \dots \left(1+2\delta_i \frac{s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)^{m_i} \dots}{(1+\tau_{p_1}s)^{n_1} (1+\tau_{p_2}s)^{n_2} \dots \left(1+2\delta_j \frac{s}{\omega_{nj}} + \frac{s^2}{\omega_{nj}^2}\right)^{n_j} \dots}$$

In questa forma K viene detto *guadagno statico* (in generale, guadagno statico = $G(0)$)

N.B. relazione tra le due forme: $K = K_1 \frac{\tau_{p_1}^{n_1} \tau_{p_2}^{n_2} \dots \omega_{nj}^{2n_j} \dots}{\tau_{z_1}^{m_1} \tau_{z_2}^{m_2} \dots \omega_{ni}^{2m_i} \dots}$



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 1

► Funzioni elementari che compongono $G(s)$:

- $K \leq 0$ (costante di guadagno)
- $s^{\pm 1}$ (polo o zero nell'origine)
- $(1 + \tau s)^{\pm 1}$
- $\left(1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$

che verranno analizzate ponendo: $s = j\omega$

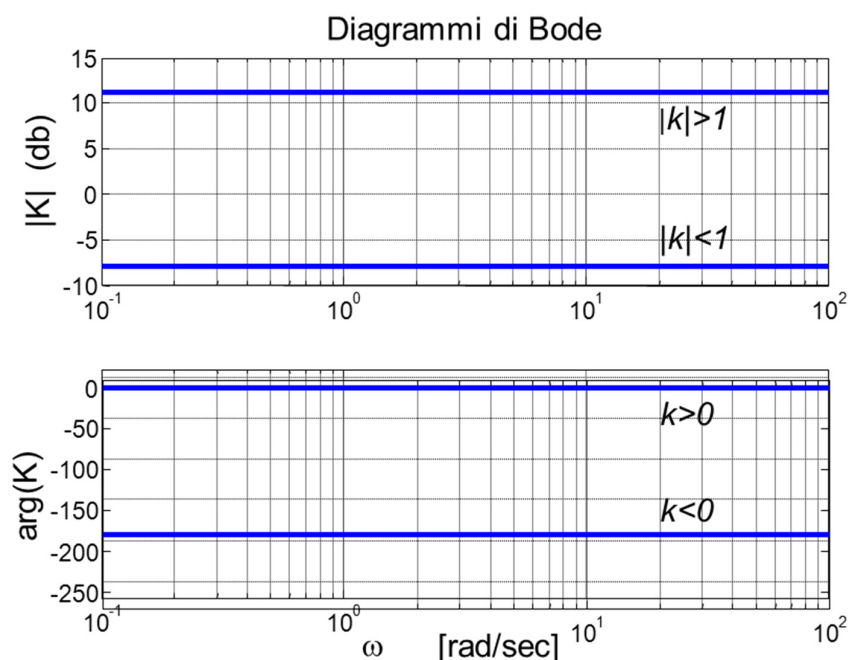
- **N.B.:** Se la FdT non ha poli o zeri nell'origine, K è il guadagno con cui vengono trasmessi ingressi a $\omega = 0$. Tali segnali si dicono **componenti continue** e K è appunto detto **guadagno statico**



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 2

► Costante K :

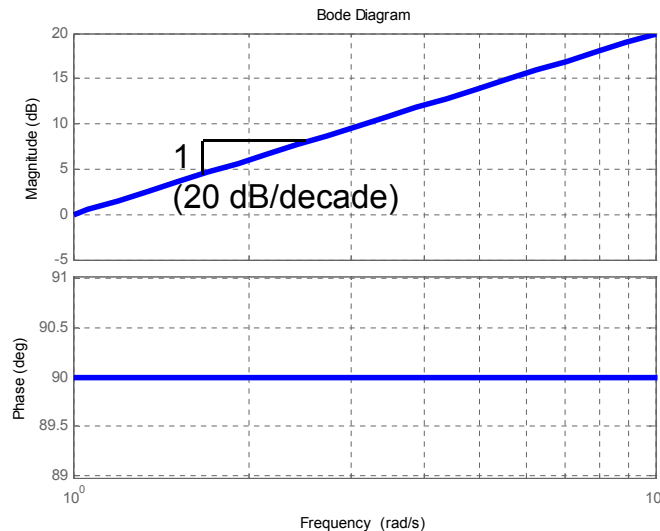
- se positiva, la fase è $= 0$,
- se negativa, la fase è convenzionalmente posta $= -\pi$



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 3

► Termine $G(j\omega) = j\omega$:

- guadagno statico = 0, modulo = 1 (0 dB!) a $\omega = 1$
- fase = $\pi/2$



pag. 23

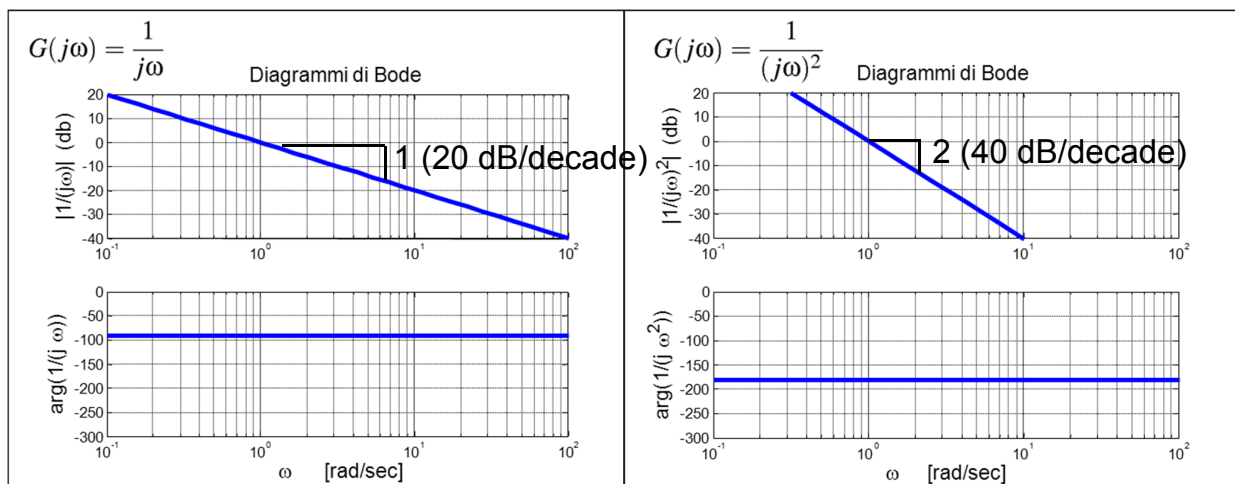
Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 4

► Termine $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$:

- guadagno statico $\rightarrow \infty$, modulo = 1 (0 dB!) a $\omega = 1$
- fase = $-h\frac{\pi}{2}$



pag. 24

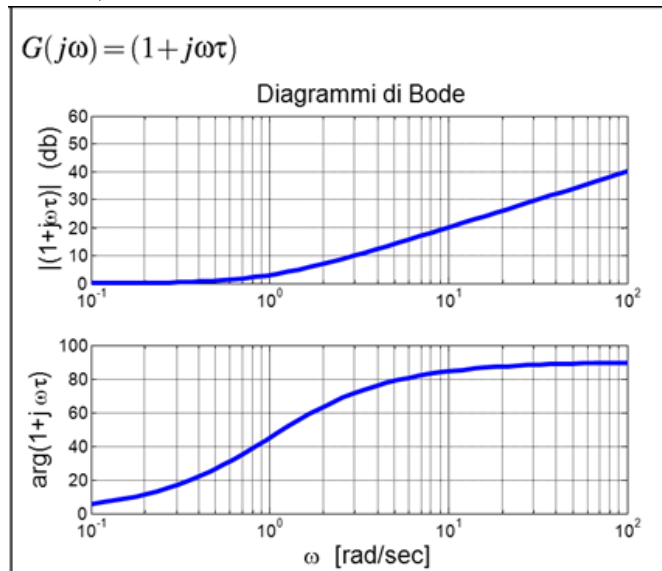
Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 5

► Termine $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)$, con $\tau > 0$:

- guadagno $\sqrt{2} = 3$ dB a $\omega = 1/\tau$ ($|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$)
- fase = $\pi/4$ a $\omega = 1/\tau$ ($\arg[G(j\omega)] = \arctan(\omega\tau)$)
- fase $\rightarrow \pi/2$ per $\omega \rightarrow \infty$



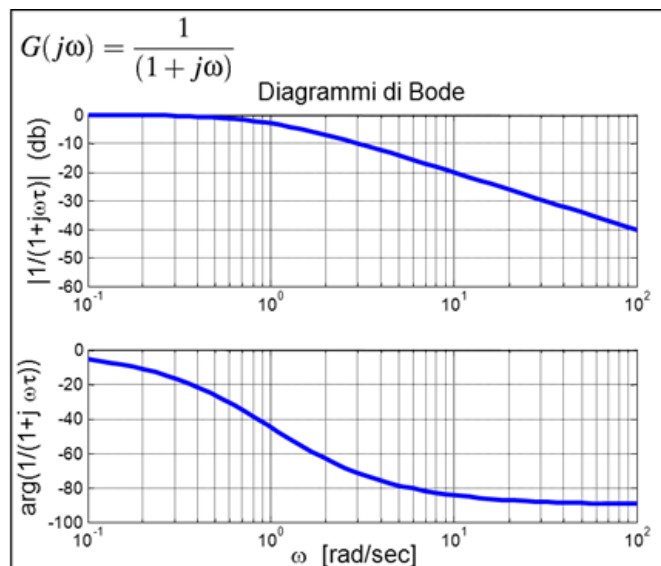
pag. 25

Analisi armonica (Bode, Nyquist) 

Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 5a

► Termine $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$, con $\tau > 0$:

- guadagno $(\sqrt{2})^{-1} = -3$ dB a $\omega = 1/\tau$ ($|G(j\omega)| = (\sqrt{1 + \omega^2\tau^2})^{-1}$)
- fase = $-\pi/4$ a $\omega = 1/\tau$ ($\arg[G(j\omega)] = -\arctan(\omega\tau)$)
- fase $\rightarrow -\pi/2$ per $\omega \rightarrow \infty$



pag. 26

Analisi armonica (Bode, Nyquist) 

Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 5b

- ➡ Termine $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$, con $\tau < 0$:
 - Tali termini hanno le stesse caratteristiche di quelli nella slide precedente, per il diagramma delle ampiezze
 - Per il diagramma delle fasi, si inverte il ruolo dei poli con quello degli zeri
 - ➔ fase > 0 per i poli, < 0 per gli zeri

Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 6

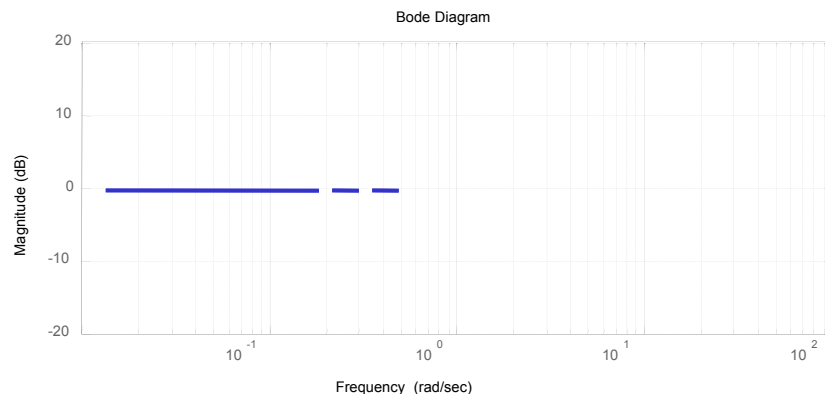
- ➡ Per semplificare il disegno si usa tracciare il diagramma di Bode in modo approssimato, ricorrendo ai **diagrammi asintotici**
- ➡ Nei diagrammi asintotici si disegnano solo linee spezzate costituite dagli asintoti cui tende il diagramma di Bode per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$
- ➡ I **punti di rottura** nel diagramma delle ampiezze corrispondono a punti nei quali il diagramma delle fasi approssimato è tangente a quello effettivo

Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 7

➡ Es.A: $|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{(1 + j\omega\tau)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$

$$20\text{Log}_{10}|G(j\omega)| = -20\text{Log}_{10}\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} -20\text{Log}_{10}\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} = 0$$

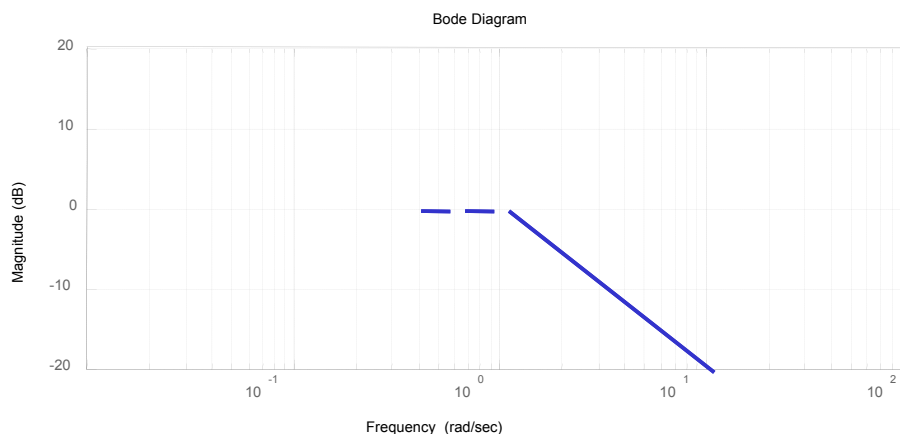


Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 8

➡ Es.A (cont.): $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow -20\text{Log}_{10}\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \approx -20\text{Log}_{10}(\omega\tau)$

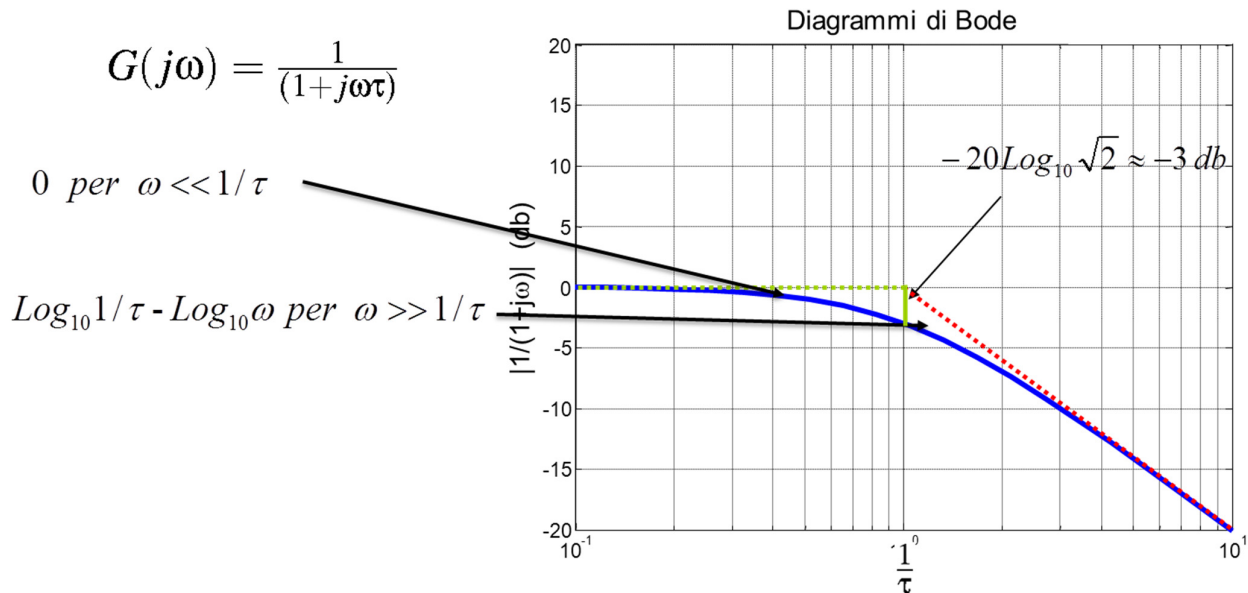
$$-20\text{Log}_{10}(\omega\tau) = 20\text{Log}_{10}\frac{1}{\tau} - 20\text{Log}_{10}\omega$$

retta passante per $20\text{Log}_{10}\omega = 20\text{Log}_{10}\frac{1}{\tau}$ con pendenza -20dB/decade



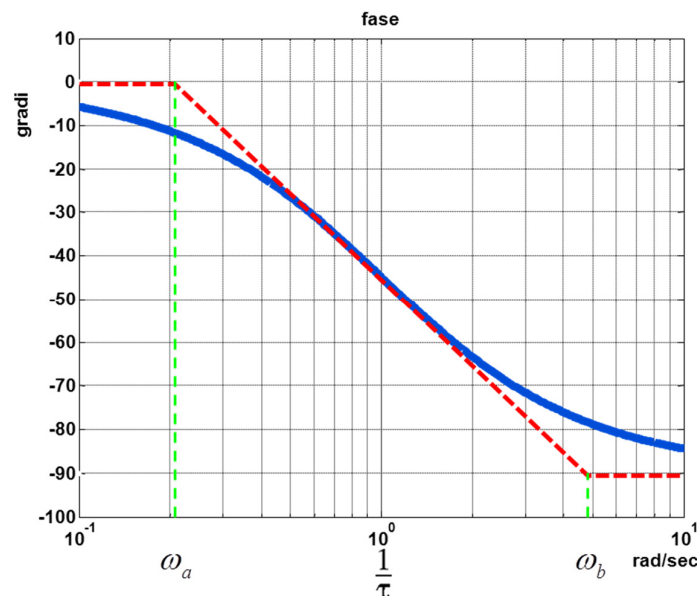
Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 9

- Es.A (cont.): l'errore di approssimazione max. è
 $-20\text{Log}_{10}\sqrt{2} \approx -3\text{ db}$ per $\omega = \frac{1}{\tau}$ (punto di rottura)



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 10

- Es.A (cont.): la fase vale $-\pi/4$ nel punto di rottura e tende a zero (a sinistra) e a $-\pi/2$ (a destra)



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 11

► Es.A (cont.): come determinare ω_a e ω_b ?

$$\varphi(\omega) = -\arctan \omega\tau$$

$$\left. \frac{d\varphi}{d\text{Log}_{10}\omega} \right|_{\frac{1}{\tau}} = \frac{d\varphi}{d\omega} \frac{d\omega}{d\text{Log}_{10}\omega} \bigg|_{\frac{1}{\tau}} = -\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \frac{1}{\text{Log}_{10}e} \bigg|_{\frac{1}{\tau}} = -\frac{1}{2\text{Log}_{10}e}$$

Ricordando:
$$\begin{cases} \frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \\ \omega = e^{\text{Log}_e \omega} \\ \text{Log}_e \omega = \frac{\text{Log}_{10} \omega}{\text{Log}_{10} e} \end{cases}$$

Pendenza della tangente nel punto $\omega = 1/\tau$



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 12

► Es.A (cont.): come determinare ω_a e ω_b ?

Per trovare i punti di intersezione tra gli asintoti della fase e la tangente nel punto $\omega = 1/\tau$:

$$\frac{\pi/4}{\text{Log}_{10} \frac{1}{\tau} - \text{Log}_{10} \omega_a} = \frac{\pi/4}{\text{Log}_{10} \omega_b - \text{Log}_{10} \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{2\text{Log}_{10} e} \Rightarrow \text{Log}_{10} \frac{1/\tau}{\omega_a} = \text{Log}_{10} \frac{\omega_b}{1/\tau} = \frac{\pi}{2} \text{Log}_{10} e$$

$$\frac{1/\tau}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{1/\tau} = \text{Log}_{10} \left(\frac{\pi}{2} \text{Log}_{10} e \right) = 4.81$$

$$\omega_a = \frac{1/\tau}{4.81}$$

$$\omega_b = 4.81 \cdot 1/\tau$$



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 12a

➡ Es.A (cont.): come determinare ω_a e ω_b ?

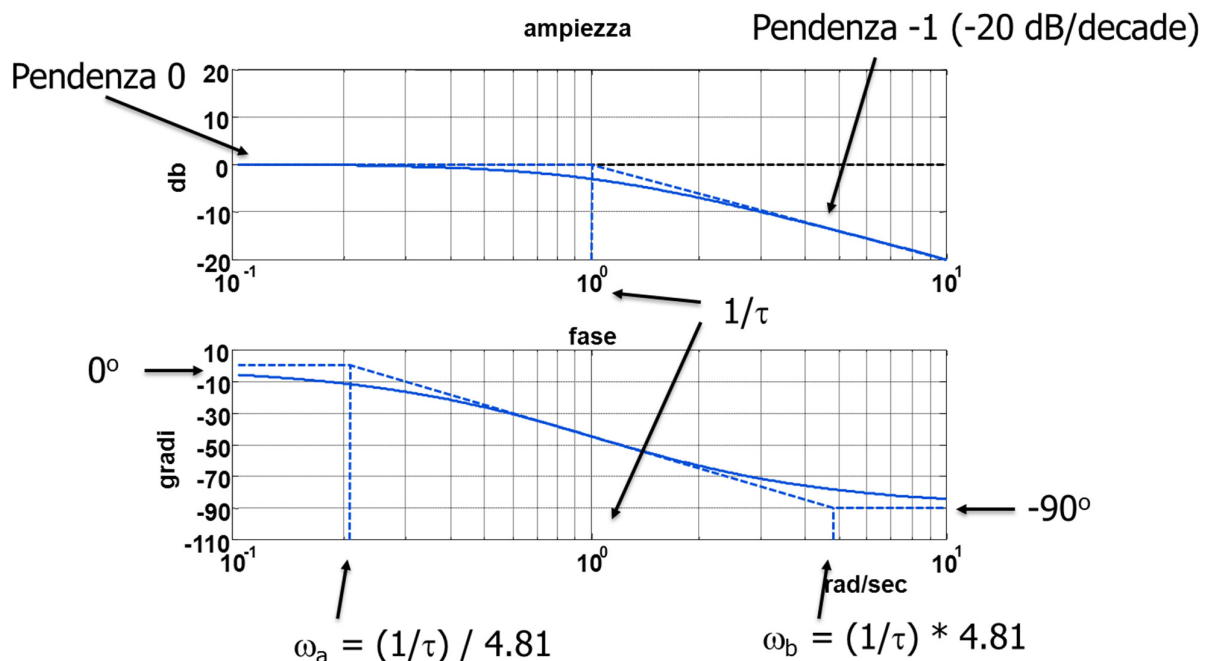
NOTA: il valore 4.81 appena trovato permette appunto di disegnare un diagramma approssimato della fase che interseca quello vero in $\omega = 1/\tau$, avendo inoltre la stessa pendenza in tale punto.

Molti altre fonti suggeriscono di utilizzare un fattore 10, anziché 4.81, per determinare il diagramma approssimato. Tale fattore facilita il disegno manuale (basta spostarsi di una decade prima e dopo la pulsazione del polo/zero), ma NON garantisce la condizione sulla tangente...



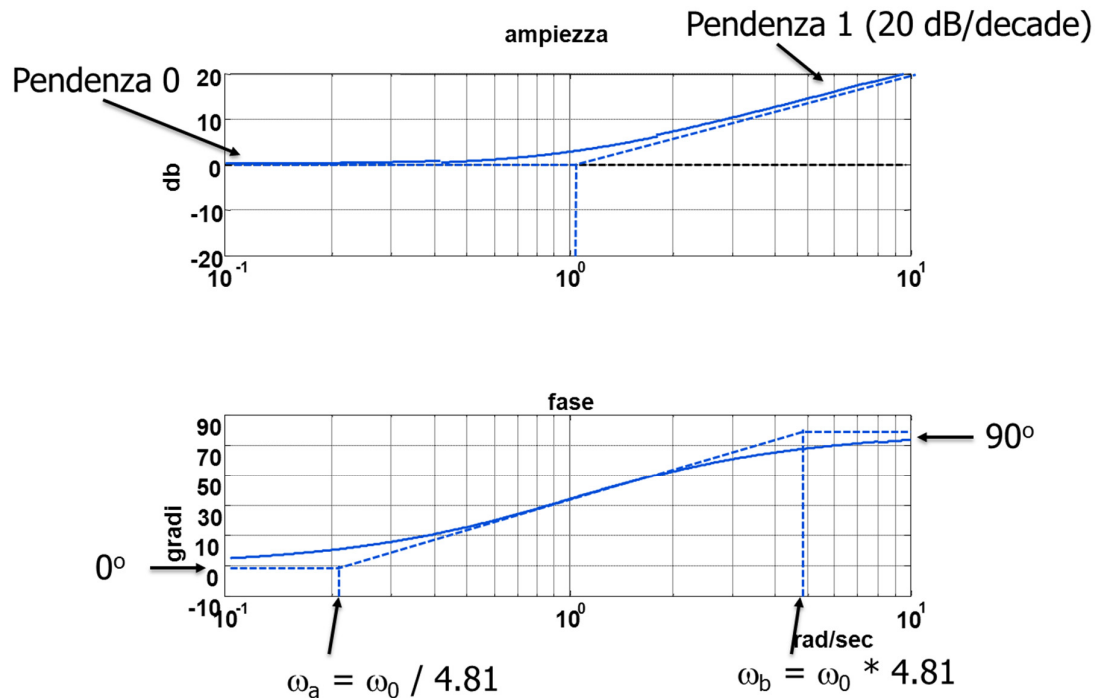
Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 13

➡ Es.A (cont.): diagramma di Bode completo



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 14

► Es.A1: diagramma di Bode per $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)$



pag. 37

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)

Diagramma di Bode approssimato: esempio base

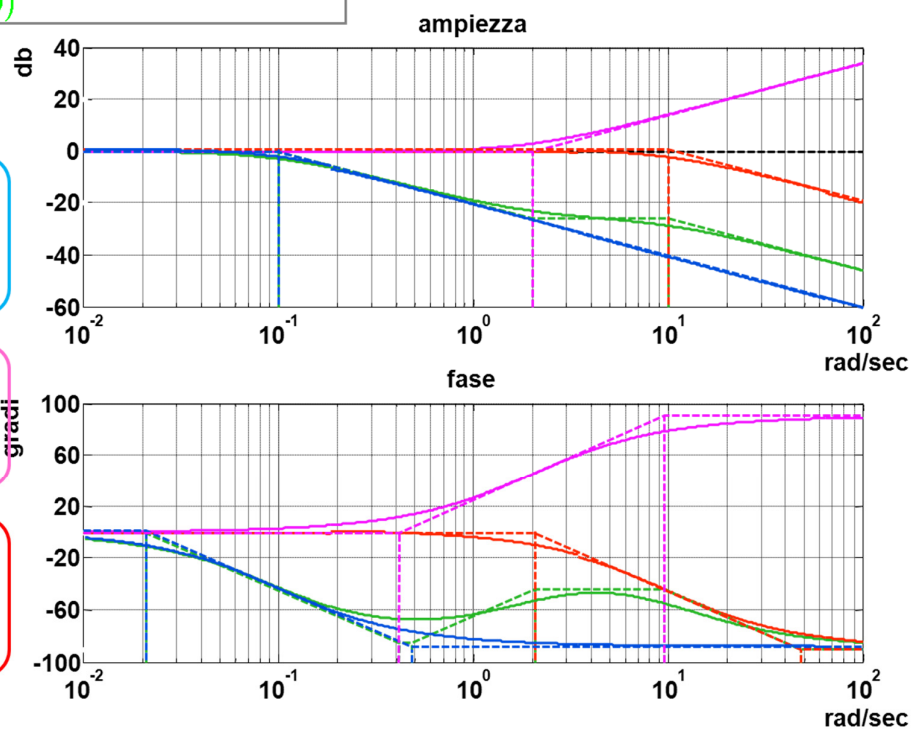
$$G(s) = \frac{0.5(s+2)}{(s+0.1)(s+10)} = k G_1(s) G_2(s) G_3(s)$$

$$k = 1$$

$$G_1(s) = \frac{1}{1+10s}$$

$$G_2(s) = 1 + 0.5s$$

$$G_3(s) = \frac{1}{1+0.1s}$$



pag. 38

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)

Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 15

► Termine $G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$, con $0 \leq \delta < 1$:

– Analizzando prima il caso di esponente -1 (**poli**):

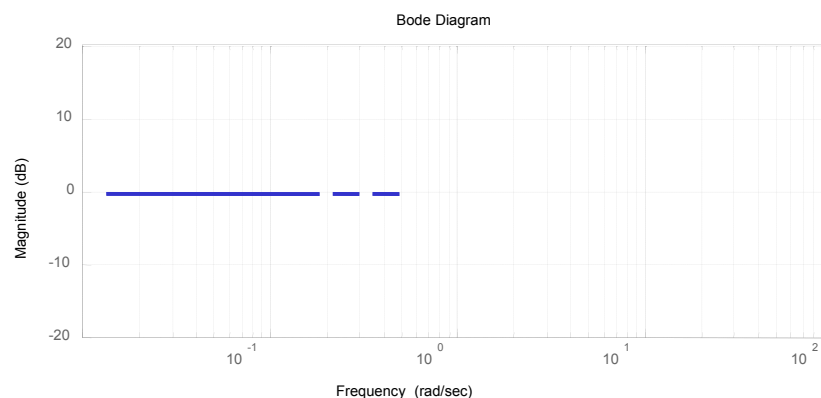
$$20\text{Log}_{10}|G(j\omega)| = 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$\arg G(j\omega) = -\arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 16

► Es.B: diagramma di Bode approssimato per il termine del secondo ordine:

$$\text{per } \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \ll 1 \Rightarrow 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \approx 0$$



Il diagramma coincide con l'asse delle ascisse

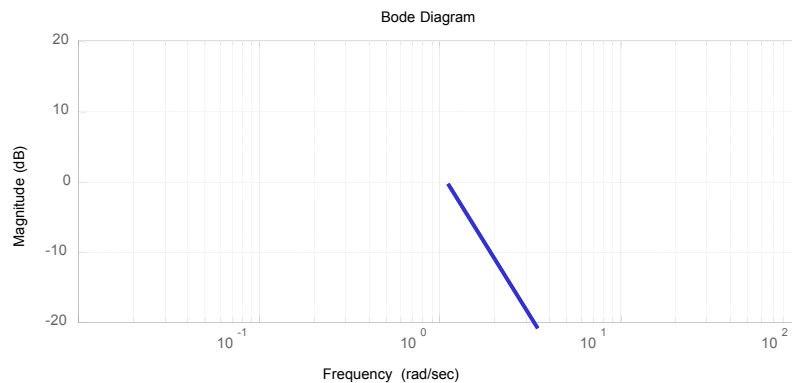
Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 17

➡ Es.B (cont.): diagramma di Bode approssimato:

$$\text{per } \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \gg 1 \Rightarrow 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \approx 20 \log_{10} \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \approx 40 \log_{10} \omega_n - 40 \log_{10} \omega$$

In questo caso il diagramma effettivo può discostarsi sensibilmente da quello asintotico: in particolare, per $\delta = 0$ e in corrispondenza della pulsazione di rottura ω_n , lo scostamento è **infinito**

Il diagramma ha
una inclinazione
-40 db/decade



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 18

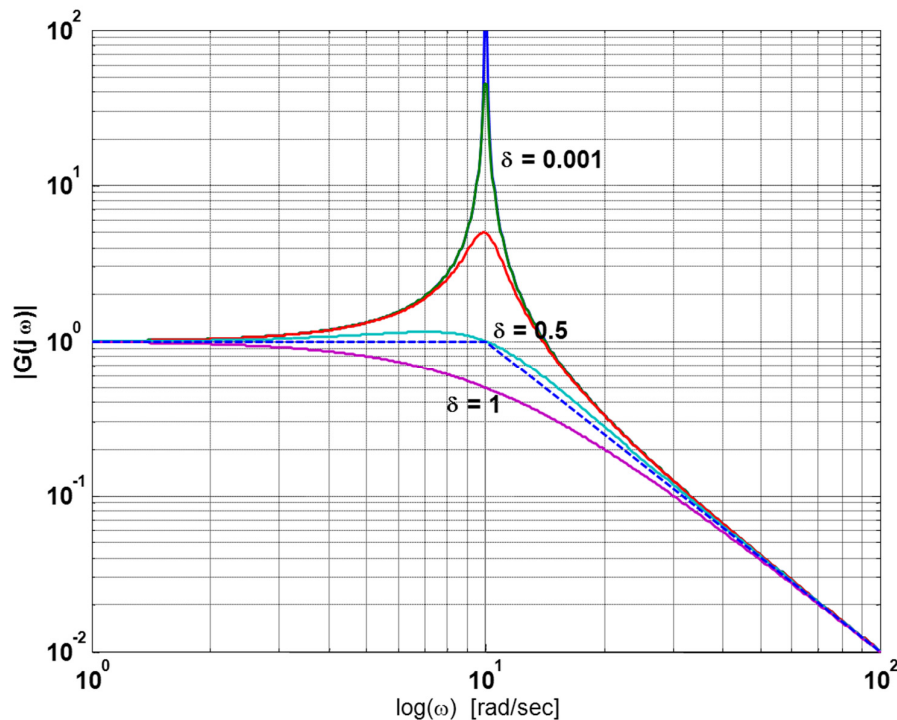
➡ Es.B (cont.): il diagramma di Bode delle ampiezze ha le seguenti proprietà:

- ➡ Per $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ la curva presenta un massimo;
- ➡ Per $0 \leq \delta \leq 1/2$ la curva interseca l'asse delle ascisse a destra del punto $\omega = \omega_n$ ed è pertanto tutta al di sopra della sua approssimazione asintotica;
- ➡ Per $1/2 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$, la curva interseca l'asse delle ascisse a sinistra del punto $\omega = \omega_n$;
- ➡ Per $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$ la curva non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica.



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 19

➡ Es.B (cont.): diagramma di Bode delle ampiezze:



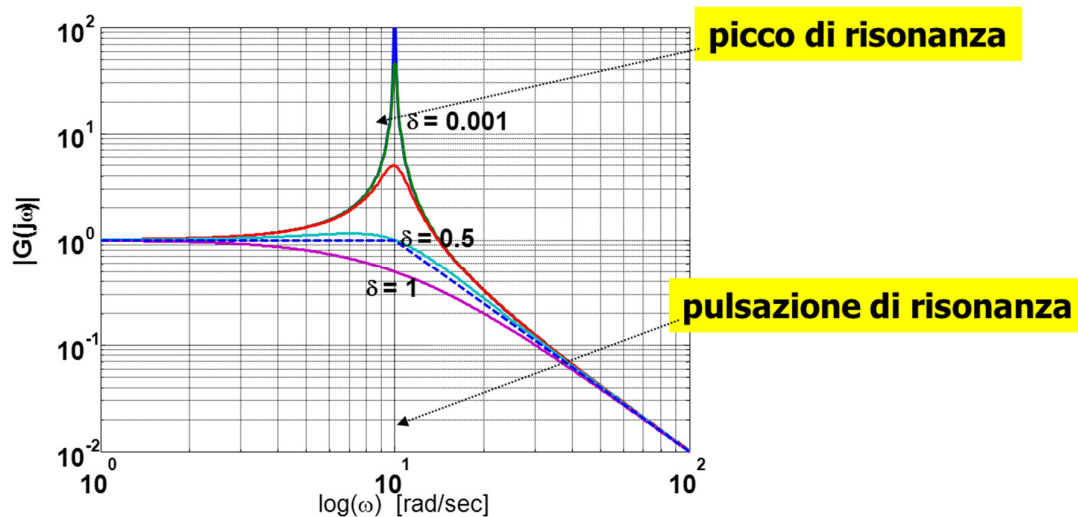
pag. 43

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 20

➡ Es.B (cont.): Si definisce **picco di risonanza** M_R il valore massimo assunto dal diagramma delle ampiezze, e **pulsazione di risonanza** ω_R la pulsazione corrispondente



pag. 44

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 21

- ➡ Es.B (cont.): calcolo di ω_R (ponendo $u = \omega/\omega_n$):

$$20 \operatorname{Log}_{10} |G(j\omega)| = 20 \operatorname{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\delta^2 u^2}}$$

- ➡ Il valore massimo corrisponde al minimo della funzione:

$$(1-u^2)^2 + 4\delta^2 u^2 \quad (u = \omega/\omega_n)$$

- ➡ Uguagliando a zero la derivata di tale funzione:

$$-4(1-u^2)u + 8\delta^2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = 0 & \omega = 0 \text{ (non considerata)} \\ u_R = \sqrt{1-2\delta^2} & \omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2} \\ & \text{pulsazione di risonanza} \end{cases}$$

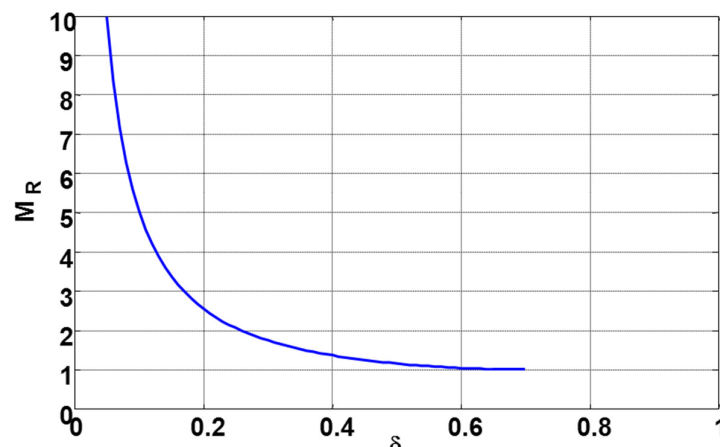
Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 22

- ➡ Es.B (cont.): calcolo di ω_R (ponendo $u = \omega/\omega_n$):

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2} \quad \Rightarrow \quad 1-\delta^2 \geq 0 \rightarrow \delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

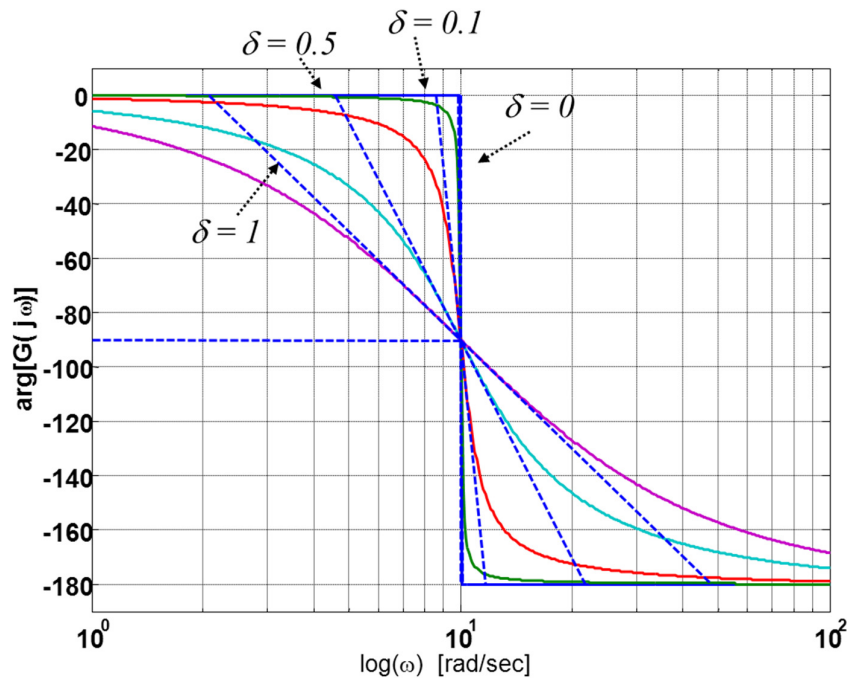
- ➡ In corrispondenza di tale pulsazione si ha quindi ampiezza:

$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1-1-2\delta^2)^2 + 4\delta^2(1-2\delta^2)}} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 23

➡ Es.B (cont.): diagramma di Bode delle fasi:



pag. 47

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 24

➡ Es.B (cont.): diagramma di Bode delle fasi approssimato:

- asintotica tendenza a 0 e -180° ($-\pi$)
- fase = -90° ($-\pi/2$) nel punto di rottura
- tangente e punti di connessione delle spezzate dipendenti da δ :

$$\arg[G(ju)] = \varphi(u) = -\arctan \frac{2\delta u}{1-u^2}$$

$$\left. \frac{d\varphi}{d\log_{10}\omega} \right|_{\omega=\omega_n} = \left. \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{d\log_{10}\omega} \right|_{u=1} = -\frac{1}{\delta \log_{10} e}$$

pag. 48

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 25

- ➡ Es.B (cont.): diagramma di Bode delle fasi approssimato:
 – calcolo di ω_a e ω_b per costruire la linea spezzata:

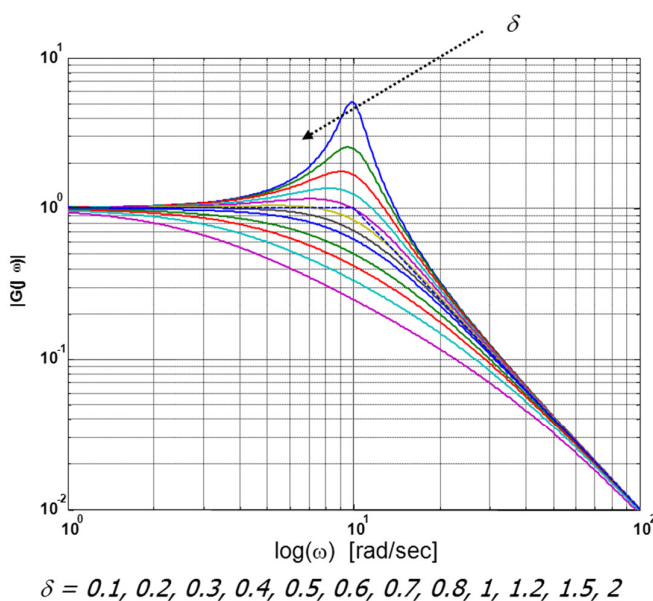
$$\frac{\pi/2}{\text{Log}_{10}\omega_n - \text{Log}_{10}\omega_a} = \frac{\pi/2}{\text{Log}_{10}\omega_b - \text{Log}_{10}\omega_n} = \frac{1}{\delta \text{Log}_{10}e}$$

da cui:
$$\text{Log}_{10}\frac{\omega_n}{\omega_a} = \text{Log}_{10}\frac{\omega_b}{\omega_n} = \frac{\pi\delta \text{Log}_{10}e}{2}$$

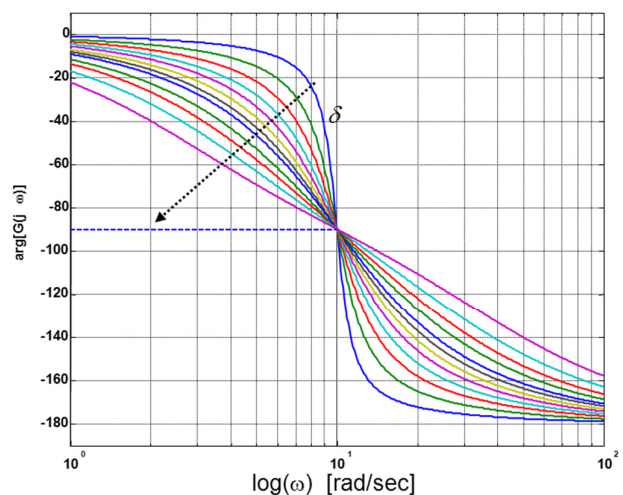
$$\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} = 4.81^\delta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_a = (4.81^\delta)^{-1} \omega_n \\ \omega_b = (4.81^\delta) \omega_n \end{cases}$$

Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 26

- ➡ Es.B (cont.): **RIASSUMENDO**

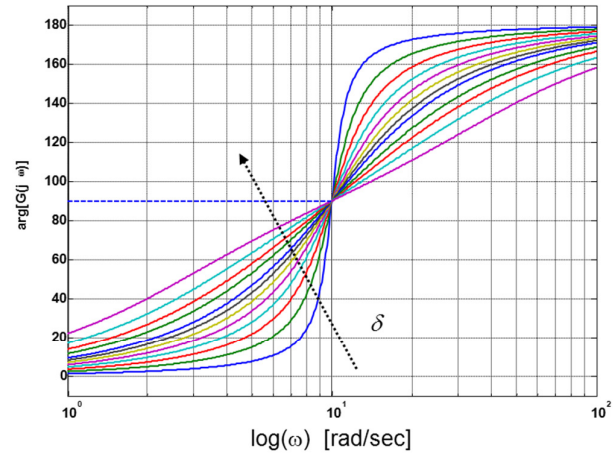
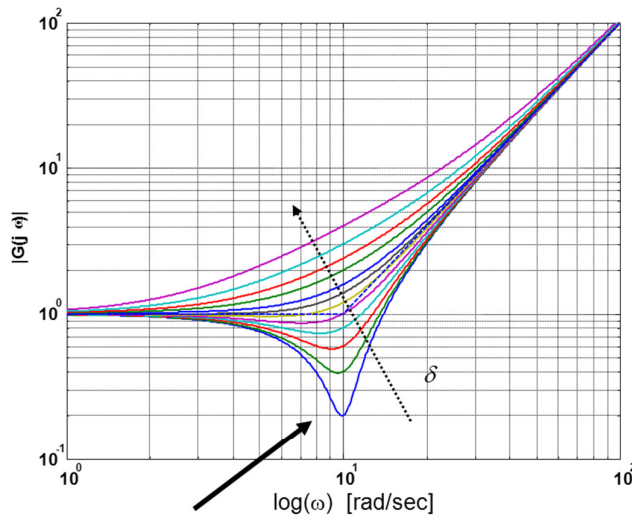


$$G(s) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n}}$$



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 27

➡ Es.B1: caso con esponente +1 (**zeri**)



Picco di attenuazione (antirisonanza)

- Si ribaltano attorno all'asse delle ascisse i diagrammi ottenuti per

$$G(s) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$$



Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 28

➡ **N.B.:** anche nel caso di funzioni del secondo ordine, se cambia il segno dei **poli** (**zeri**), per il diagramma delle fasi il ruolo dei termini a denominatore si inverte rispetto a quello dei termini a numeratore (non cambia il diagramma delle ampiezze)

➡ Ciò avviene se $\delta < 0$:

- **poli** ➡ fase positiva
- **zeri** ➡ fase negativa



Diagrammi di Bode: RIASSUMENDO

- ➡ **IPOTESI:** poli/zeri a parte reale negativa
- ➡ Ogni **polo** (ogni **zero**) determina un punto di rottura, nel quale:
 - La pendenza del diagramma approssimato **diminuisce** (**aumenta**) di 20 dB/decade
 - La fase **diminuisce** (**aumenta**) di 45° ($\pi/4$)
- ➡ Ogni **polo** (ogni **zero**) determina asintoticamente la **diminuzione** (**aumento**) della fase di 90° ($\pi/2$)
- ➡ Per le coppie di **poli** (**zeri**) complessi coniugati si può avere un **picco di risonanza** (**antirisonanza**)



Diagrammi di Bode: RIASSUMENDO - 1

- ➡ **Inoltre**, in caso di **poli** (**zeri**) nell'origine:
 - la pendenza *iniziale* (per $\omega \rightarrow -\infty$) deve essere pari a $- (+) n$ [$- (+) n \cdot 20$ dB/decade]
 - Il prolungamento del tratto iniziale deve passare per K in $\omega = 1$
- ➡ **N.B.:** le considerazioni precedenti sulla fase si invertono in caso di poli/zeri a parte reale positiva



Diagrammi di Bode: primo esempio

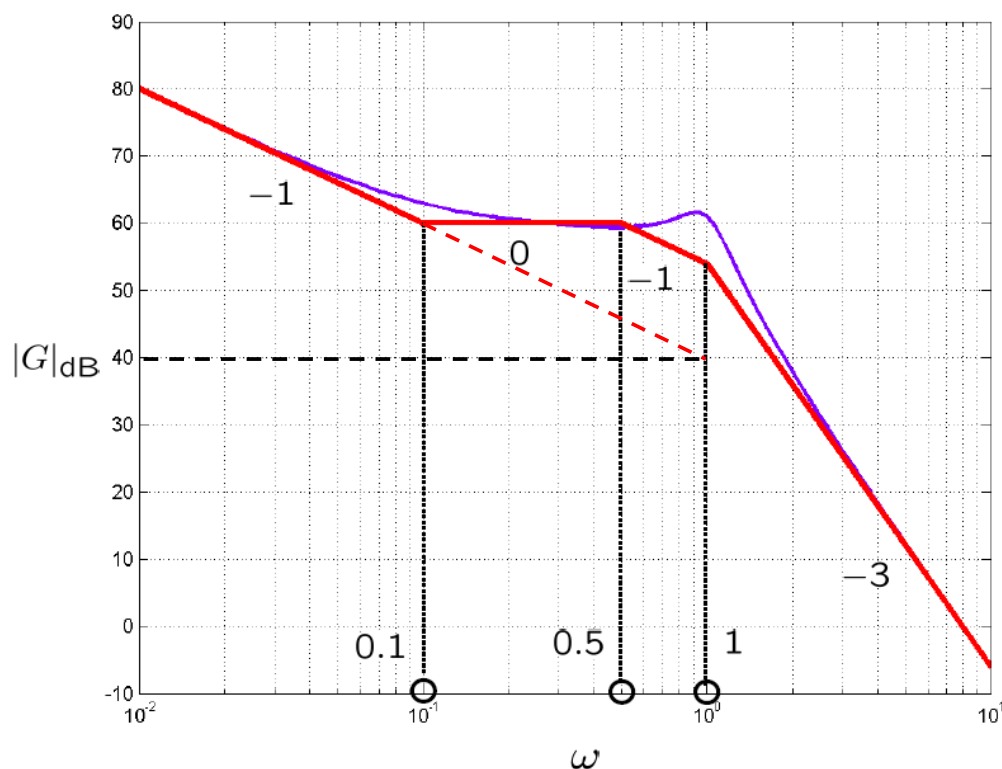
► Si consideri:

$$G(s) = \frac{100(1 + 10s)}{s(1 + 2s)(1 + 0.4s + s^2)}$$

- $K = 100$ (40 dB)
- $z_1 = -0.1$
- $p_1 = 0$
- $p_2 = -0.5$
- $p_{3,4} = -0.2 \pm j\sqrt{0.96}$ ($\omega_n = 1$; $\delta = 0.2$)



Diagrammi di Bode: primo esempio - ampiezza



Diagrammi di Bode: primo esempio - fase

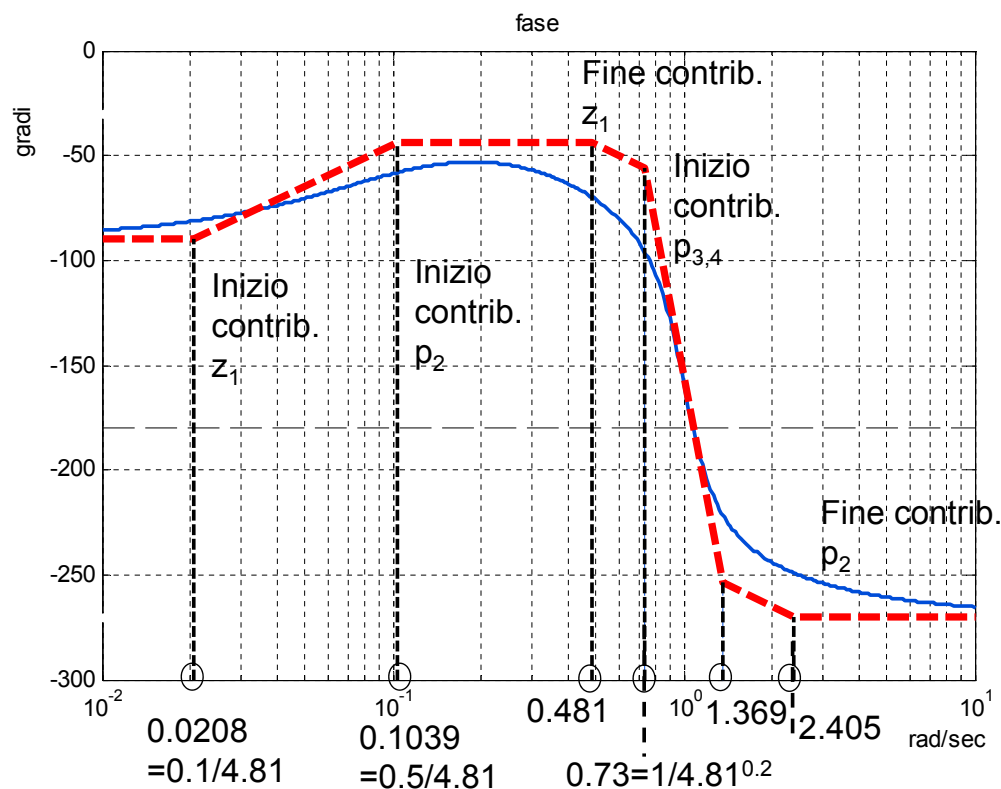
► Applicando il fattore 4.81 per ottenere i punti di rottura:

- z_1 : $\omega_{1a} = 0.1/4.81 = 0.0208$; $\omega_{1b} = 0.1 \cdot 4.81 = 0.481$
- p_2 : $\omega_{1a} = 0.5/4.81 = 0.1039$; $\omega_{1b} = 0.5 \cdot 4.81 = 2.405$
- $p_{3,4}$: $\omega_{1a} = 1/4.81^{0.2} = 0.73$; $\omega_{1b} = 1 \cdot 4.81^{0.2} = 1.369$

N.B.: il polo nell'origine p_1 introduce inoltre uno sfasamento di $-\pi/2$ su tutto il diagramma



Diagrammi di Bode: primo esempio - fase



Diagrammi di Bode: secondo esempio

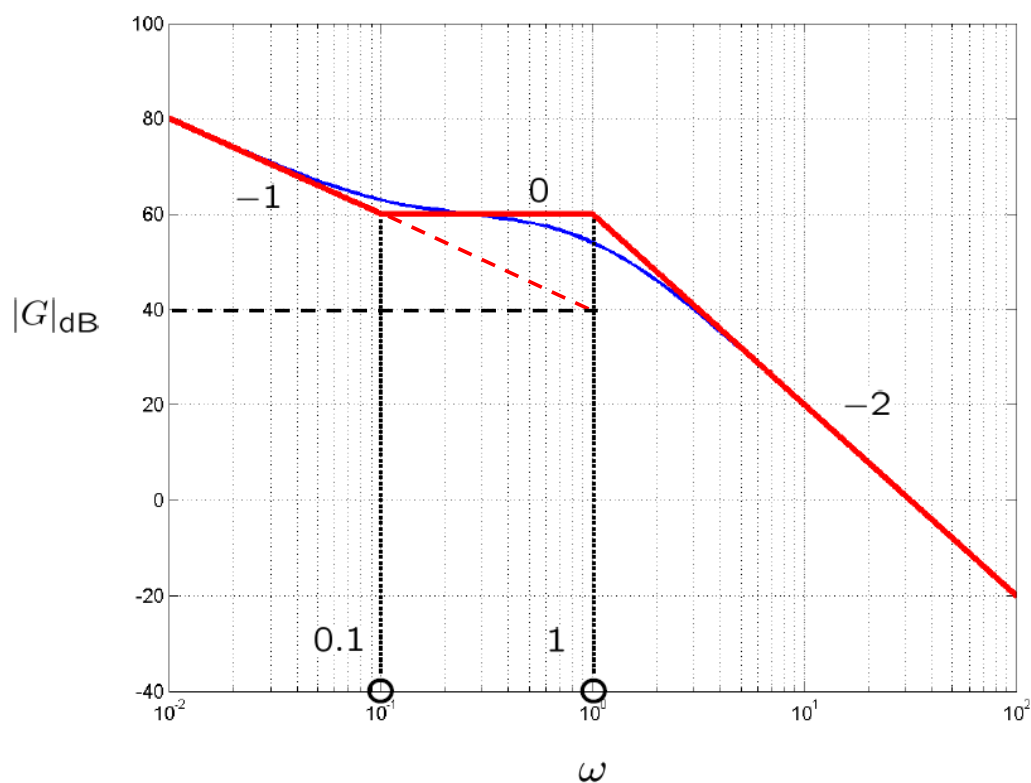
➡ Si consideri:

$$G(s) = \frac{100(1 + 10s)}{s(1 + s)^2}$$

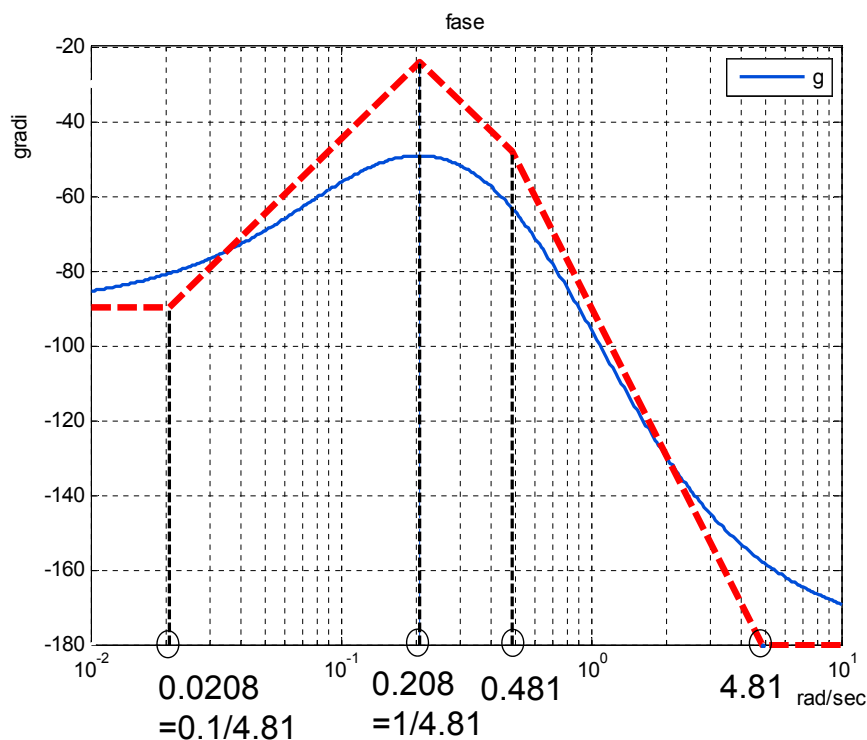
- $K = 100$ (40 dB)
- $z_1 = -0.1$
- $p_1 = 0$
- $p_2 = p_3 = -1$



Diagrammi di Bode: secondo esempio - ampiezza



Diagrammi di Bode: secondo esempio - fase



pag. 61

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode: terzo esempio

➡ Si consideri:

$$G(s) = \frac{0.1s(1+s)}{(1+5s)^2(1+0.2s)(1-0.1s)}$$

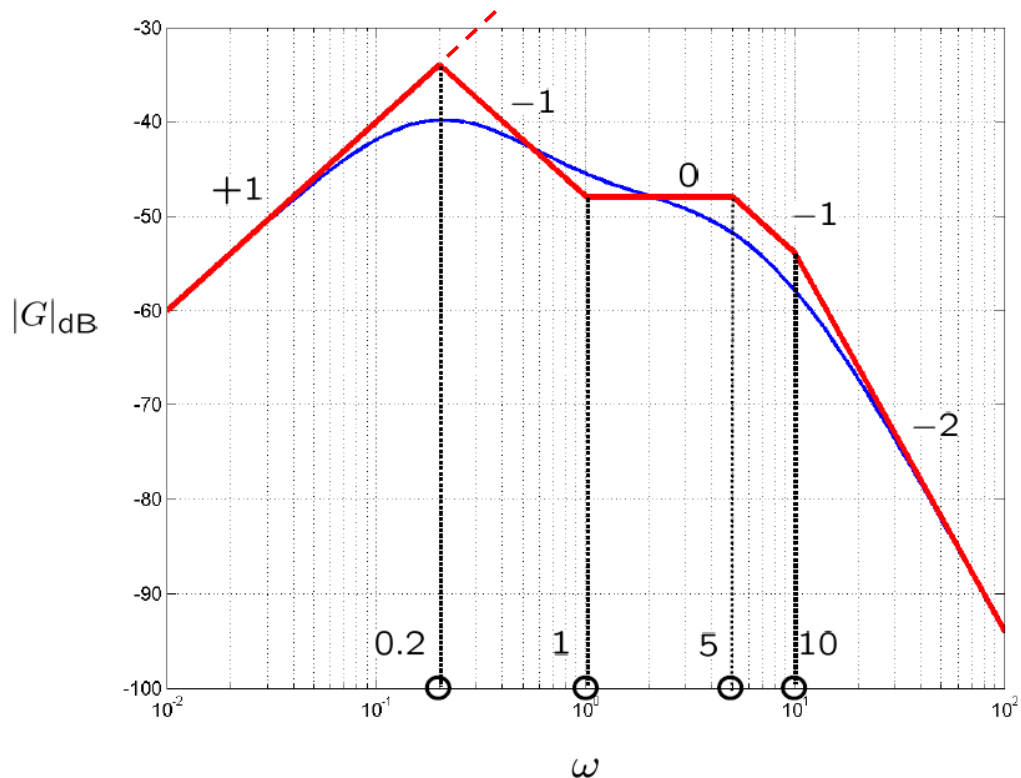
- $K = 0.1$ (-20 dB)
- $z_1 = 0$
- $z_2 = -1$
- $p_1 = p_2 = -0.2$
- $p_3 = -5$
- $p_4 = 10$

pag. 62

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode: terzo esempio - ampiezza

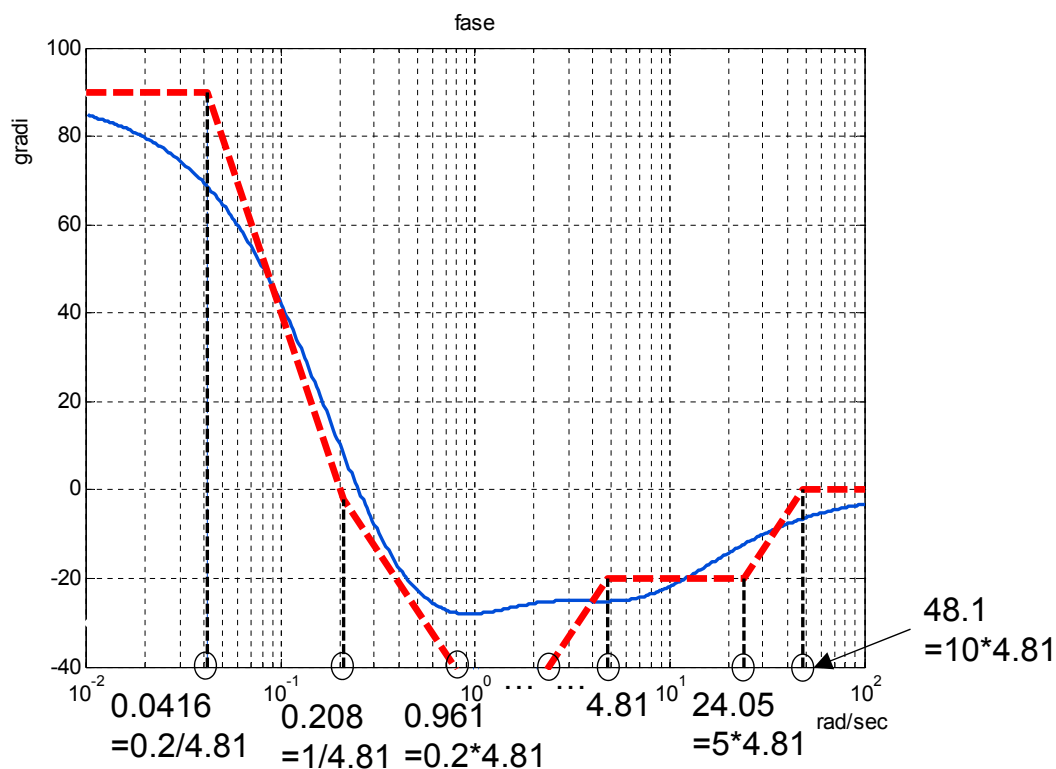


pag. 63

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode: terzo esempio - fase



pag. 64

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi di Bode: quarto esempio

► Si considerino:

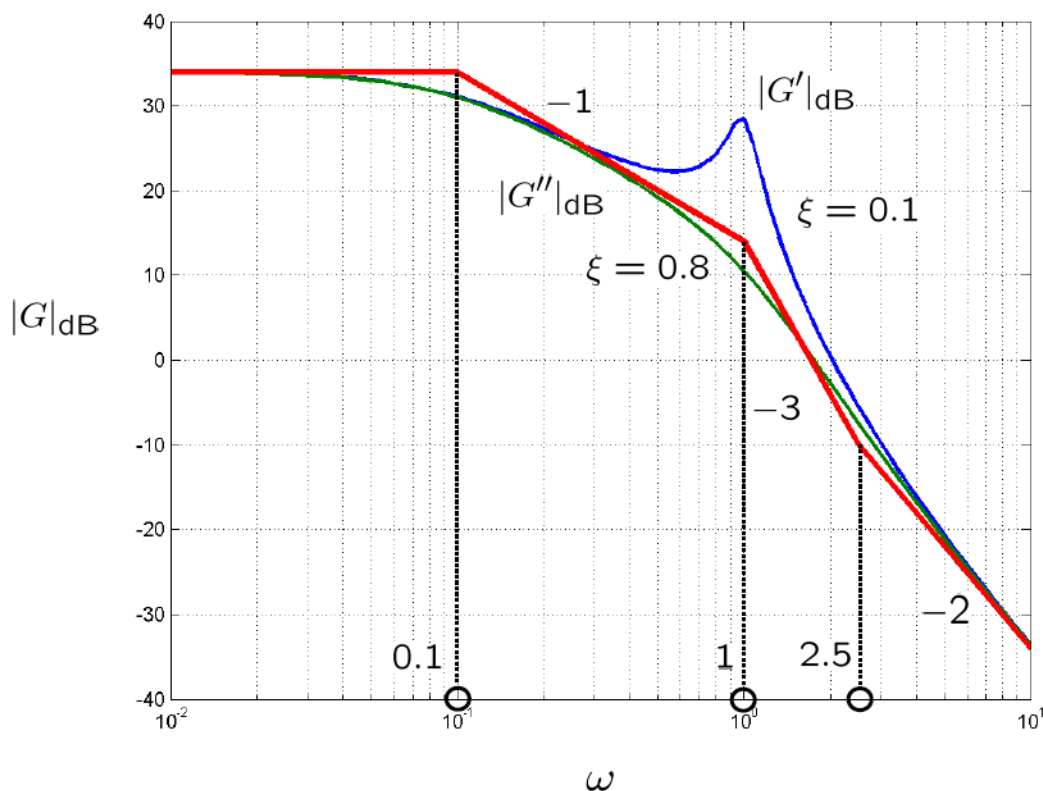
$$G'(s) = \frac{50(1 + 0.4s)}{(1 + 10s)(1 + 0.2s + s^2)}$$

$$G''(s) = \frac{50(1 + 0.4s)}{(1 + 10s)(1 + 1.6s + s^2)}$$

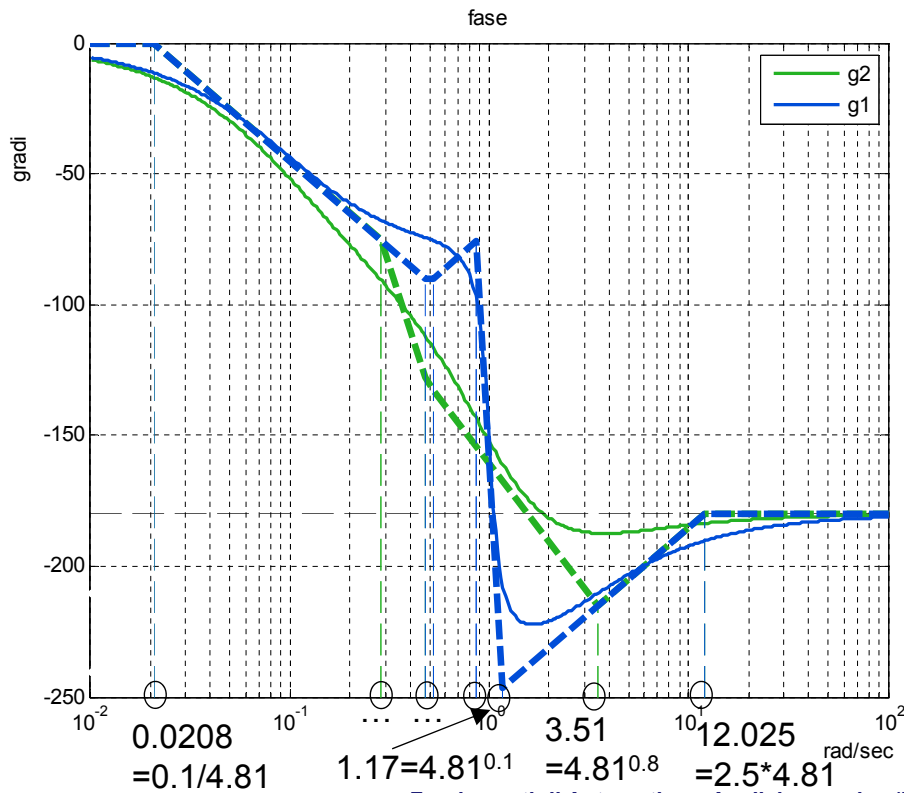
- $K = 50$ (34 dB)
- $z_1 = -2.5$
- $p_1 = -0.1$
- $p'_2 = p'_3 = -0.1 \pm j\sqrt{0.99}$ ($\omega_n = 1$; $\delta = 0.1$)
- $p''_2 = p''_3 = -0.8 \pm j\sqrt{0.36}$ ($\omega_n = 1$; $\delta = 0.8$)



Diagrammi di Bode: quarto esempio - ampiezza



Diagrammi di Bode: quarto esempio - fase



pag. 67

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Formula di Bode

- ➡ Un sistema avente funzione di trasferimento razionale si dice **a fase minima** se **non** ha né poli né zeri **a parte reale positiva** (oltre che costante di **guadagno positiva** e assenza di effetti di **ritardo puro** nella risposta)
- ➡ Per tali sistemi il diagramma di Bode delle fasi può essere ricavato da quello delle ampiezze, tramite la **formula di Bode**, approssimabile con:

$$\arg[G(j\omega)] \approx \frac{\pi}{2} \frac{d \log |G(j\omega)|}{d \log \omega}$$

pag. 68

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



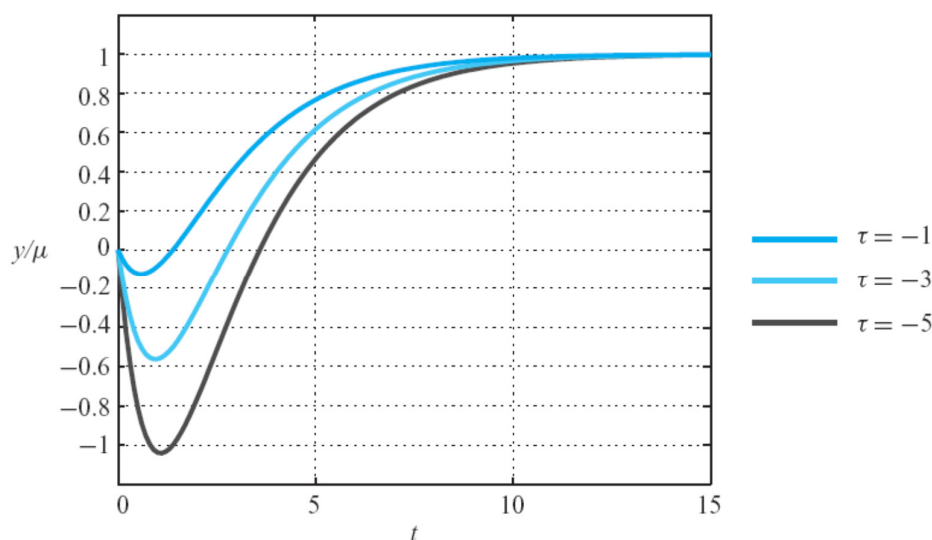
Formula di Bode - 1

- ➡ Dalla formula approssimata, si può osservare che la pendenza unitaria, nel diagramma logaritmico delle ampiezze, corrisponde ad uno sfasamento di 90°
- ➡ Dalla formula di Bode esatta (qui non riportata) si deduce che il diagramma ha sempre sfasamento minore rispetto ad un sistema avente lo stesso diagramma di Bode delle ampiezze, ma con zeri/poli a parte reale positiva
- ➡ Da questa ultima proprietà, deriva la definizione di sistema *a fase minima* della slide precedente



Sistemi a fase non minima

- ➡ Sistemi per i quali non vale la formula di Bode, **a fase non minima**, hanno caratteristiche che rendono difficile il progetto di controllo. Ad esempio, sistemi stabili ma con zeri a parte reale positiva, hanno il tipico *undershoot* nella risposta:



Sistemi a fase non minima - 1

- Tale comportamento è riscontrabile in numerosi sistemi fisici, come i veicoli a due ruote (biciclette e motociclette) e alcuni tipi di aerei
- Ad esempio, dall'analisi dinamica dei bicikli (seppure complessi e nonlineari) si può osservare che:
 - L'effetto di una forza applicata ad un lato del manubrio (coppia applicata allo sterzo) determina una inclinazione del veicolo rispetto alla verticale e, quindi, una deviazione dalla traiettoria rettilinea dal lato OPPOSTO
 - Pertanto, per curvare verso destra, occorre applicare una forza al lato sinistro del manubrio

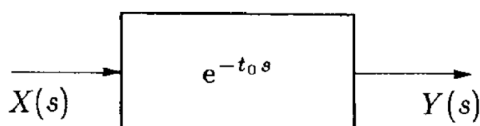
VEDI: *Bicycle Dynamics and Control*, K.J.Astrom, R.E.Klein, A.Lennartson (IEEE Control Systems Magazine, Vol.25 N.4 2005)



Sistemi a fase non minima - 2

- Un'altra condizione che rende un sistema a fase non minima e, pertanto, di difficile controllo, è la presenza di un **ritardo puro**, cioè un elemento per il quale vale la relazione tra il proprio ingresso e l'uscita:

$$y(t) = u(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = e^{-t_0 s} X(s)$$



- La FdT di tale blocco ha modulo unitario per ogni pulsazione, ma sfasamento che cresce linearmente:

$$\arg[G(j\omega)] = -\arctan(\tan \omega t_0) = -\omega t_0$$

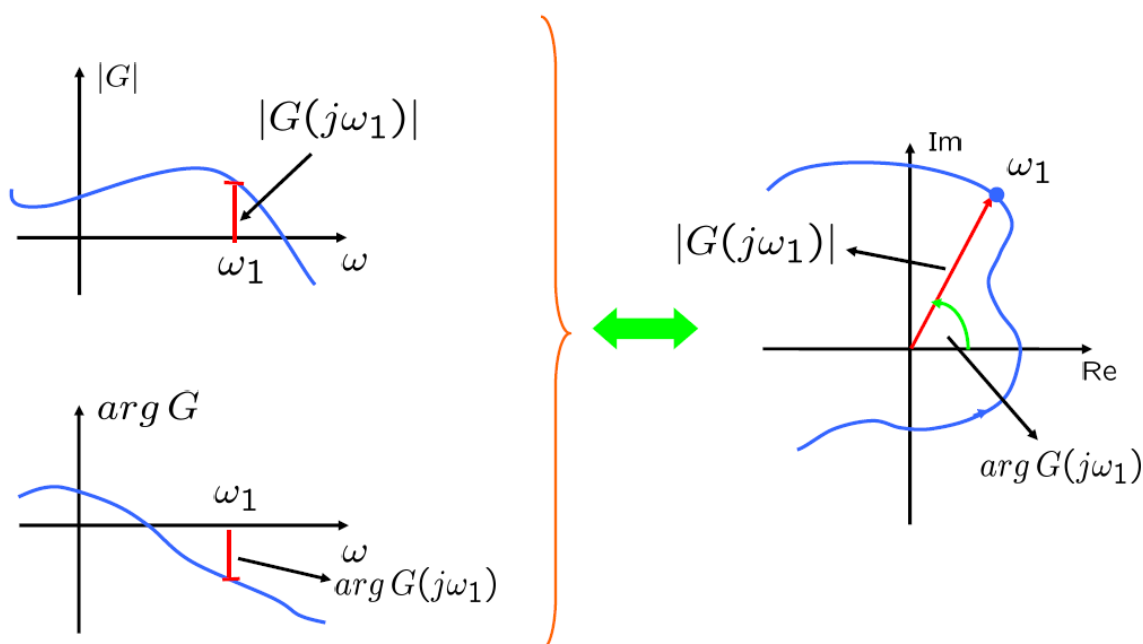


Analisi armonica e metodi grafici DIAGRAMMI DI NYQUIST



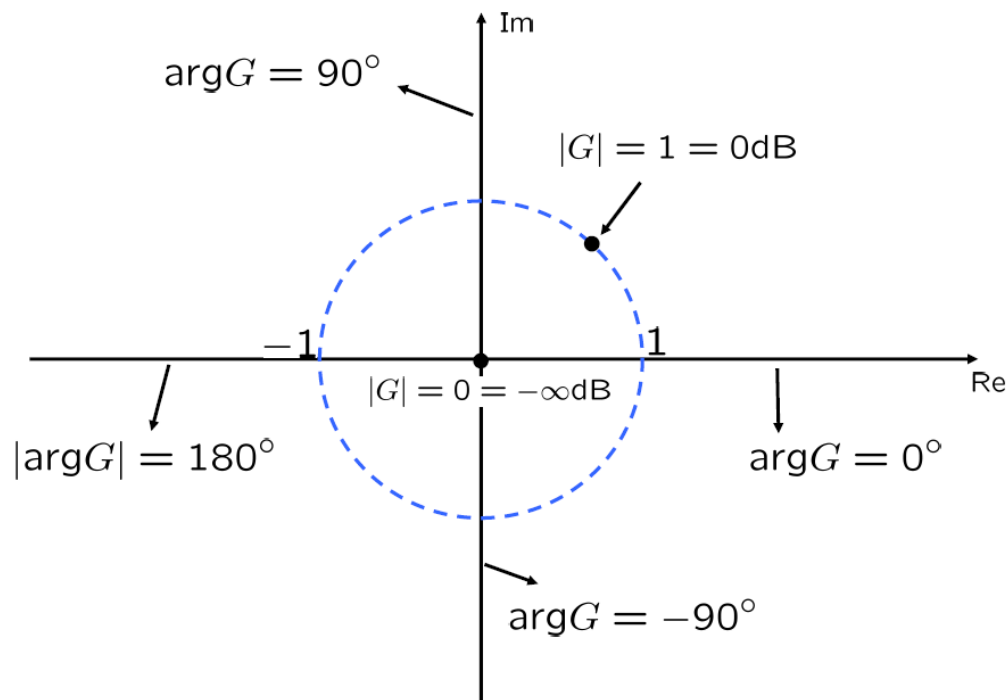
Diagrammi polari o *di Nyquist*

- Sono diagrammi che rappresentano la risposta armonica direttamente sul piano di Gauss al variare della pulsazione



Diagrammi polari o di Nyquist - 1

► Infatti, nel piano complesso:



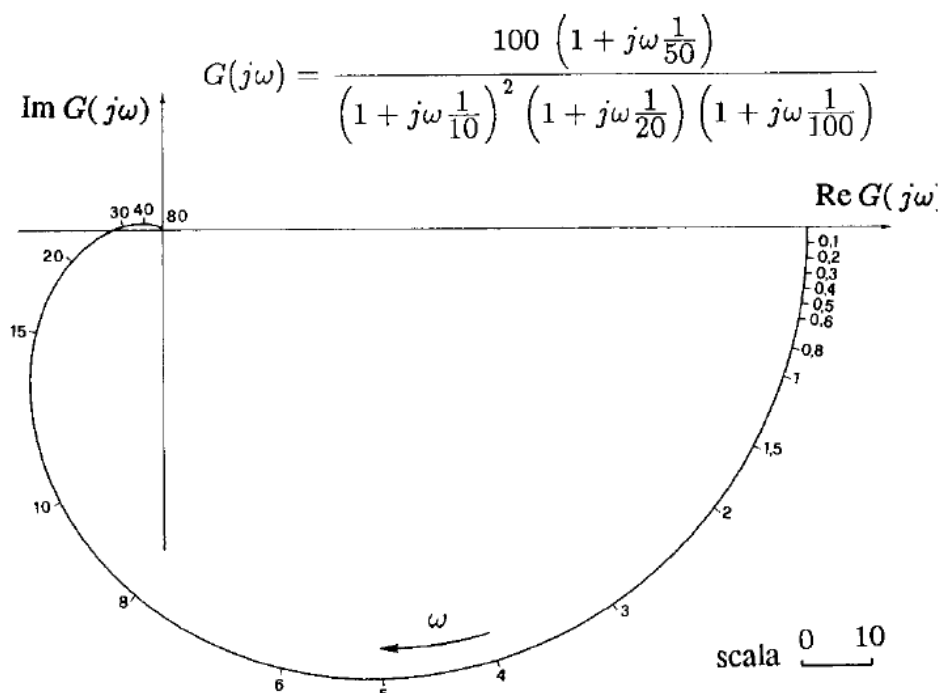
pag. 75

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi polari o di Nyquist - 2

► Esempio senza poli nell'origine:



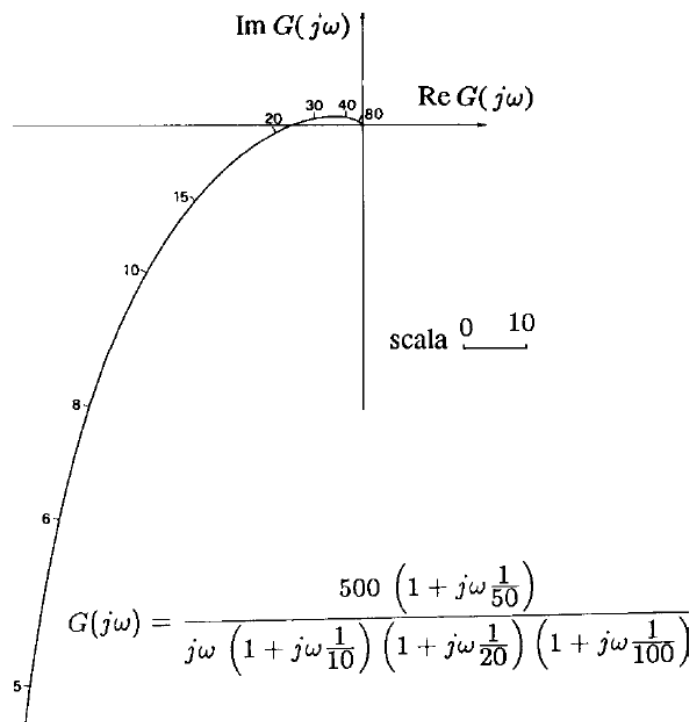
pag. 76

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



Diagrammi polari o di Nyquist - 3

► Esempio con un polo nell'origine:



pag. 77

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)



ANALISI ARMONICA E METODI GRAFICI

- Risposta armonica
- Diagrammi di Bode
- Diagrammi di Nyquist

FINE

pag. 78

Fondamenti di Automatica – Analisi armonica (Bode, Nyquist)

