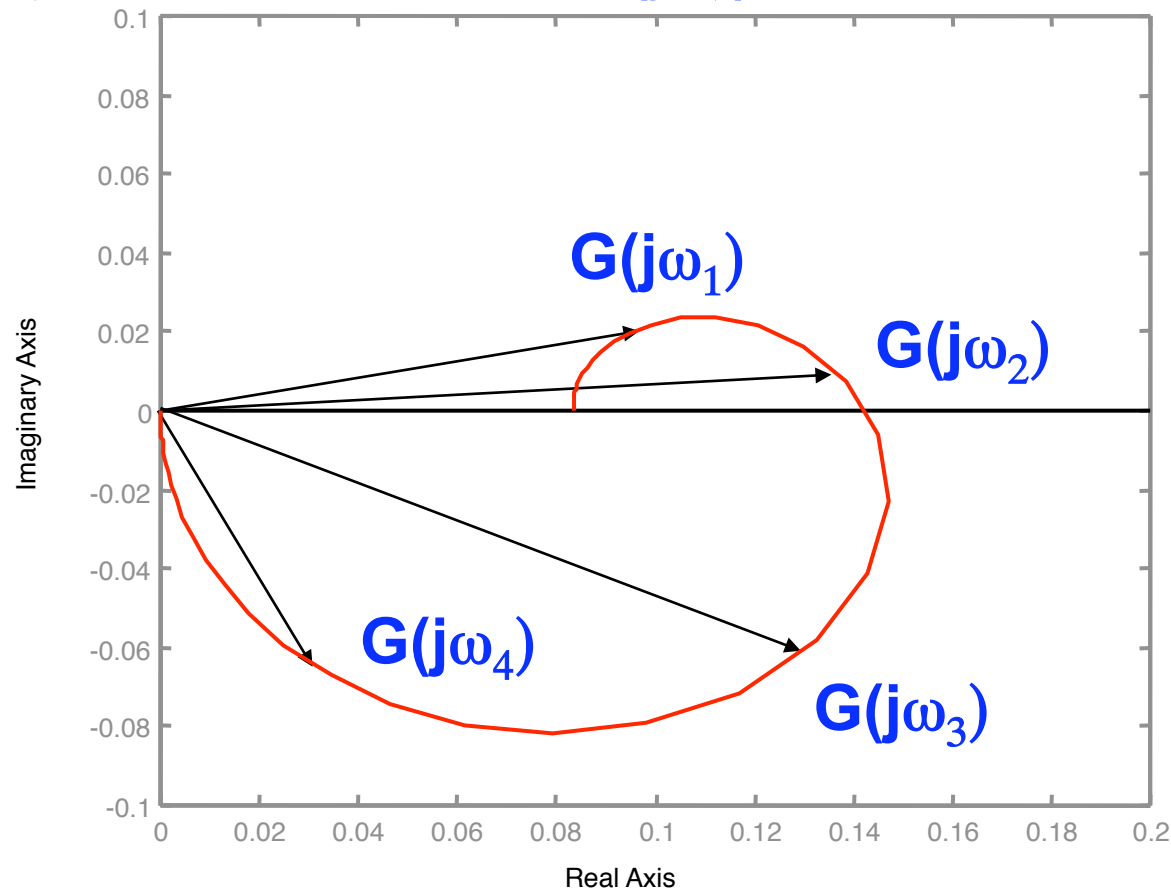


Diagrammi di Nyquist

- Diagramma di Nyquist (o polare): curva nel piano complesso parametrizzata in ω :
- $\text{Im}G(j\omega)$ in funzione di $\text{Re}G(j\omega)$



Diagrammi di Nyquist

- Sono di particolare importanza nello studio della stabilità dei sistemi dinamici
- Si tracciano per valori di $\omega \geq 0$, per $\omega \leq 0$ il diagramma si ottiene per simmetria rispetto all'asse reale ($G(-j\omega) = G^*(j\omega)$)
- Si possono costruire per via grafica a partire dalla forma fattorizzata di $G(j\omega)$
- Non ci sono “regole” generali come nel caso dei diagrammi di Bode
- Si possono ricavare $\text{Im}G(j\omega)$ e $\text{Re}G(j\omega)$ da $G(j\omega)$ e si possono valutare in regioni di interesse
- Ci si aiuta con i diagrammi di Bode

Diagrammi di Nyquist

- Esempio:**

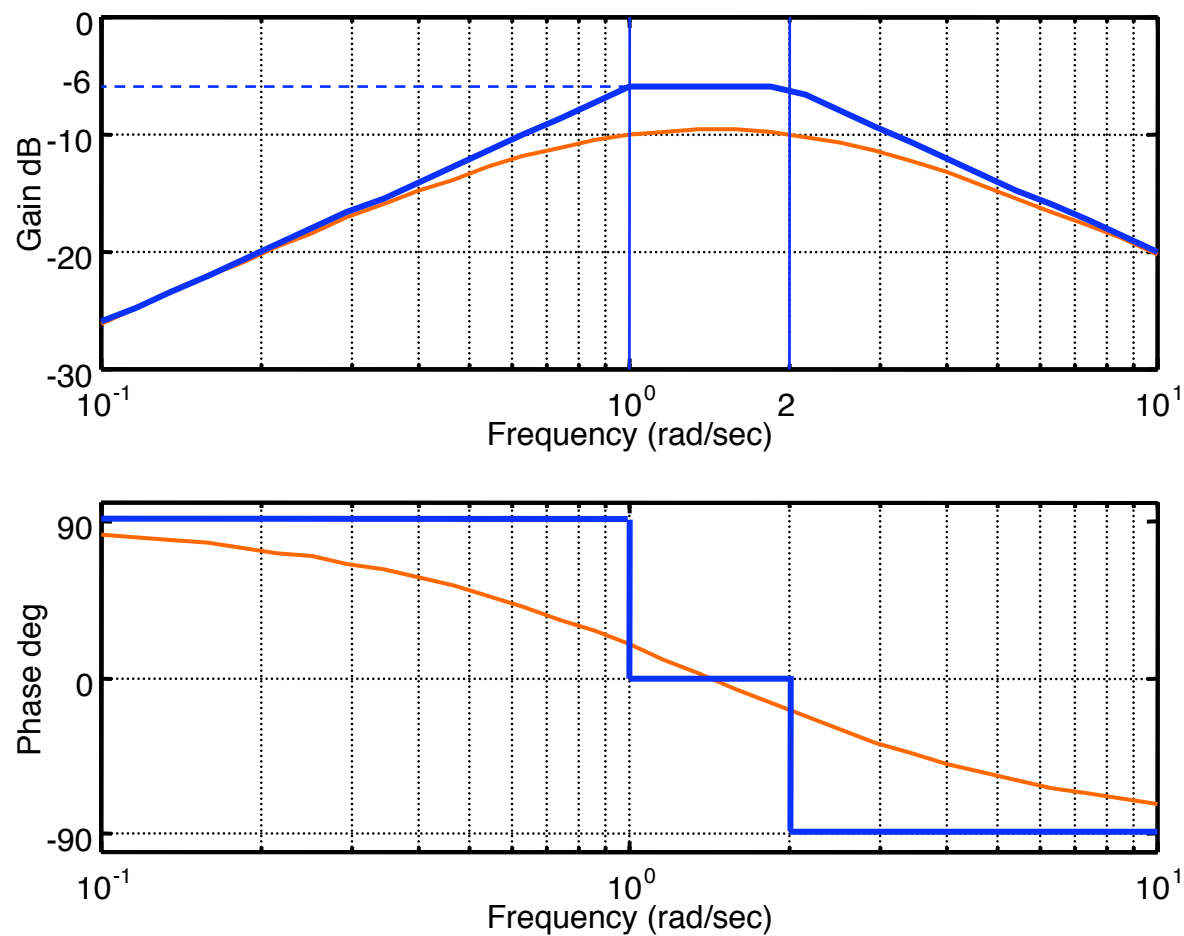
$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2} \frac{s}{(1+s)(1+s/2)}$$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{j\omega}{(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{j\omega}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} \\ &= \frac{j\omega}{(j\omega+1)(j\omega+2)} \frac{(-j\omega+1)(-j\omega+2)}{(-j\omega+1)(-j\omega+2)} \\ &= \frac{j\omega(-\omega^2 - 3j\omega + 2)}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)} = \frac{3\omega^2 + j\omega(2 - \omega^2)}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)} \end{aligned}$$

- $K_0=1/2 \Rightarrow |K_0|_{dB}=-6_{dB}$
- $\tau_1=1, \tau_2=1/2 \Rightarrow$ punti di spezzamento $1/\tau_1=1, 1/\tau_2=2$

Diagrammi di Nyquist

- Diagrammi di Bode:



Diagrammi di Nyquist

- **Informazione qualitativa:**

- $|G(j\omega)|$ presenta un massimo tra 1 e 2 rad/s; in corrispondenza di tale massimo $\arg G(j\omega) \approx 0$
- $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ per $\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow +\infty$
- $\arg G(j\omega)$ e' una funzione monotona decrescente
- $\arg G(j\omega) \rightarrow \pi/2$ per $\omega \rightarrow 0$
- $\arg G(j\omega) \rightarrow -\pi/2$ per $\omega \rightarrow +\infty$

- Questo permette di capire il comportamento per ω "grandi" e ω "piccoli"
- Si puo' studiare analiticamente l'andamento per valori particolari di ω

Diagrammi di Nyquist

- Andamento in punti notevoli:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{3\omega^2}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)} + j \frac{\omega(2 - \omega^2)}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)} \\ &= \Re e G(j\omega) + j \Im m G(j\omega) \end{aligned}$$

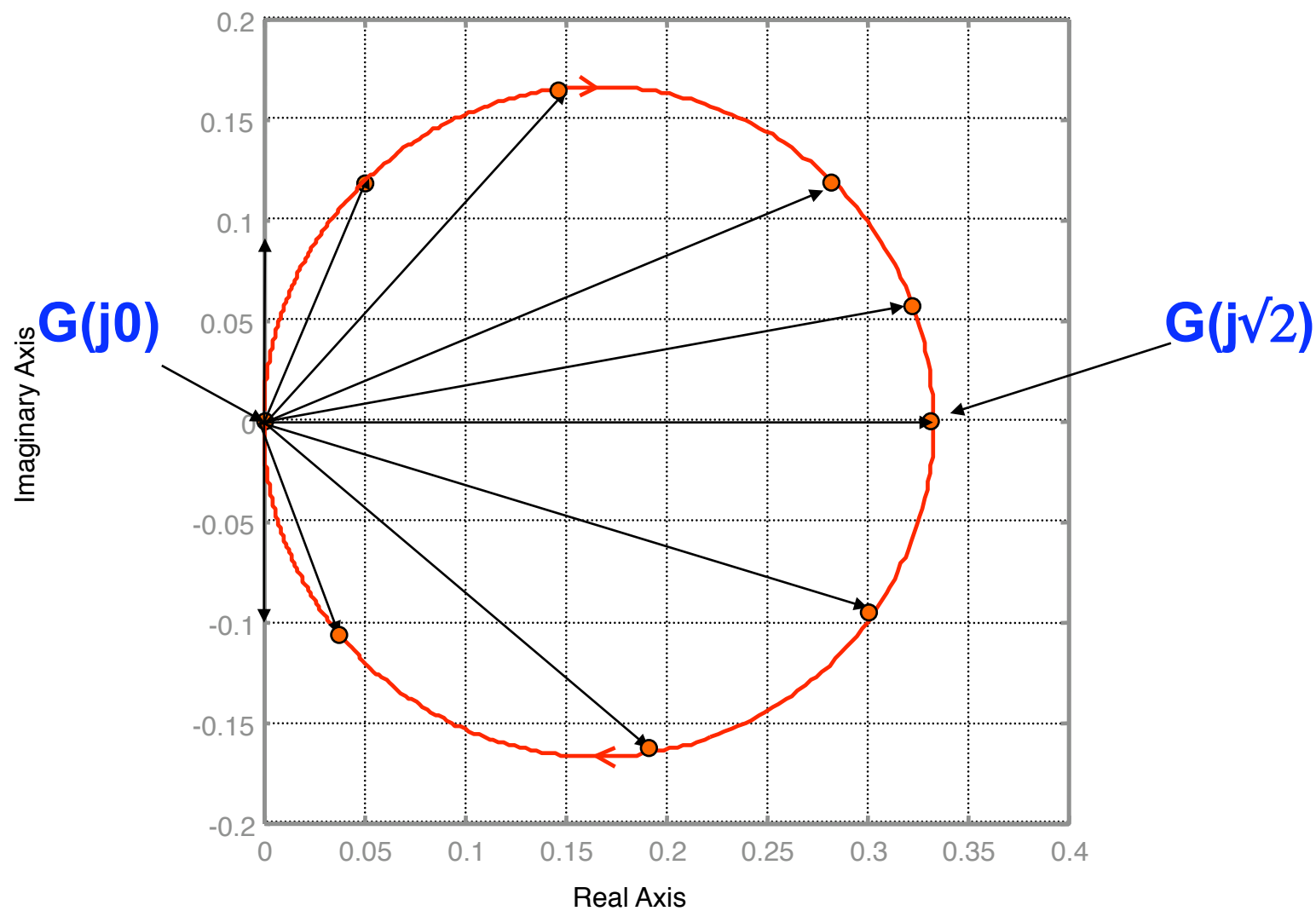
$$\Re e G(j\omega) = 0 \quad \omega = 0$$

$$\Im m G(j\omega) = 0 \quad \omega = 0 \quad \omega = \pm\sqrt{2}$$

$$\Re e G(j\sqrt{2}) = \frac{1}{3}$$

Diagrammi di Nyquist

Nyquist Diagrams



Diagrammi di Nyquist

- Si può dimostrare che il diagramma di Nyquist è una circonferenza di centro $1/6$ e raggio $1/6$
- Il massimo di $|G(j\omega)|$ si ottiene per $\omega = \sqrt{2}$
- A metà tra i due punti di spezzamento l'effetto della presenza dello zero viene annullato da quello dei due poli

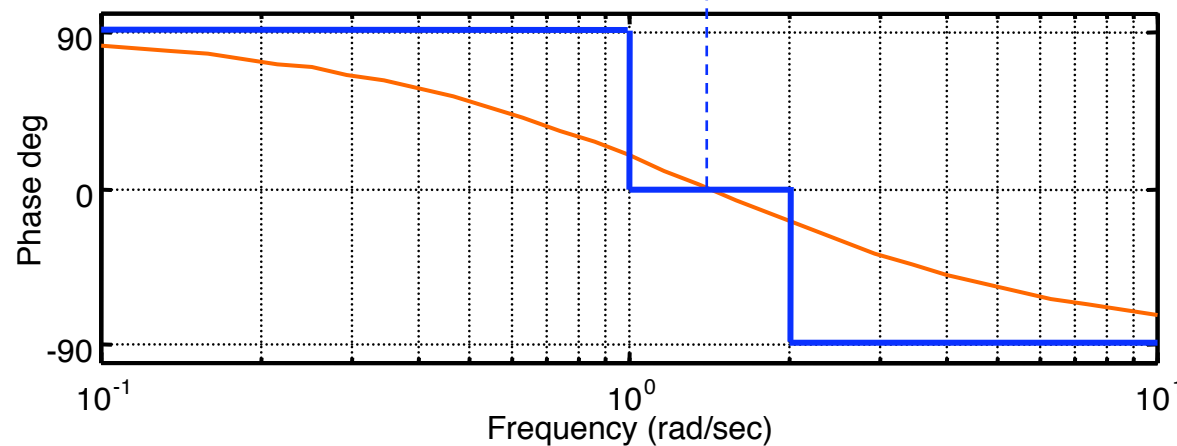
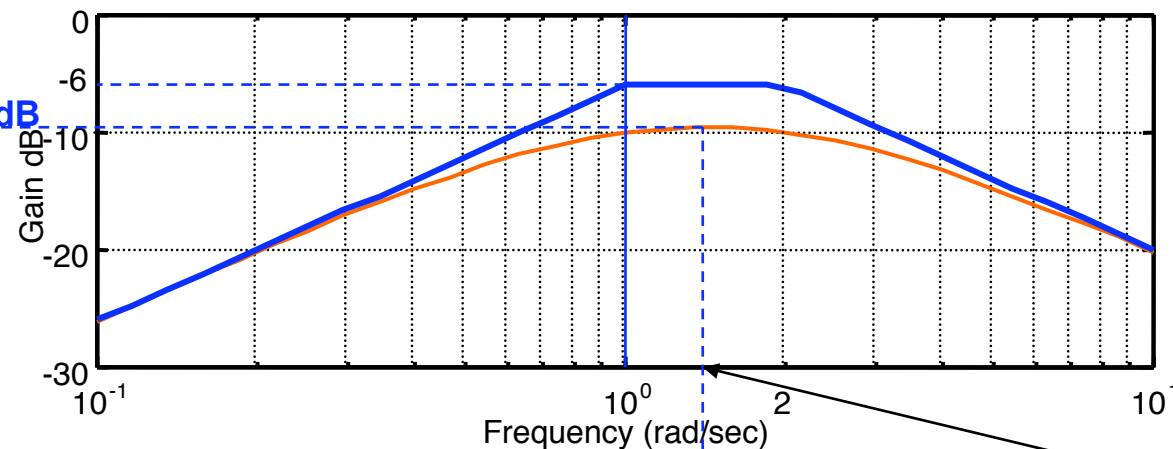
$$x_M = \frac{\log 1 + \log 2}{2} = \frac{\log(1 \cdot 2)}{2} = \log 2^{1/2} = \log \sqrt{2}$$

- Per $\omega = \sqrt{2}$, $\text{Im}G(j\omega)=0$, $\text{Re}G(j\omega)>0 \Rightarrow \text{Arg}G(j\omega)=0$

Diagrammi di Nyquist

- Sui diagrammi di Bode:

$$20\log 0.3 \approx -10_{\text{dB}}$$



$$\omega = \sqrt{2}$$

Comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$

- Comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$: per ω molto piccoli, riferendosi alla forma di Bode di $G(j\omega)$

$$G(j\omega) \cong (j\omega)^h K_0 = j^h (K_0 \omega^h)$$

- h : eccesso zeri/poli nell'origine
- $h > 0$: $G(j\omega) \approx 0$ per $\omega \approx 0$
 - il diagramma di Nyquist parte dall'origine
 - $\arg G(j\omega) \approx h\pi/2$ se $K_0 > 0$
 - $\arg G(j\omega) \approx h\pi/2 + \pi$ se $K_0 < 0$

Comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$

- **$h < 0$:** $G(j\omega) \approx \infty$ per $\omega \approx 0^+$
 - il diagramma di Nyquist parte dall'infinito
 - $\arg G(j\omega) \approx |h|(-\pi/2)$ se $K_0 > 0$
 - $\arg G(j\omega) \approx |h|(-\pi/2) + \pi$ se $K_0 < 0$
- Il diagramma può andare all'infinito con un asintoto
- **Esempio:** $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{-j}{\omega(j\omega+1)} \\
 &= -\frac{\omega+j}{\omega(\omega^2+1)} = \frac{-1}{(\omega^2+1)} + j\frac{-1}{\omega(\omega^2+1)}
 \end{aligned}$$

Comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Re e G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-1}{(\omega^2 + 1)} = -1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Im m G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-1}{\omega(\omega^2 + 1)} = -\infty$$

asintoto verticale passante per -1

- **h=0:** $G(j\omega) \approx K_0$ per $\omega \approx 0^+$
 - il diagramma di Nyquist parte da un punto dell'asse reale
 - direzione di partenza: considero $G'(s)=G(s)-K_0$ (versione traslata di $G(s)$) che ha $h=1$ e come prima ...

Comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$

- Comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$: consideriamo due casi
 - $m = \deg(N(s)) < n = \deg(D(s))$ (funzioni razionali strettamente proprie). Per ω grandi

$$G(j\omega) = K \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \bigg|_{s=j\omega} \cong K \frac{1}{(j\omega)^{n-m}} \cong 0$$

$$\arg G(j\omega) \cong \arg \left(K \frac{1}{(j\omega)^{n-m}} \right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}(n-m) & K > 0 \\ -\frac{\pi}{2}(n-m) + \pi & K < 0 \end{cases}$$

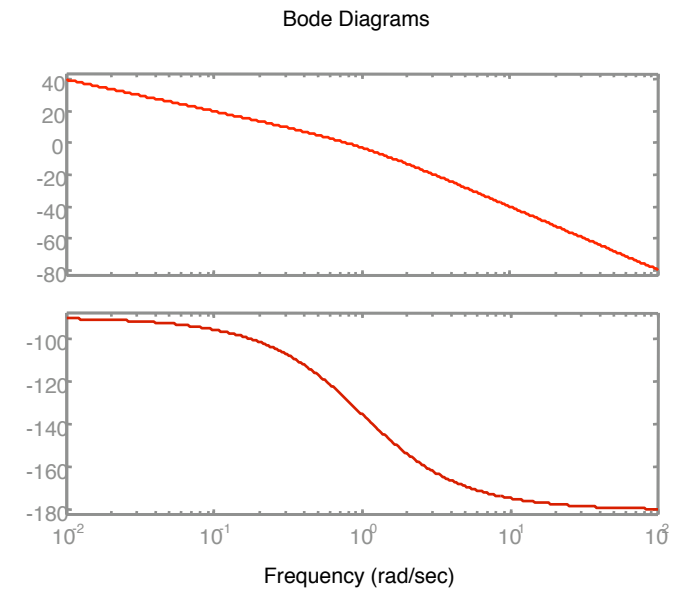
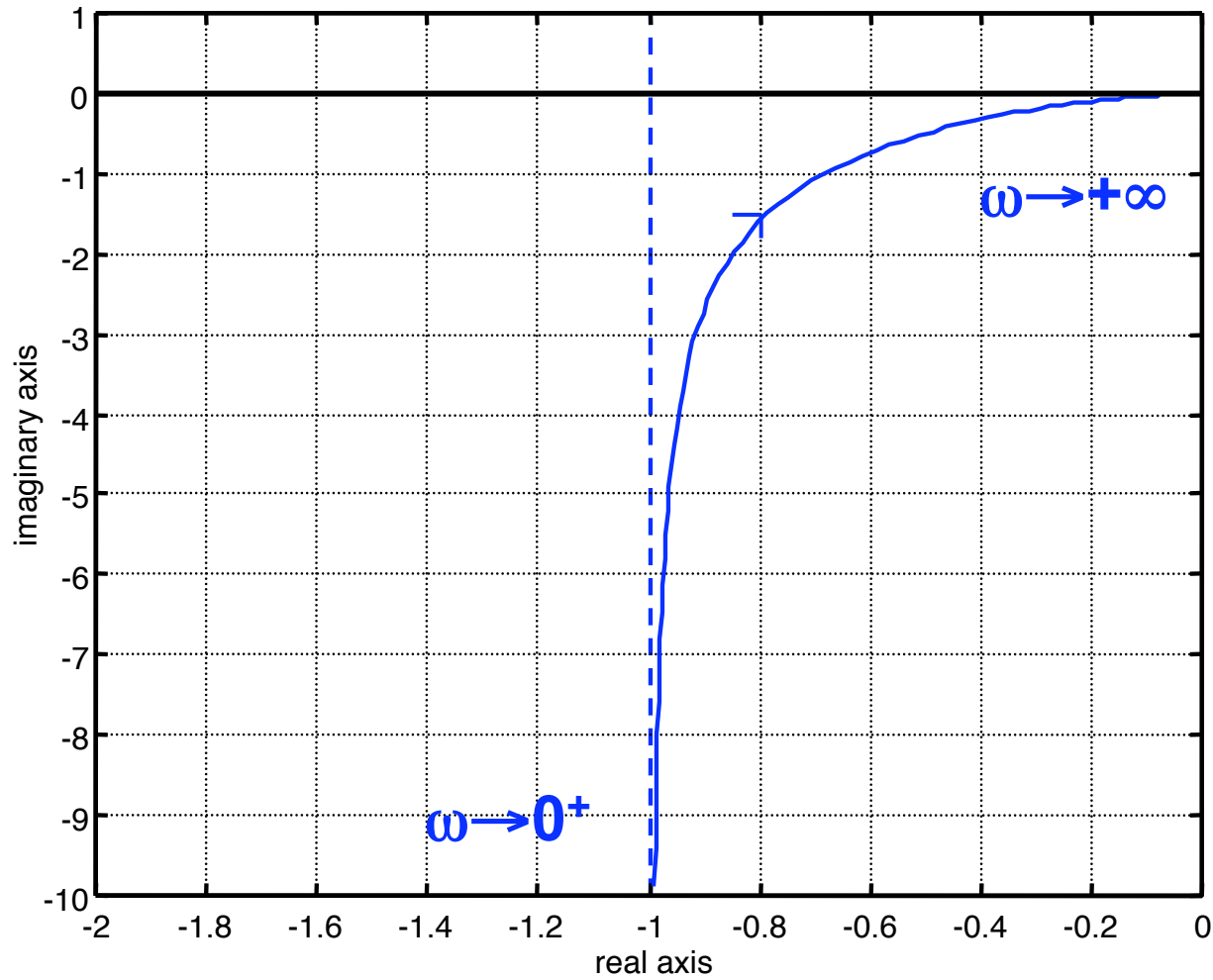
Comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$

- **Proseguimento dell'esempio:**

$$\omega \cong +\infty : \arg G(j\omega) \cong \arg\left(-\frac{1}{\omega^2}\right) = -\pi = -2\frac{\pi}{2} = -(n-m)\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \cong 0^+ : \arg G(j\omega) \cong \arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -\frac{\pi}{2} = -1 \cdot \frac{\pi}{2} = -h \cdot \frac{\pi}{2}$$

Comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$



Comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$

- **$m=\deg(N(s))=n=\deg(D(s))$** (funzioni razionali proprie non strettamente). Per ω grandi

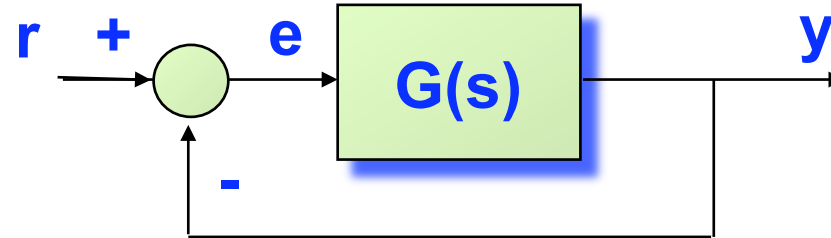
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} K \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \Big|_{s=j\omega} = K$$

- Il diagramma va a finire sull'asse reale
- direzione di arrivo: considero $G''(s)=G(s)-K$ (versione traslata di $G(s)$) che ha grado relativo >0 e come prima

Il criterio di Nyquist

- Problema fondamentale nel progetto di dispositivi di controllo: studiare il comportamento del dinamico del sistema in retroazione noto quello del sistema stesso in catena aperta
- Studio della stabilita` di un sistema in retroazione:
 - studio diretto a partire dall'espressione della funzione di trasferimento in catena chiusa (ad es. tramite il criterio di Routh)
 - **Criterio di Nyquist:** nota la funzione di risposta armonica di un sistema, permette di determinare per via grafica la stabilita` del sistema in catena chiusa
 - Dà ulteriori indicazioni utili per il progetto di controllori

Il criterio di Nyquist



- Funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = T(s)$$

- Per determinare la stabilità BIBO di $T(s)$ si deve verificare se esistono zeri di $1+G(s)$ con parte reale in $\text{Re}[s] \geq 0$
- A tale scopo si può utilizzare un risultato fondamentale dell'analisi complessa noto come **lemma dell'indicatore logaritmico o principio dell'argomento**

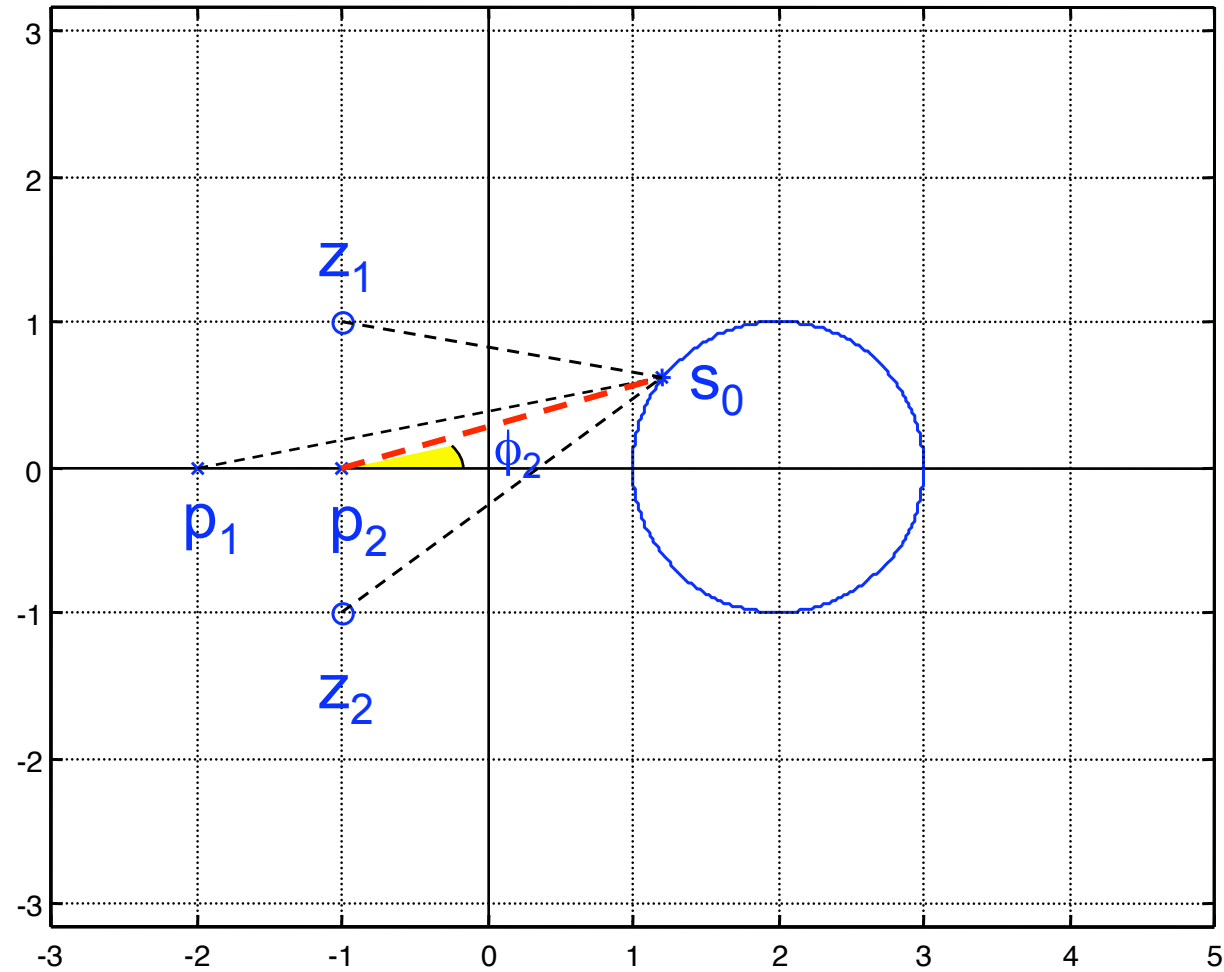
Il criterio di Nyquist

- Si consideri la funzione razionale $H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$
- Si vuole valutare $H(s)$ per $s \in \gamma$, con γ curva chiusa in \mathbb{C}
- Per ogni $s_0 \in \gamma$

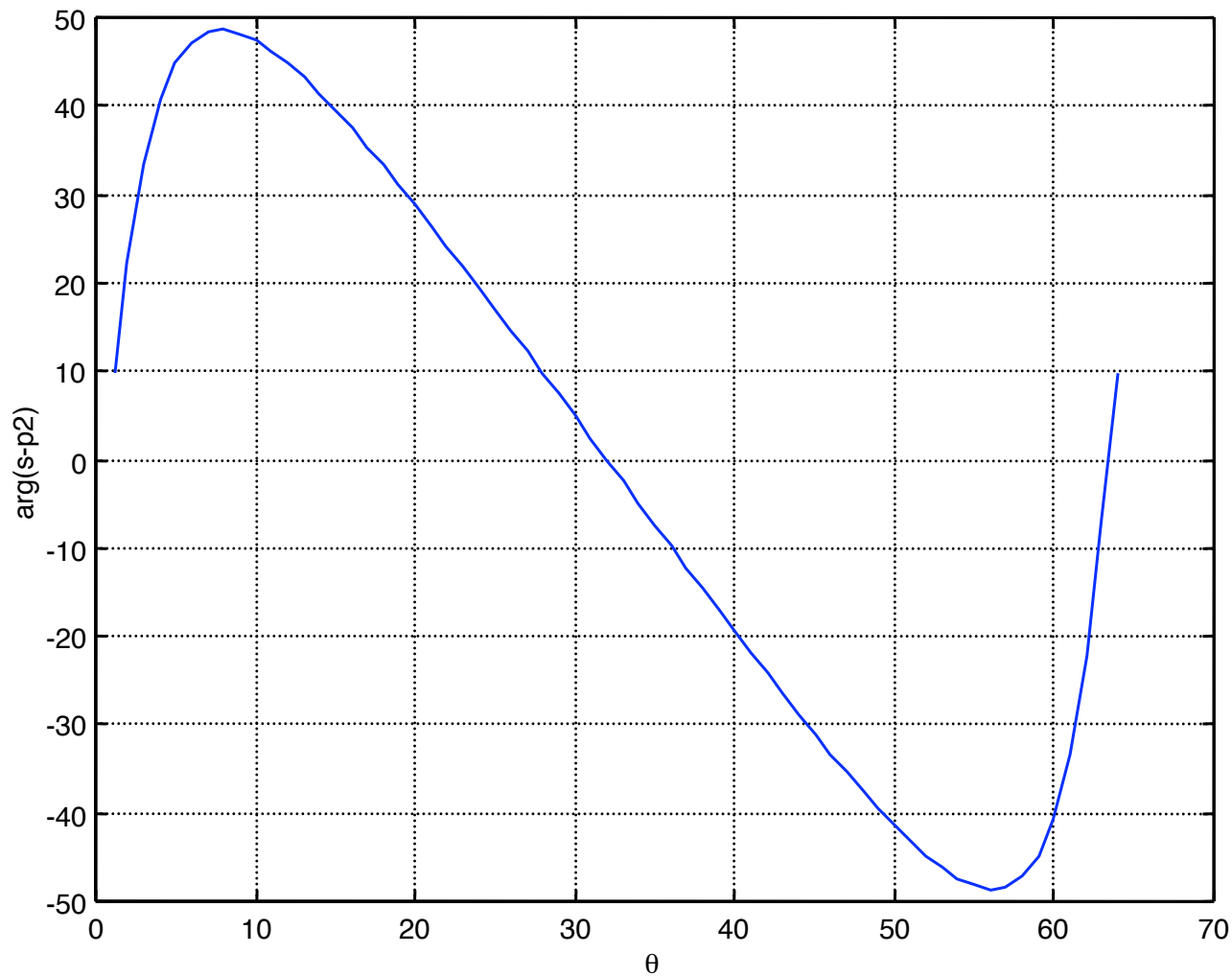
$$\begin{aligned}\alpha &= \text{Arg } H(s_0) = \text{Arg}(s_0 - z_1) + \text{Arg}(s_0 - z_2) - (\text{Arg}(s_0 - p_1) + \text{Arg}(s_0 - p_2)) \\ &= \sum \theta_i - \sum \phi_i\end{aligned}$$

- Quando s_0 percorre completamente γ in senso orario, il contributo complessivo di ciascun termine θ_i e ϕ_i alla variazione di fase di $H(s)$ è
 - **nullo** se z_i o p_i è posto **esternamente** alla curva γ
 - **$\pm 2\pi$** se z_i o p_i è posto **internamente** alla curva γ

Il criterio di Nyquist

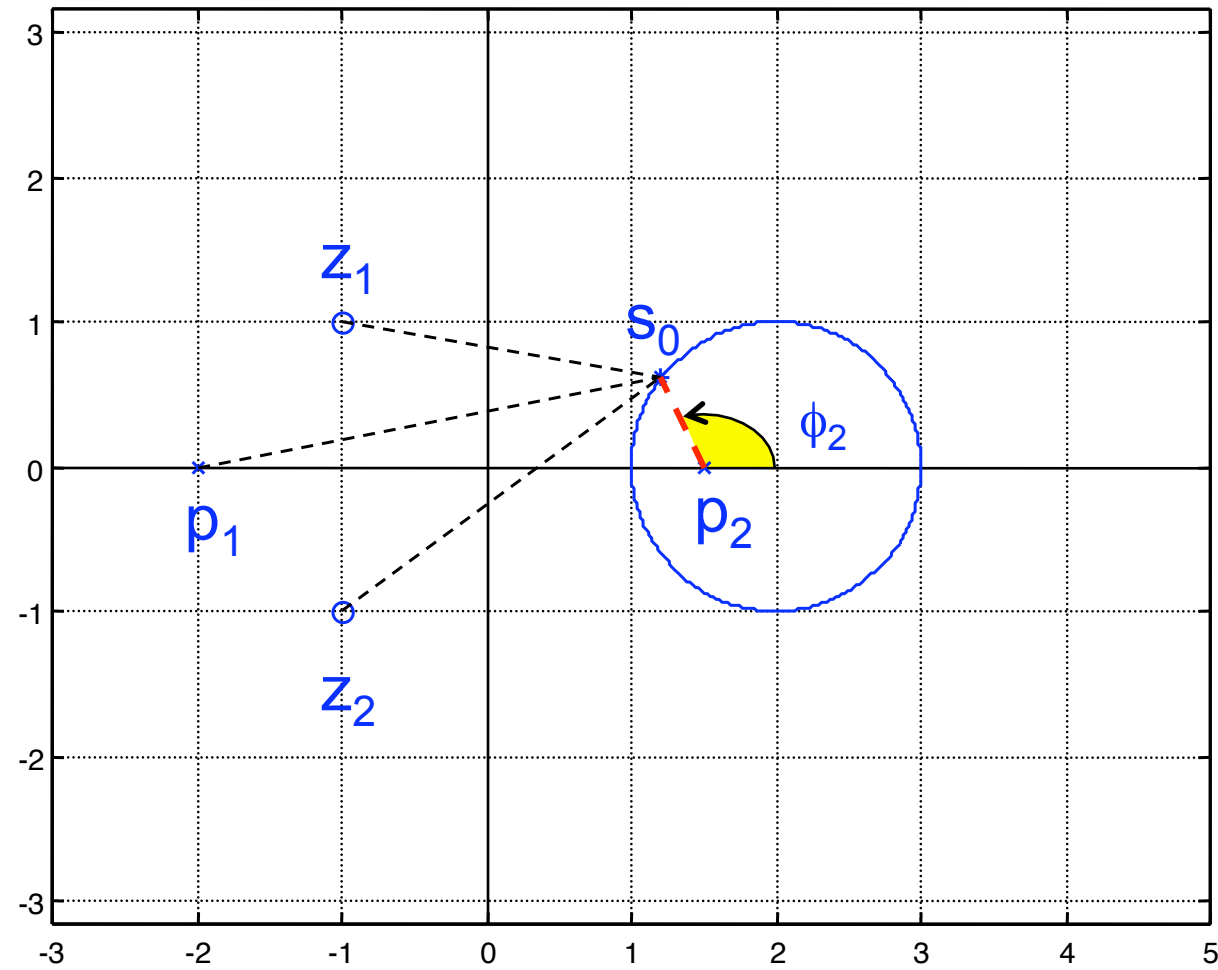


Il criterio di Nyquist

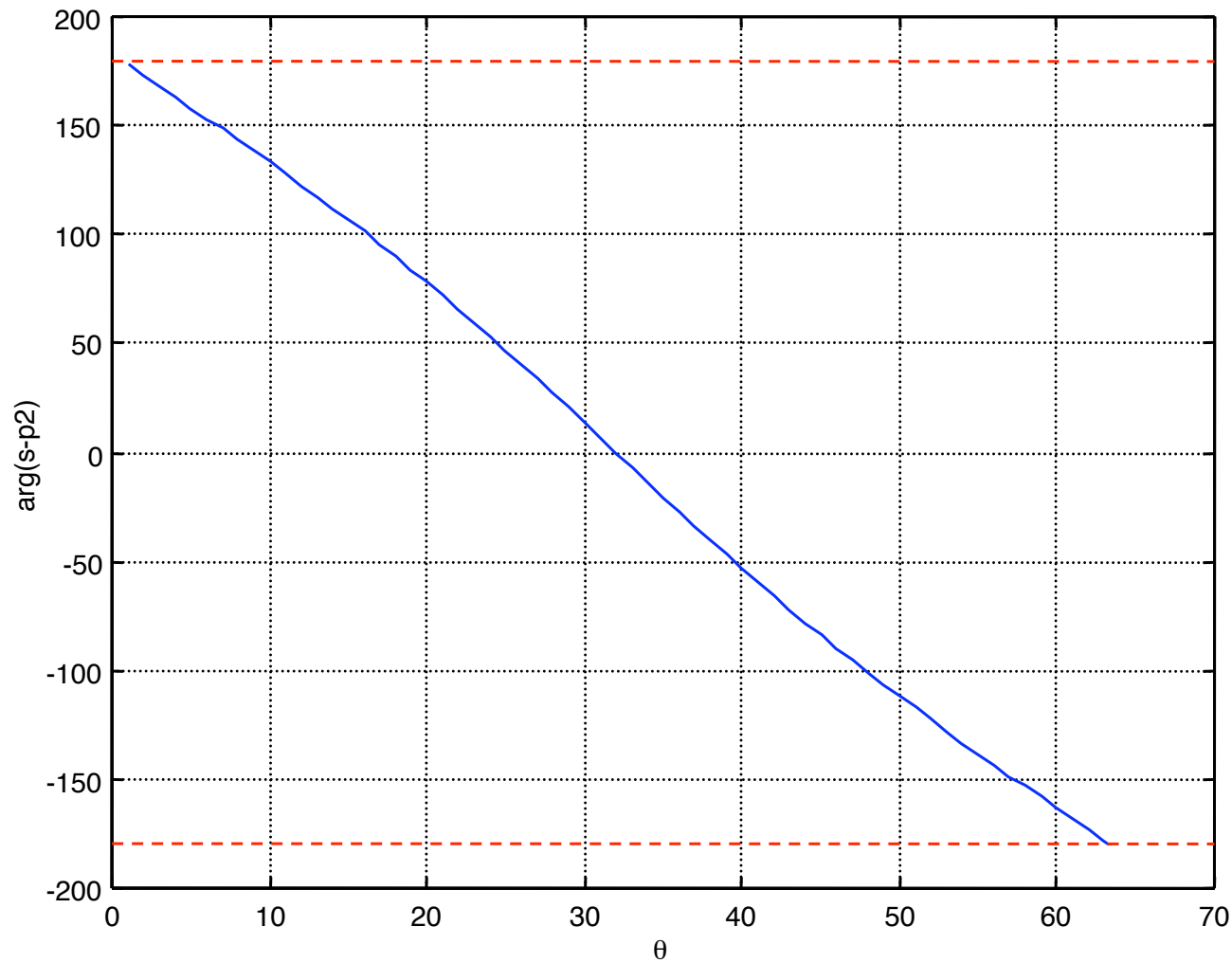


**variazione totale
di ϕ_2 :
 $\phi_2(2\pi) - \phi_2(0) = 0$**

Il criterio di Nyquist



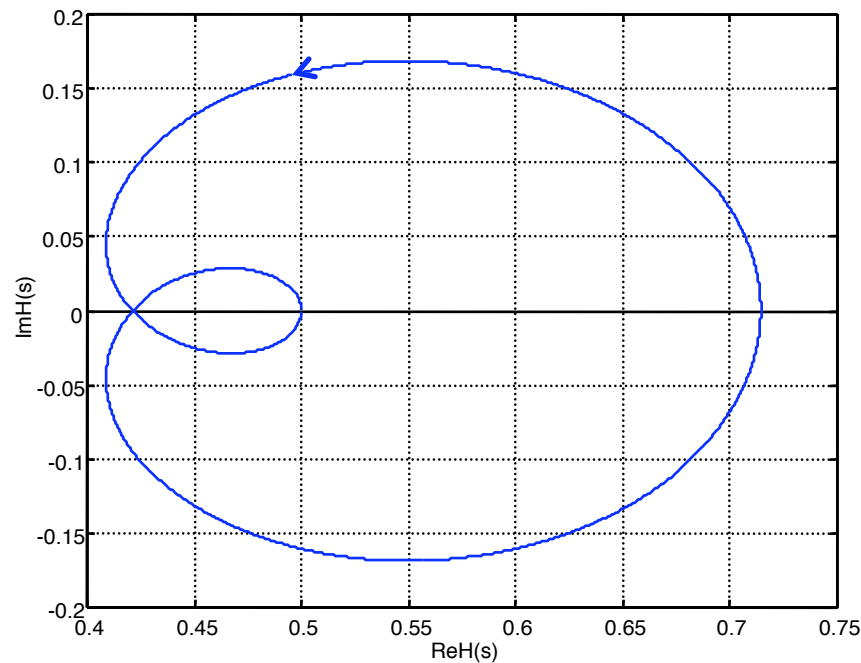
Il criterio di Nyquist



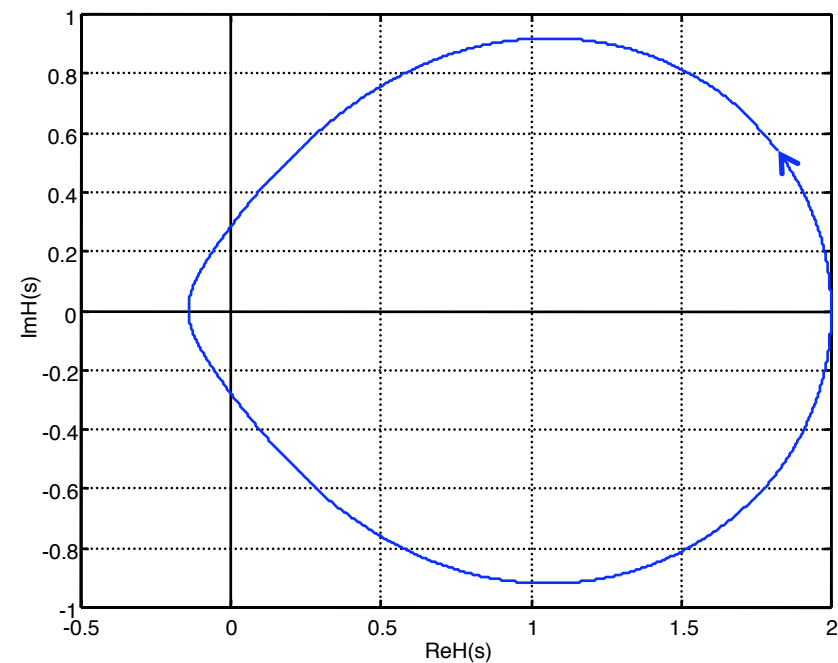
**variazione totale
di ϕ_2 :**
 $\phi_2(2\pi) - \phi_2(0) = -2\pi$

Il criterio di Nyquist

- Ogni volta che la fase di $H(s)$ ha una variazione di 2π (-2π), il diagramma di $H(s)$ circonda una volta l'origine in verso antiorario (orario)



p_2 esterno a γ



p_2 interno a γ

Il principio dell'argomento

- **Principio dell'argomento:** Sia $\gamma: [a,b] \rightarrow C$
 $t \rightarrow \gamma(t)$

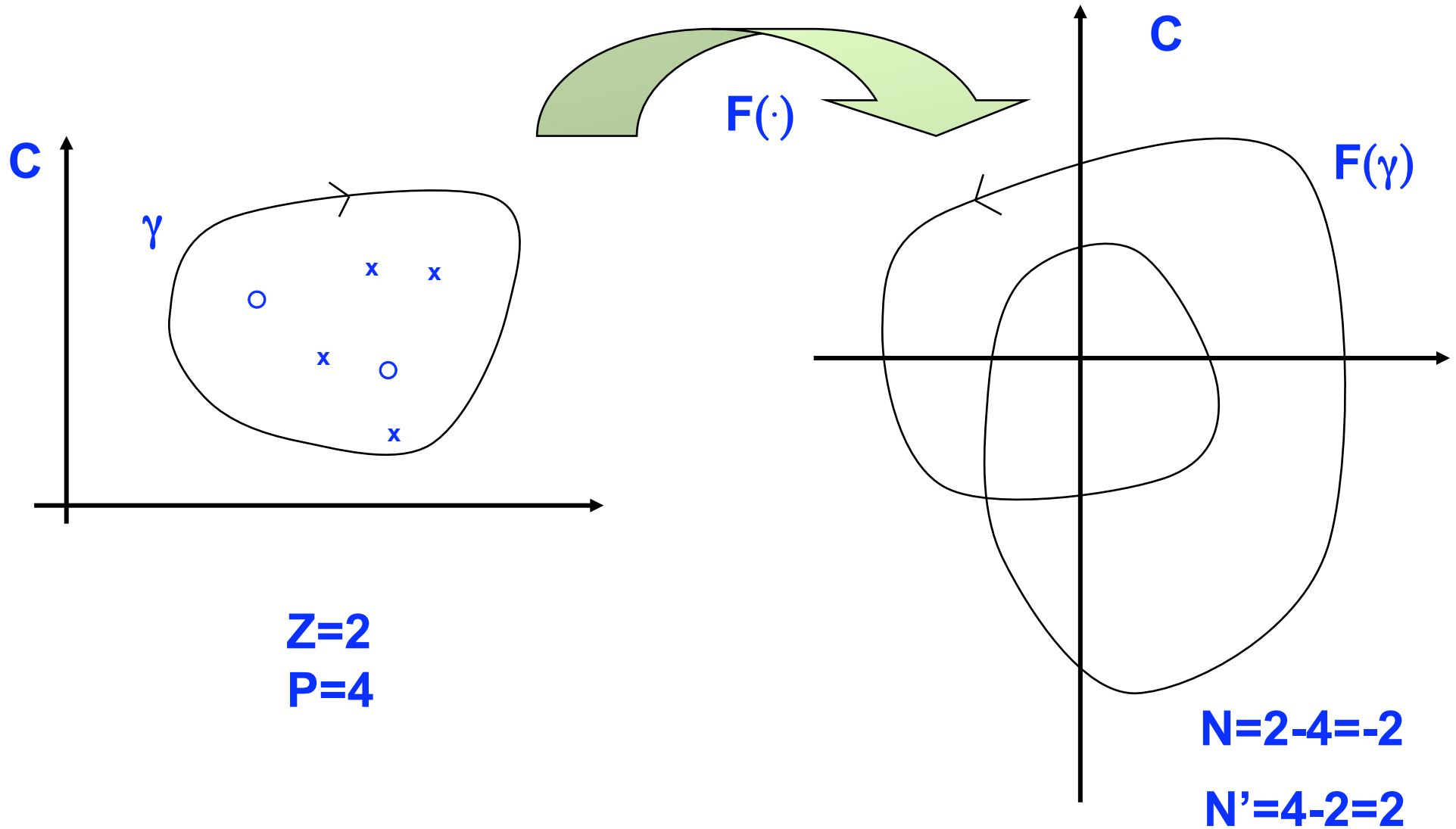
una curva semplice chiusa in C e percorsa in senso orario,
e sia $F(s)$ una funzione razionale **priva di zeri e poli su γ** .
Allora

$$F(\gamma): [a,b] \rightarrow C$$
$$t \rightarrow F(\gamma(t))$$

e' una curva chiusa in C e il **numero N di aggiramenti in senso orario dell'origine di $F(\gamma)$** e' dato da **$N=Z-P$** dove

- **Z : # di zeri di $F(s)$ dentro γ (contati con la molteplicita')**
- **P : # di poli di $F(s)$ dentro γ (contati con la molteplicita')**
- **Equivalentemente, il numero N' di aggiramenti antiorari dell'origine di $F(\gamma)$ e' dato da **$N'=-N=-(Z-P)=P-Z$****

Il principio dell'argomento

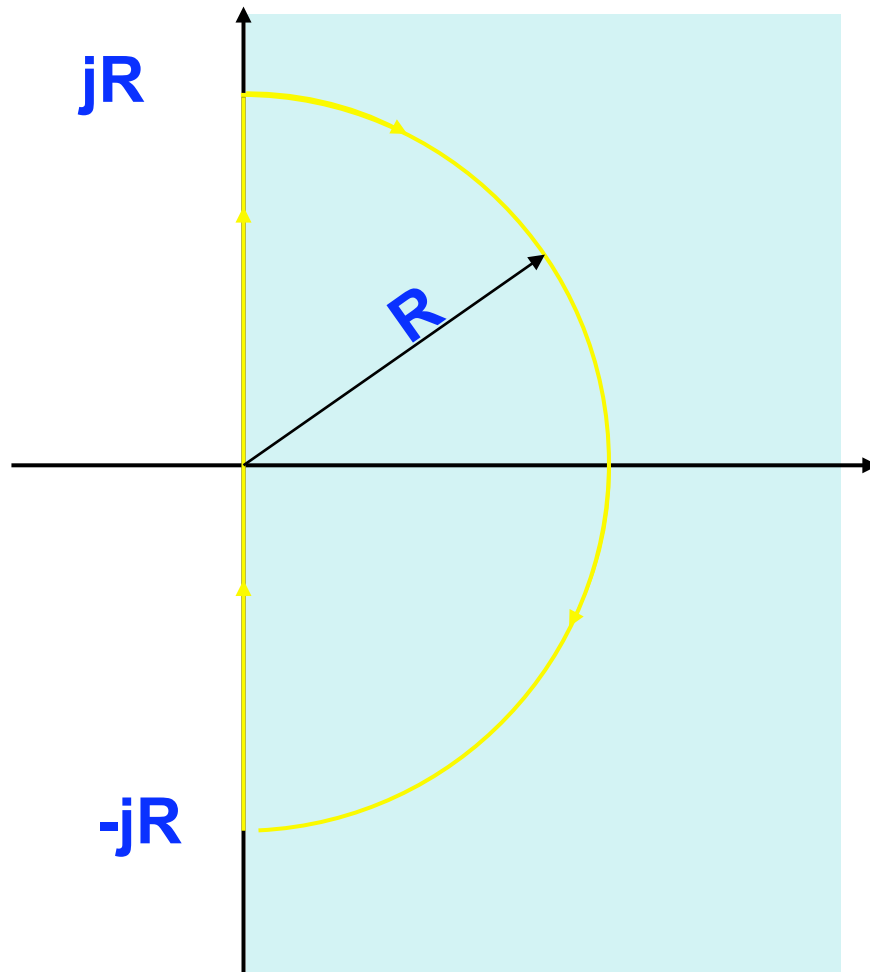


Il percorso di Nyquist

- Stabilità del sistema in catena chiusa \Rightarrow studio della posizione degli zeri di $1+G(s) \Leftrightarrow$ poli di $T(s)$
- Stabilità BIBO \Leftrightarrow non vi sono zeri di $1+G(s)$ in $\text{Re}[s] \geq 0$
- Il principio dell'argomento permette di trarre informazioni sul numero di zeri e poli di una funzione $F(s)$ collocati all'interno di una regione di interesse (delimitata dalla curva chiusa γ)
 - $F(s)=1+G(s)$
 - γ : curva chiusa che delimita l'intera regione $\text{Re}[s] > 0$ (“percorso di Nyquist”)
 - obiettivo: determinare quanti sono gli zeri di $F(s)$ che cadono nel semipiano $\text{Re}[s] > 0$

Il percorso di Nyquist

- Possibile scelta per γ : concatenazione di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$



$$\gamma_1: j\omega, \quad \omega=0 \rightarrow \omega=R$$

$$\gamma_2: Re^{j\vartheta}, \quad \vartheta = \pi/2 \rightarrow \vartheta = -\pi/2$$

$$\gamma_3: j\omega, \quad \omega=-R \rightarrow \omega=0$$

Per R “grande”
(tendente all’infinito),
 γ racchiude tutto $\text{Re}[s] > 0$

Il percorso di Nyquist

- $F(\gamma)$: concatenazione di $F(\gamma_1)$, $F(\gamma_2)$, $F(\gamma_3)$
- Per $R \rightarrow \infty$, $F(\gamma_1)=F(j\omega)=1+G(j\omega)$, con $\omega \in [0, \infty] \Rightarrow$ legata alla risposta armonica $G(j\omega)$ per pulsazioni positive \Rightarrow diagramma di Nyquist per pulsazioni positive
- Per $R \rightarrow \infty$, $F(\gamma_3)=F(j\omega)=1+G(j\omega)$, con $\omega \in [-\infty, 0] \Rightarrow$ legata alla risposta armonica e al diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per pulsazioni negative (per simmetria)
- Per $R \rightarrow \infty$, $F(\gamma_2)$ descrive il comportamento all'infinito ("passaggio" dalle pulsazioni positive a quelle negative per "chiudere" la curva)

Il criterio di Nyquist

- Per applicare il principio dell'argomento: contare gli aggiramenti (in senso orario) di $F(\gamma)=1+ G(\gamma)$ attorno al punto $0+j0$ del piano complesso \Leftrightarrow aggiramenti di $G(\gamma)$ attorno al punto $-1+j0$
- $G(\gamma)$: diagramma di Nyquist **completo** di $G(s)$
- $N= \#$ di aggiramenti del diagramma di Nyquist di $G(s)$ attorno al **punto critico** $-1+j0$

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \Rightarrow F(s) = 1 + G(s) = 1 + \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{a(s) + b(s)}{a(s)}$$

- Zeri di $F(s) \Leftrightarrow$ poli di $T(s)$
- Poli di $F(s) \Leftrightarrow$ poli di $G(s)$

Il criterio di Nyquist

- Ipotesi nel principio dell'argomento: $F(s)$ non ha ne' zeri ne' poli su γ
- **Ipotesi:**
 - $G(s)$ non ha poli sull'asse immaginario
 - $G(\infty) \neq -1$ (non ci sono poli "all'infinito" di $T(s)$)
 - il diagramma di Nyquist **completo** di $G(s)$ non passa per il punto critico $-1+j0$ ($T(s)$ non ha poli sull'asse immaginario)
- Osservazione: se $G(\infty) = -1$, $T(s)$ non e' propria ...
- Sia noto il numero P di poli di $G(s)$ (=poli di $F(s)$) in $\text{Re}[s]>0$)

Il criterio di Nyquist

- Per via grafica e` possibile determinare N (positivo in senso orario); P e` noto per ipotesi; vale $N=Z-P$.
- $Z = \# \text{ zeri di } F(s) \text{ in } \text{Re}[s]>0 = \# \text{ poli di } T(s) \text{ in } \text{Re}[s]>0 = N+P$
 - $Z=0 \Rightarrow -N=P$
- **Criterio di Nyquist:** nelle ipotesi viste, condizione necessaria e sufficiente perche' il sistema in retroazione unitaria sia BIBO stabile e` che il diagramma completo di Nyquist di $G(s)$ circonda il punto critico $-1+j0$ in senso antiorario tante volte quanti sono i poli di $G(s)$ in $\text{Re}[s]>0$
- Osservazione: ogni giro in meno in senso antiorario, od ogni giro in piu` in senso orario, corrisponde ad un polo di $T(s)$ in $\text{Re}[s]>0$
- Se la retroazione non e` unitaria, si sostituisce $G(s)$ con il guadagno di anello $L(s)$

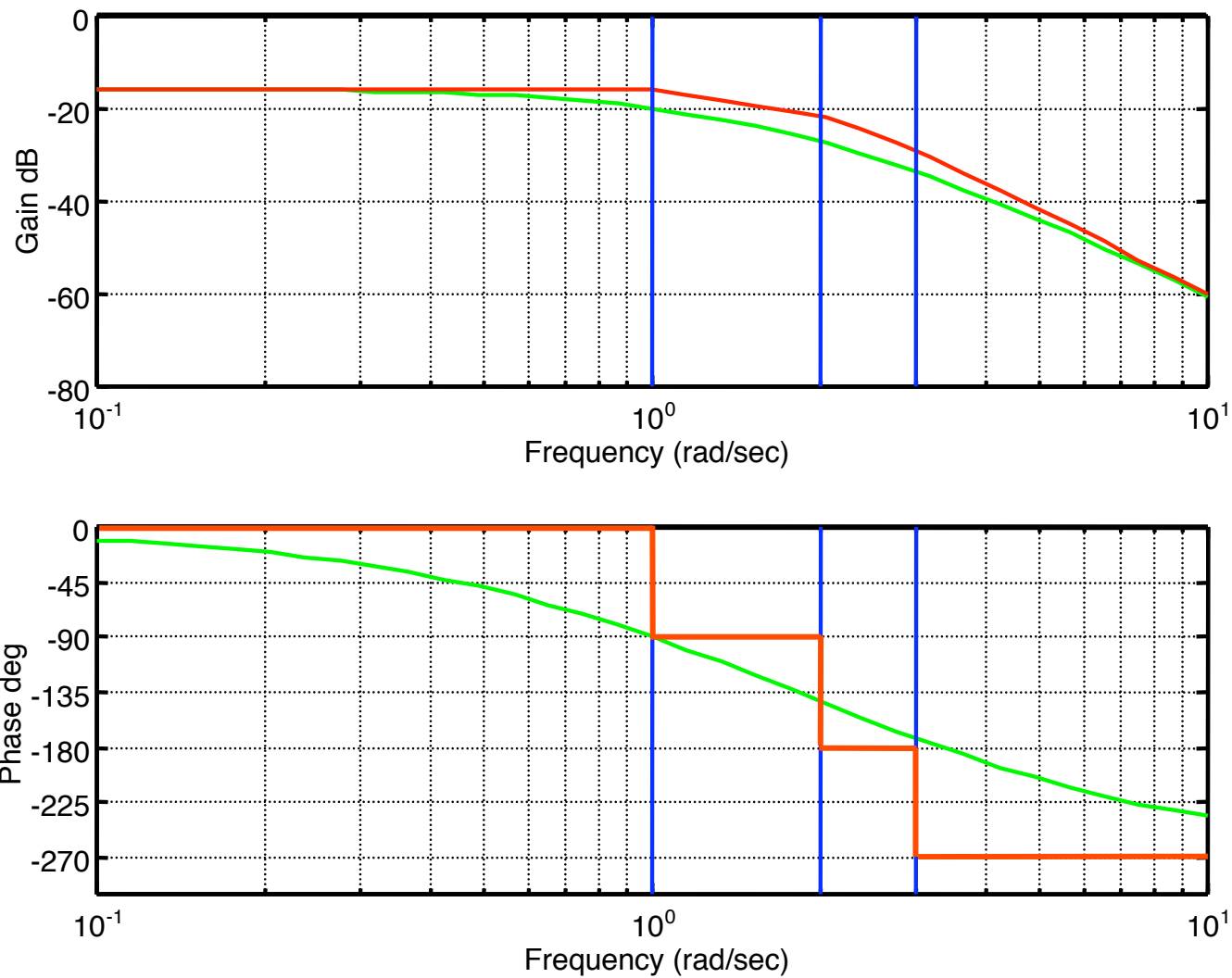
Il criterio di Nyquist

- **Criterio ridotto di Nyquist:** se il sistema in catena aperta non ha poli in $\text{Re}[s]>0$, condizione necessaria e sufficiente perche' il sistema in retroazione unitaria sia BIBO stabile e' che il diagramma completo di Nyquist di $G(s)$ non circonda il punto critico $-1+j0$.
- Esempio: il termine in catena diretta sia

$$KG(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{K/6}{(1+s)(1+s/2)(1+s/3)}$$

- $KG(s)$ soddisfa le ipotesi ed e' BIBO stabile per ogni $K>0$
 $\Rightarrow P=0$
- Stabilita' del sistema in catena chiusa al variare di K
- Diagrammi di Bode per $K=1$

Il criterio di Nyquist



Il criterio di Nyquist

- Scomposizione in parte reale e parte immaginaria:

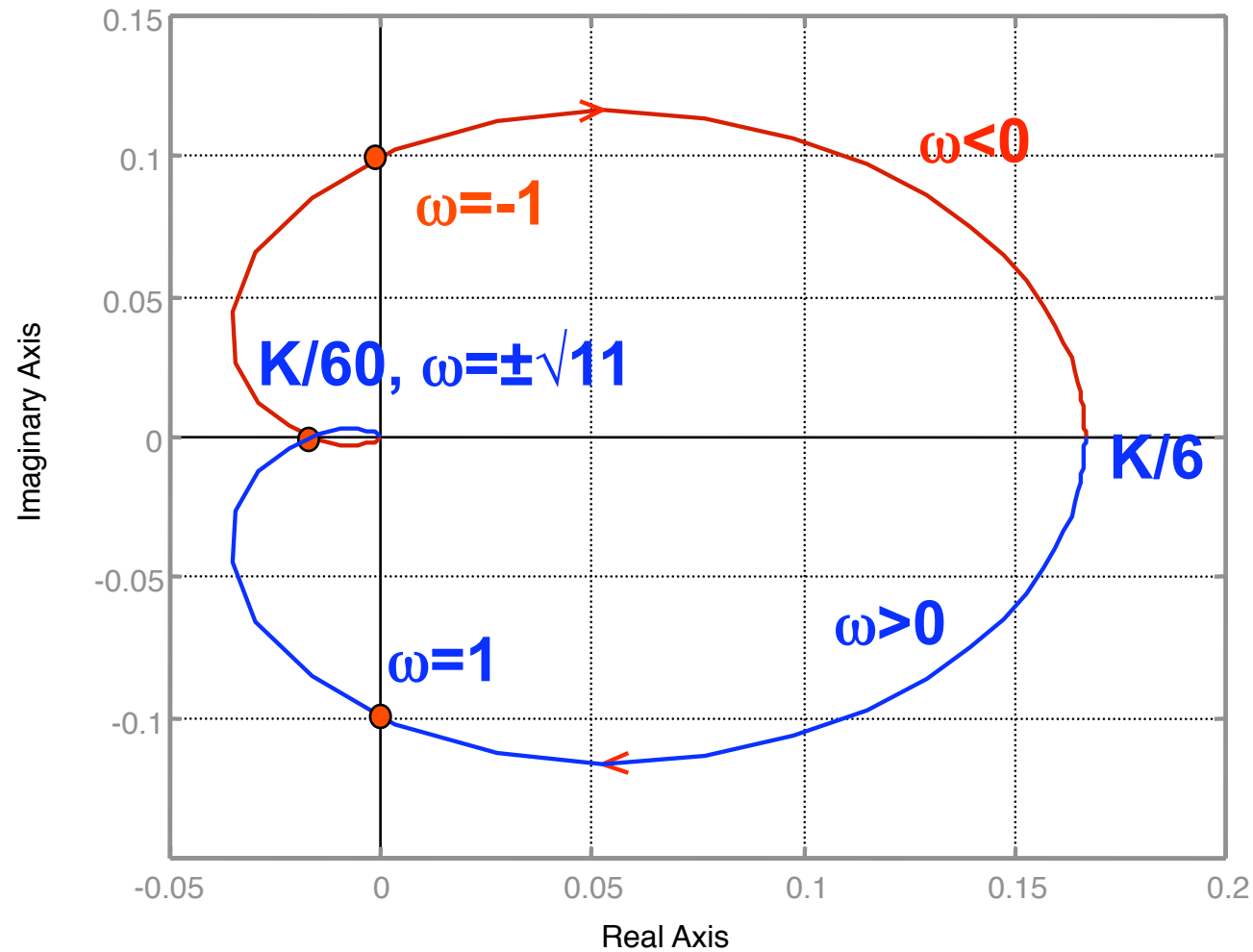
$$G(j\omega) = \frac{K6(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)(9+\omega^2)} + j \frac{K\omega(\omega^2-11)}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

	$\Re[G(j\omega)]$	$\Im[G(j\omega)]$
$\omega = 0$	$K/6$	0
$\omega = \pm\sqrt{11}$	$-K/60$	0
$\omega = \pm 1$	0	$K/10$

- Diagrammi di Nyquist (scala corrispondente a K=1)

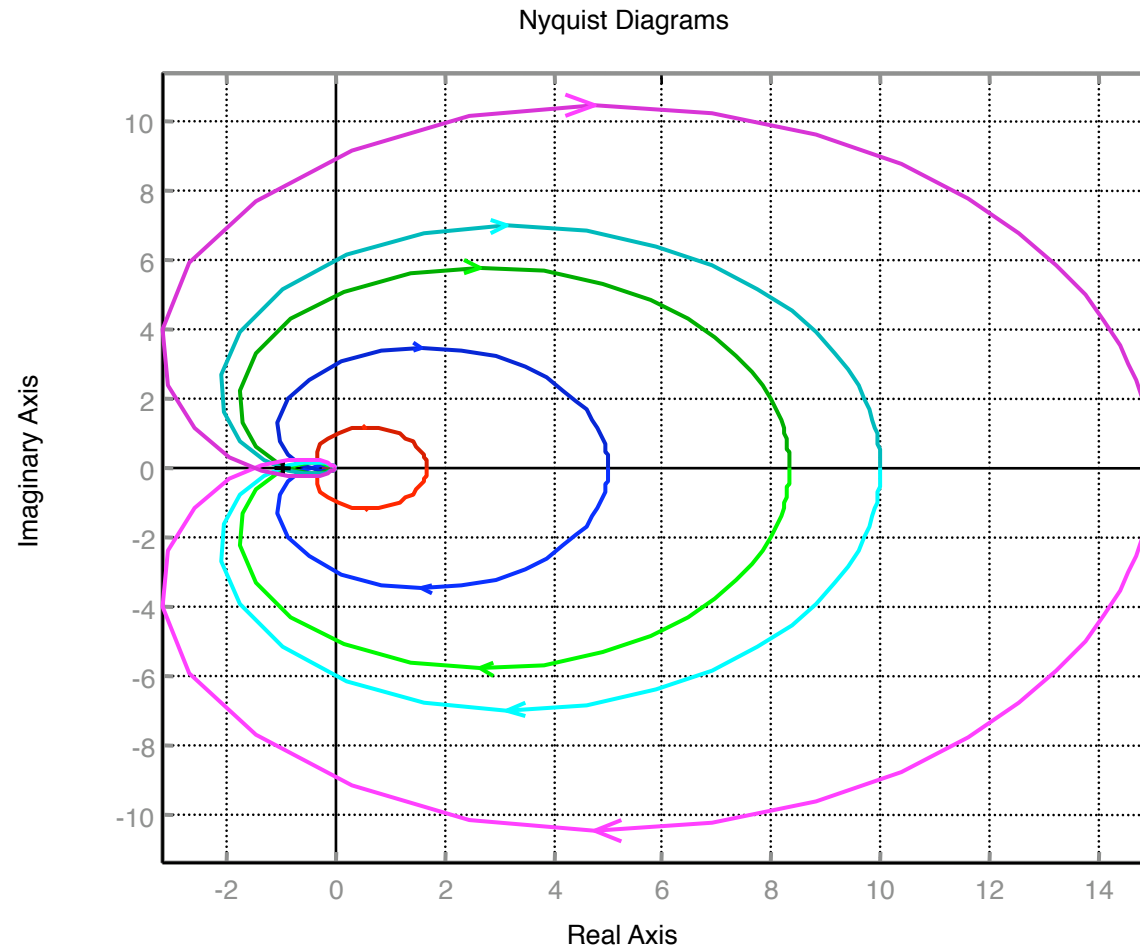
Il criterio di Nyquist

Nyquist Diagrams



Il criterio di Nyquist

- Al crescere di $K>0$ il diagramma “si espande”

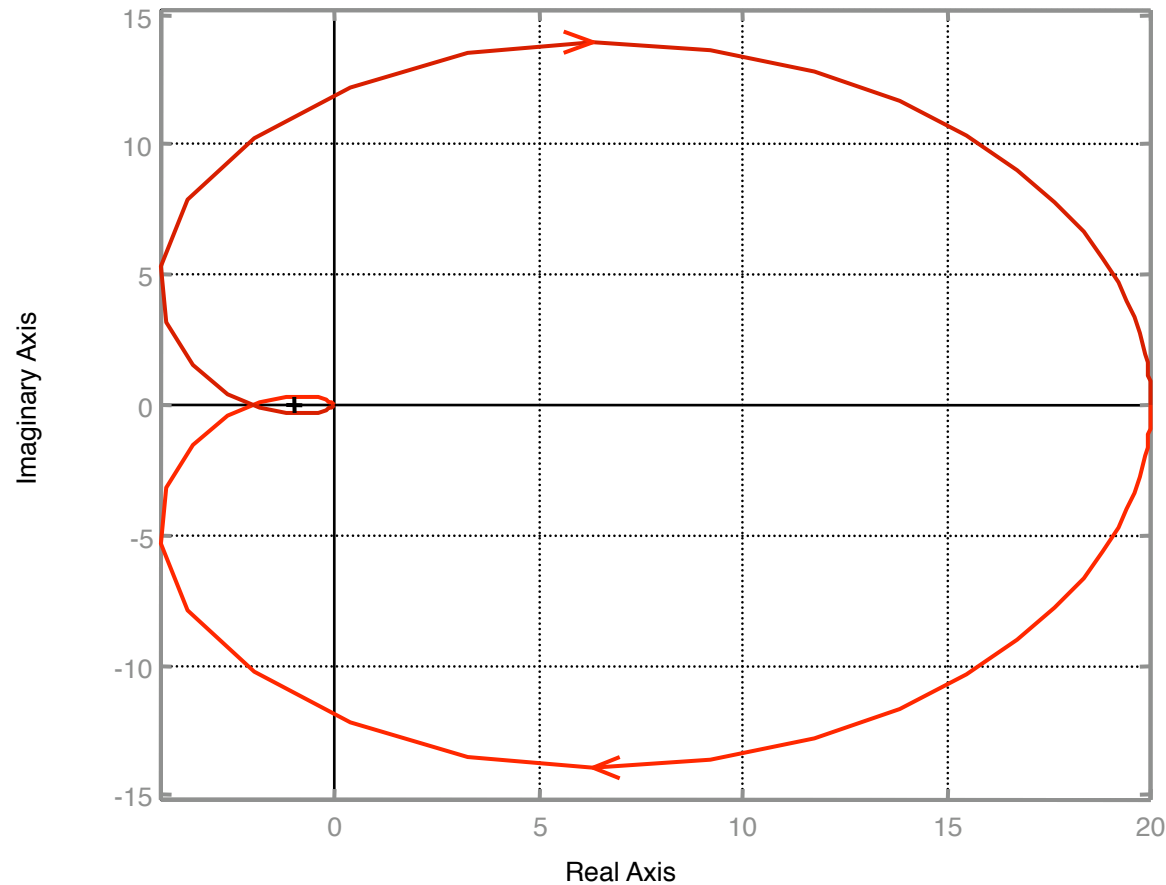


Il criterio di Nyquist

- Intersezione con il semiasse reale negativo: $-K/60$
- $P = 0$
- $N = Z - P$
- per $0 < K < 60$ il diagramma non aggira il punto critico $-1+j0$
 $\Rightarrow N=0 \Rightarrow Z = \# \text{ poli di } T(s) \text{ in } \text{Re}[s] > 0 = 0 - 0 \Rightarrow T(s) \text{ BIBO stabile}$
- per $K=60$ il diagramma di Nyquist passa per il punto critico
 \Rightarrow viola le ipotesi ma implica che $T(s)$ ha poli sull'asse immaginario $\Rightarrow T(s)$ non è BIBO stabile
- per $K > 60$ il diagramma di Nyquist compie due giri attorno al punto critico in senso orario $\Rightarrow N=2 \Rightarrow Z = N+P = 2+0=2$ poli in $\text{Re}[s] > 0 \Rightarrow T(s)$ non è BIBO stabile

Il criterio di Nyquist

Nyquist Diagrams



- Al crescere di $K > 0$, il sistema diventa sempre più “vicino” all’instabilità

Il criterio di Nyquist

- Verifica mediante il criterio di Routh:

$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K}$$

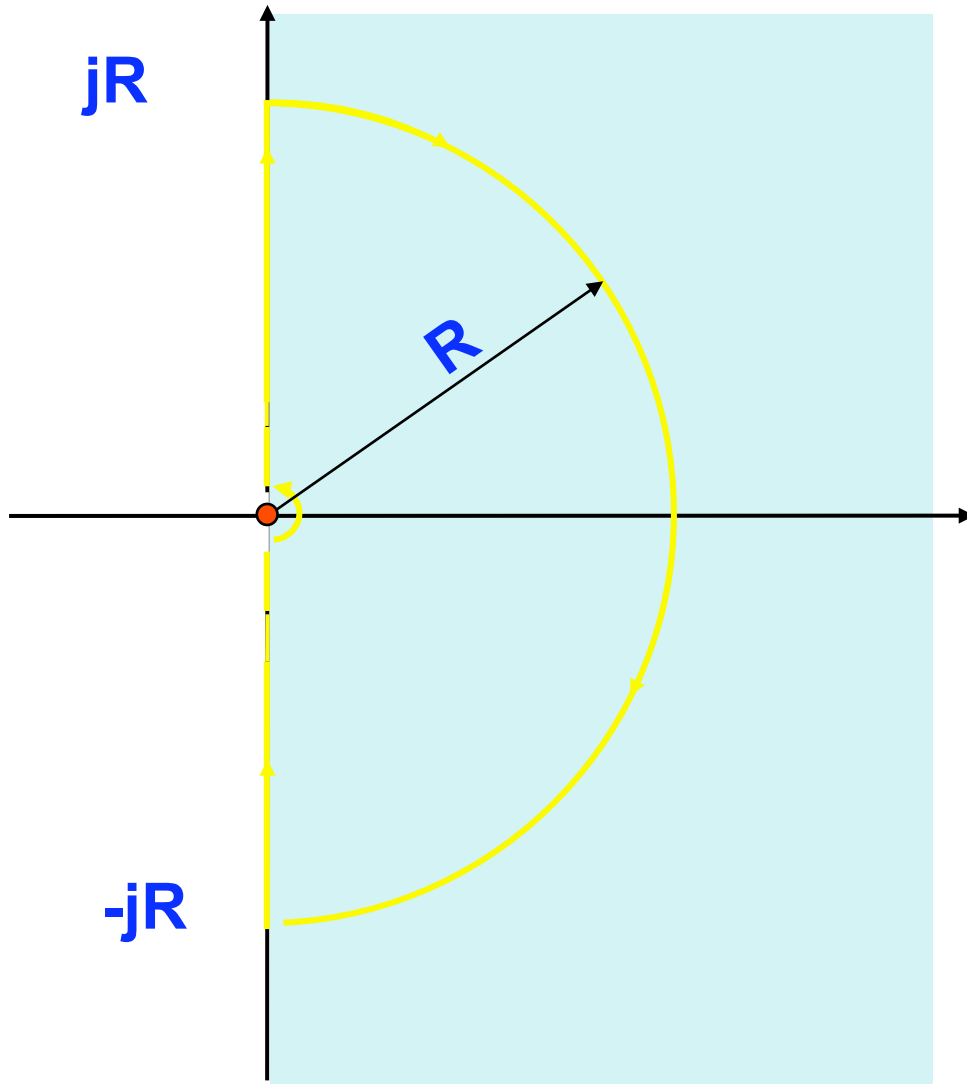
riga 3	1	11
riga 2	6	6+K
riga 1	(60-K)/6	
riga 0	6+K	

- per $0 < K < 60 \Rightarrow n_p = 3 \Rightarrow$ BIBO stabile
- per $K = 60 \Rightarrow$ riga nulla \Rightarrow una radice in $\text{Re}[s] < 0$, due radici immaginarie pure
- per $K > 60 \Rightarrow n_p = 1, n_v = 2 \Rightarrow$ una radice in $\text{Re}[s] < 0$, due in $\text{Re}[s] > 0$

Estensioni del criterio di Nyquist

- “Rilassamento” delle ipotesi del criterio di Nyquist:
 - il diagramma di Nyquist di $G(s)$ passa per il punto critico $\Rightarrow T(s)$ ha poli immaginari \Rightarrow no BIBO stabilita`
 - $G(s)$ con poli sull’asse immaginario (diagrammi di Nyquist “aperti”) \Rightarrow modifica del “percorso di Nyquist”
- Intuitivamente: si “aggirano” i poli sull’asse immaginario e li considera facenti parte di uno dei due semipiani (tipicamente, il semipiano $\text{Re}[s] < 0 \Rightarrow$ considerati poli “stabili” in modo da non alterare P)
- Si ottiene il cosiddetto “percorso uncinato”
- Aggiro i poli immaginari con semicirconferenze di raggio “piccolo” percorse in senso antiorario

Estensioni del criterio di Nyquist



Equazione della
semicirconferenza
di raggio ε
centrata in 0:

$$\varepsilon e^{j\vartheta} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

Estensioni del criterio di Nyquist

- Trasformazione delle semicirconferenze secondo $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s^\mu} \tilde{G}(s), \quad \tilde{G}(0) = \text{cost.} \neq 0$$

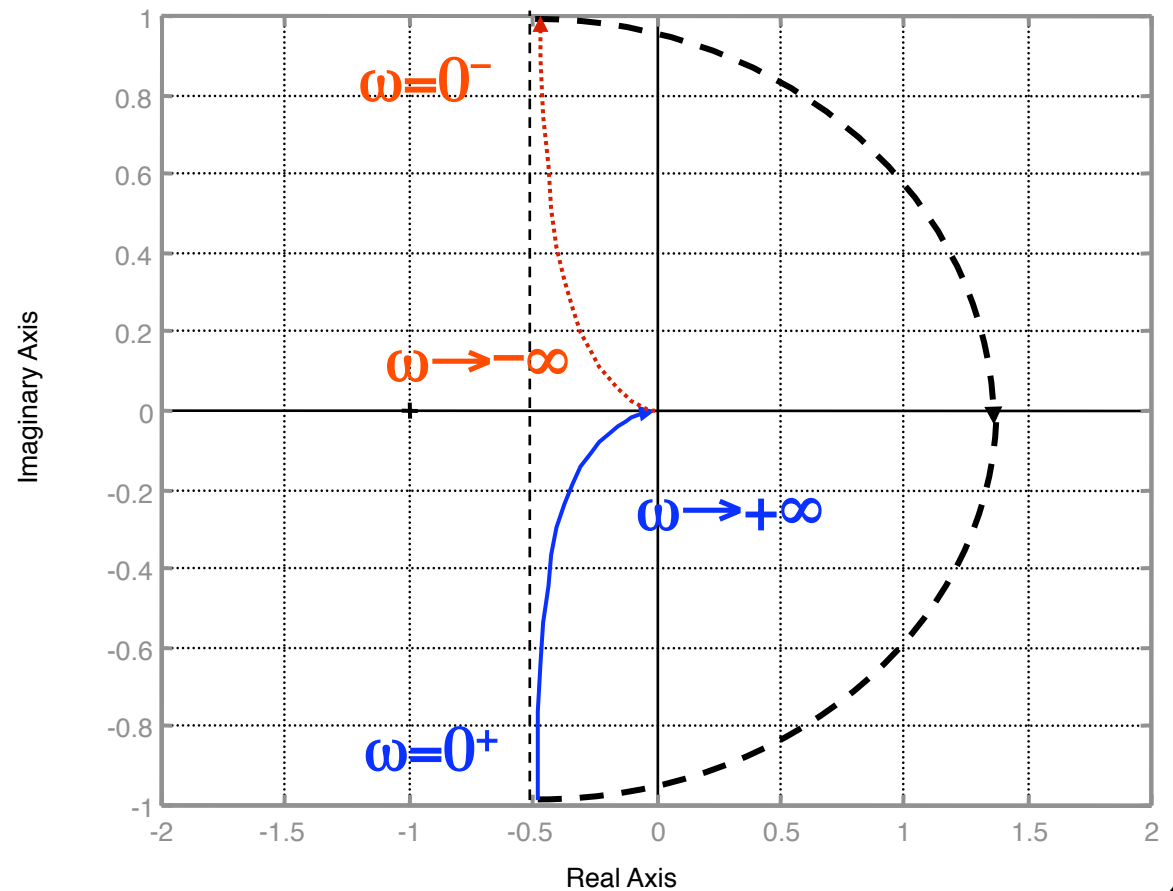
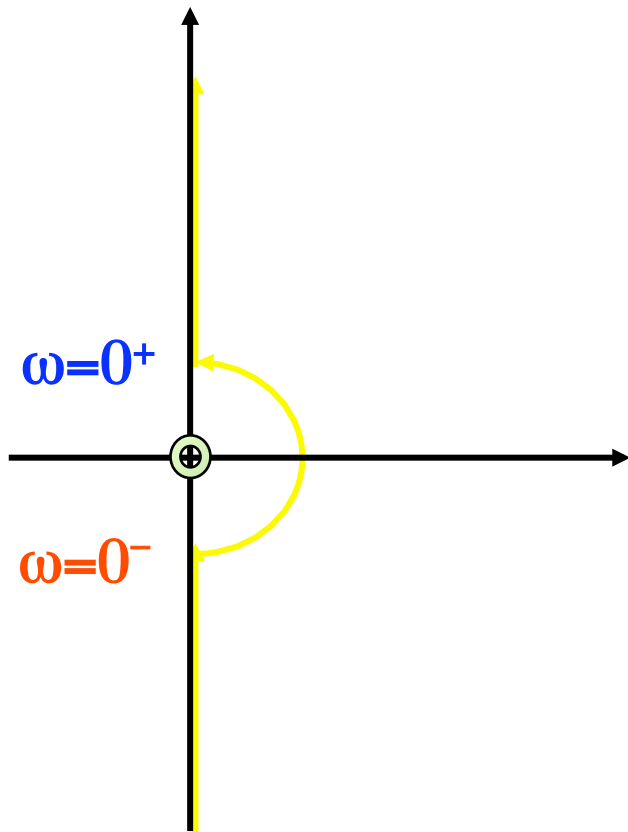
$$G(\varepsilon e^{j\vartheta}) = \frac{1}{(\varepsilon e^{j\vartheta})^\mu} \tilde{G}(\varepsilon e^{j\vartheta})$$

$$\approx \frac{\tilde{G}(0)}{(\varepsilon)^\mu} e^{-j\vartheta\mu} = M e^{-j\vartheta\mu}$$

- Immagine della semicfr. di raggio ε **percorsa in senso antiorario** secondo un angolo di π : curva circolare di raggio tendente a ∞ **percorsa in senso orario** (da $\omega = 0^-$ a $\omega = 0^+$) secondo un angolo di $-\mu\pi$

Esempi

- Esempio: il termine in catena diretta sia $G(s) = \frac{K}{s(s+10)}$

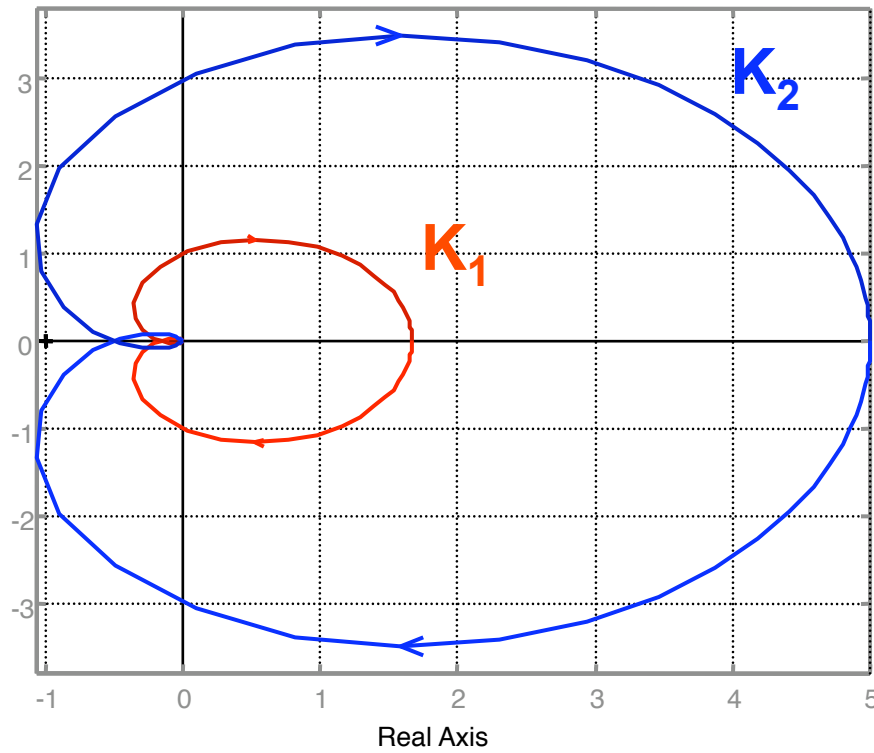


Esempi

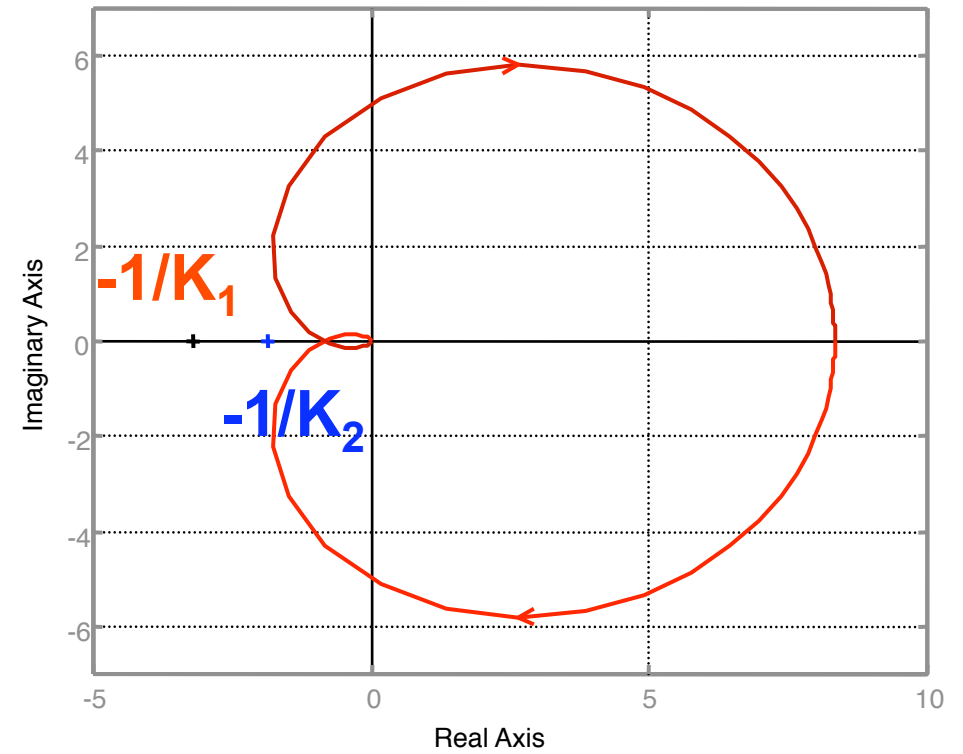
- **Asintoto verticale:**
$$G(j\omega) = \frac{-K}{100 + \omega^2} - j \frac{10K}{\omega(100 + \omega^2)}$$
- per $\omega \rightarrow 0$, $\text{Re}G(j\omega) \rightarrow -K/100$
- Il diagramma completo non circonda mai il punto critico
- $N=0$, $P=0 \Rightarrow Z=P+N=0$
- In effetti, in catena chiusa $T(s)$ ha denominatore $s^2+10s+K$
 \Rightarrow Regola di Cartesio \Rightarrow due radici in $\text{Re}[s]<0$ per ogni $K>0$
- Osservazione: anzich  considerare gli aggiramenti del punto $-1+j0$ al variare di K , si possono considerare gli aggiramenti del punto $-1/K$

Esempi

Nyquist Diagrams

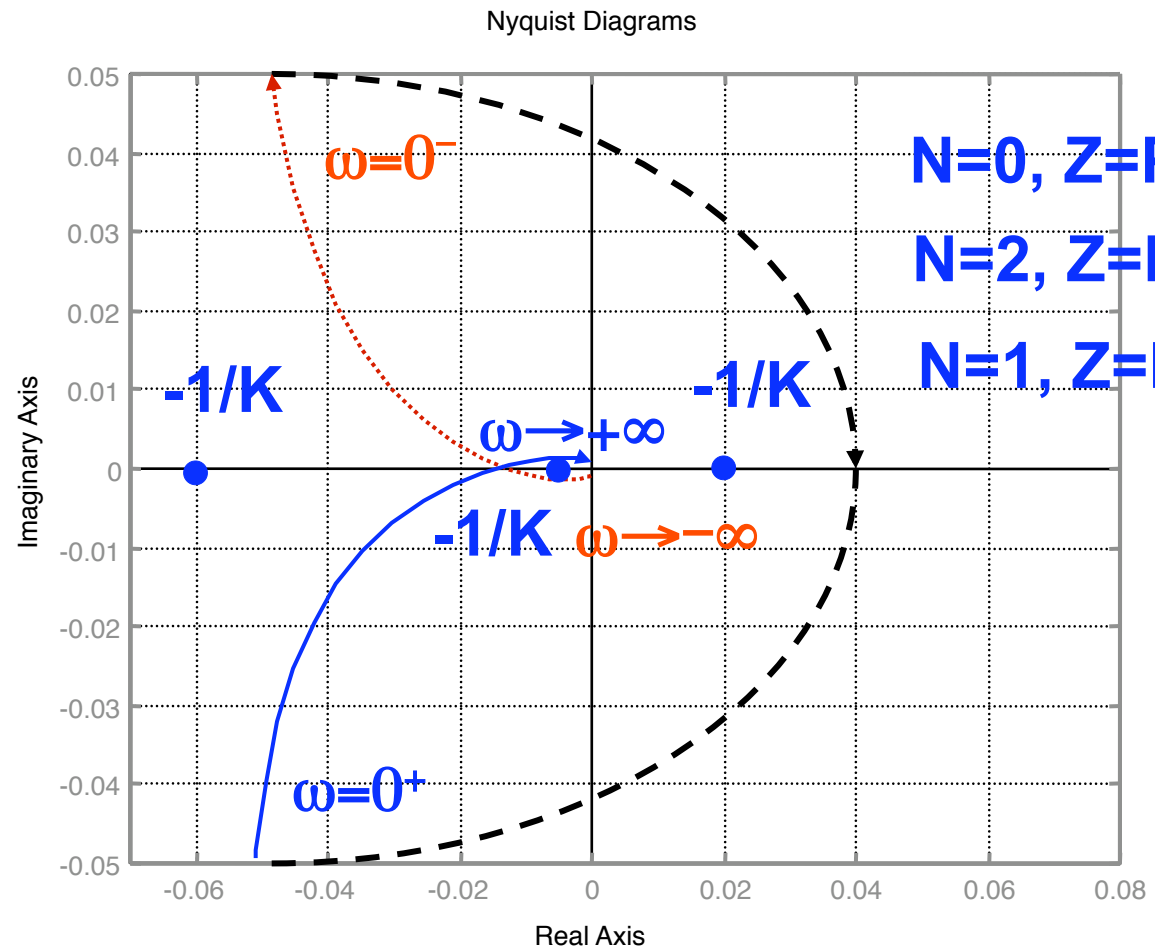
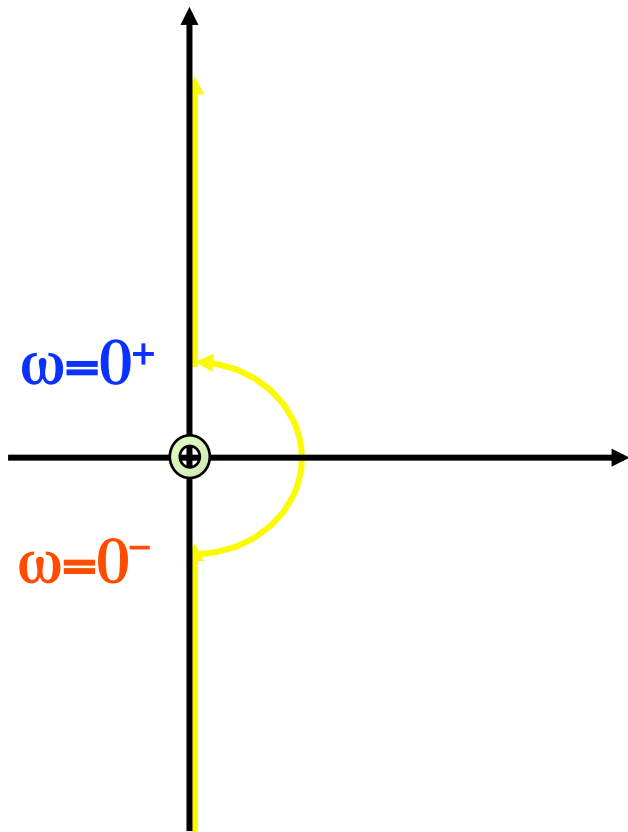


Nyquist Diagrams



Esempi

- Esempio: il termine in catena diretta sia $G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+6)}$



$N=0, Z=P+N=0$

$N=2, Z=P+N=2$

$N=1, Z=P+N=1$

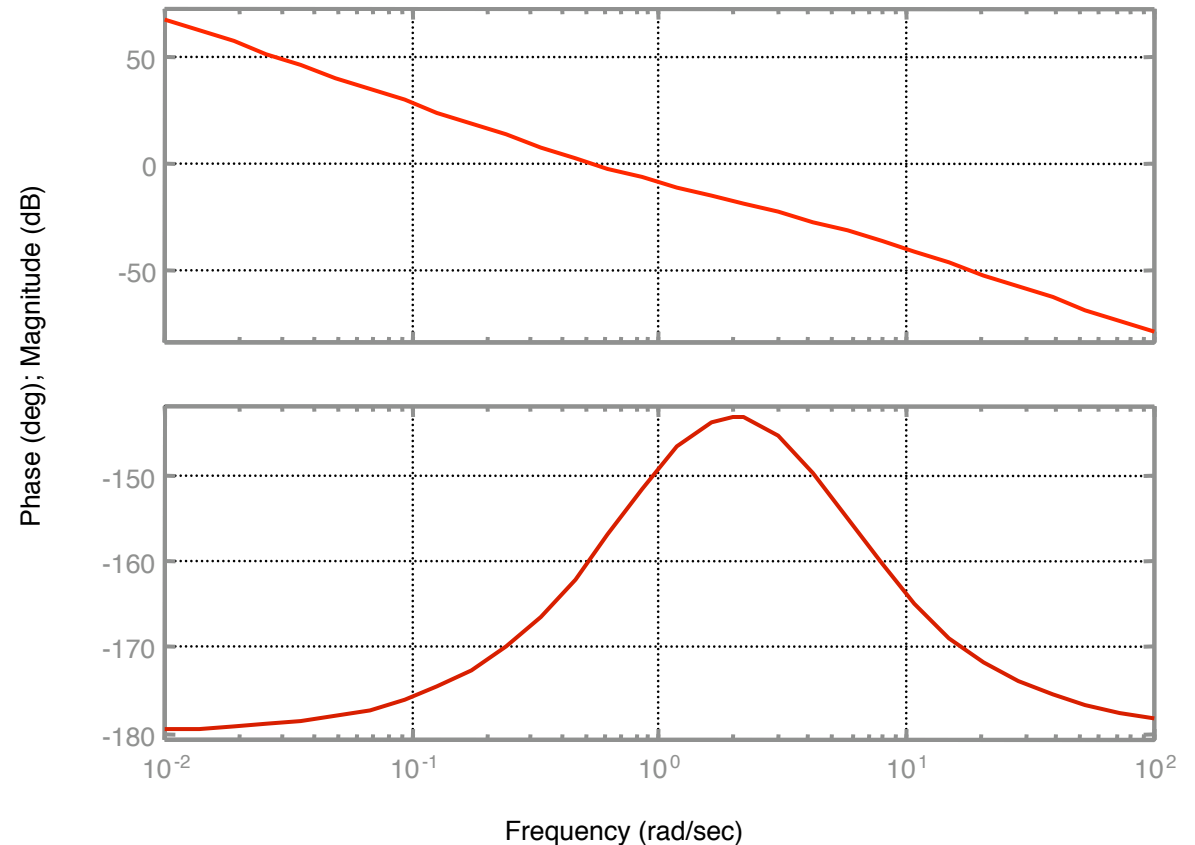
Esempi

- Esempio: il termine in catena diretta sia

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+4)}$$

$$G(j\omega) = K \frac{4 + \omega^2}{-\omega^2(16 + \omega^2)} + jK \frac{3}{-\omega(16 + \omega^2)}$$

Bode Diagrams

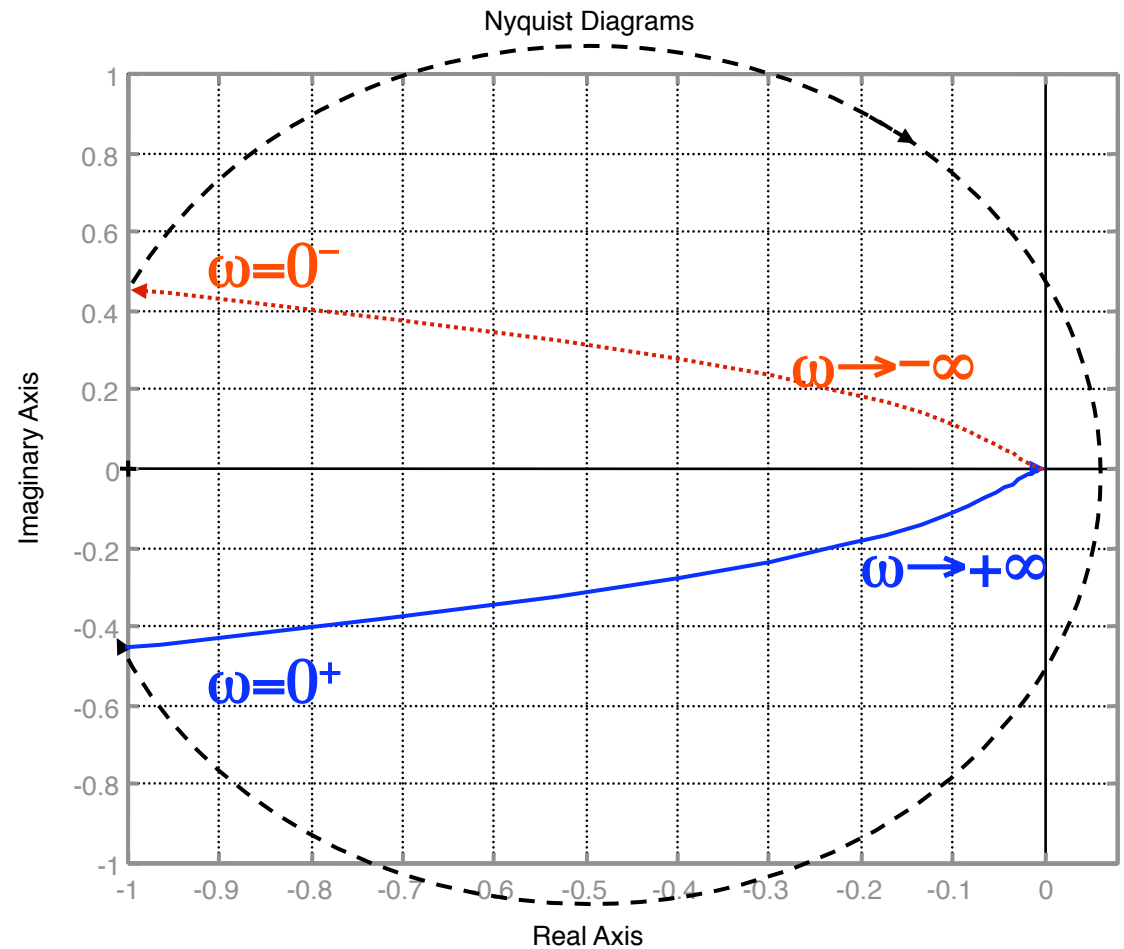


Esempi

**Molteplicità del polo
nell'origine: $\mu=2$**

angolo $-\mu\pi=-2\pi$

$N=0, P=0 \Rightarrow Z = P+N = 0$



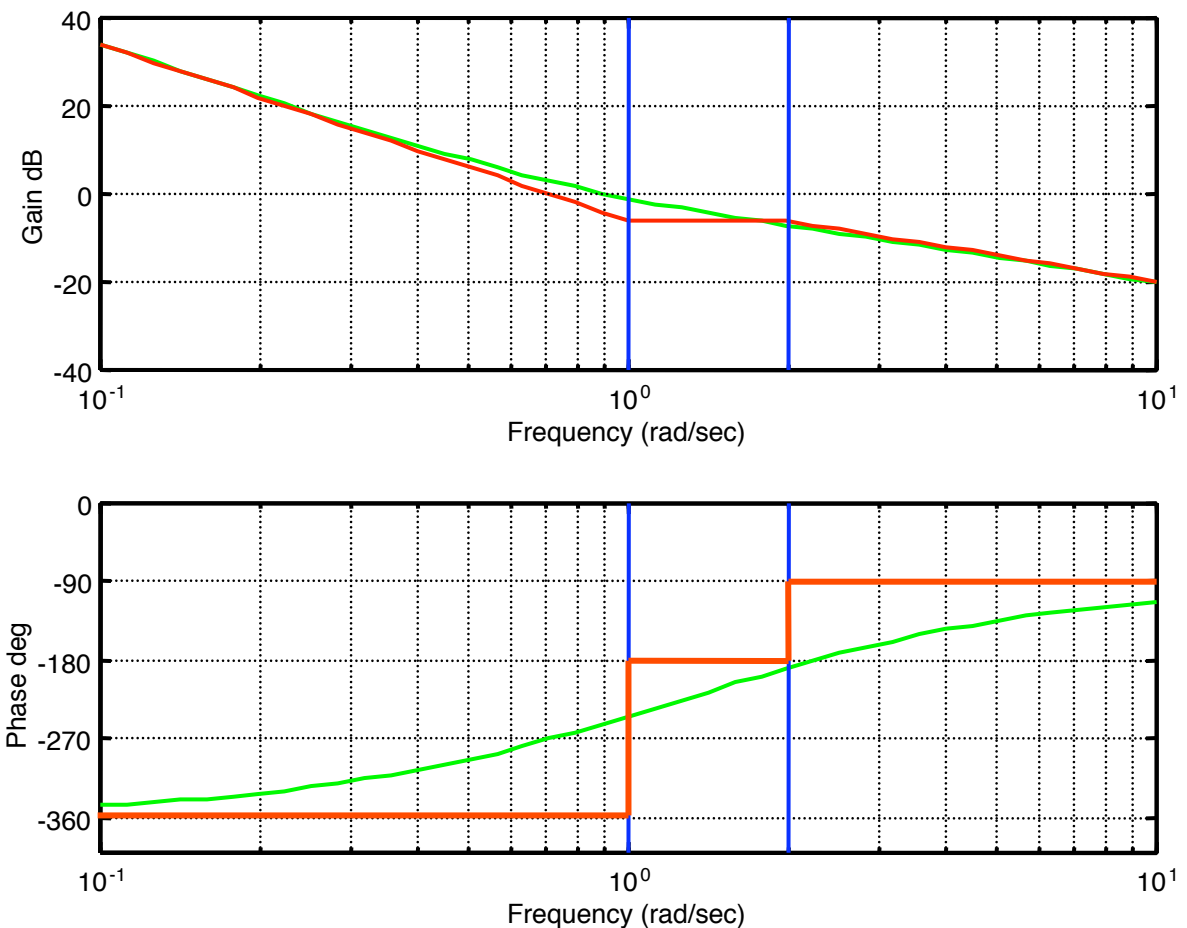
Esempi

- Esempio: il termine in catena diretta sia

$$G(s) = \frac{K(s+1)^2}{s^2(s-2)}$$

$$G(s) = -\frac{1}{2} \frac{K(1+s)^2}{s^2(1-s/2)}$$

$$G(j\omega) = K \frac{2-4\omega^2}{\omega^2(4+\omega^2)} + jK \frac{5-\omega^2}{\omega(4+\omega^2)}$$

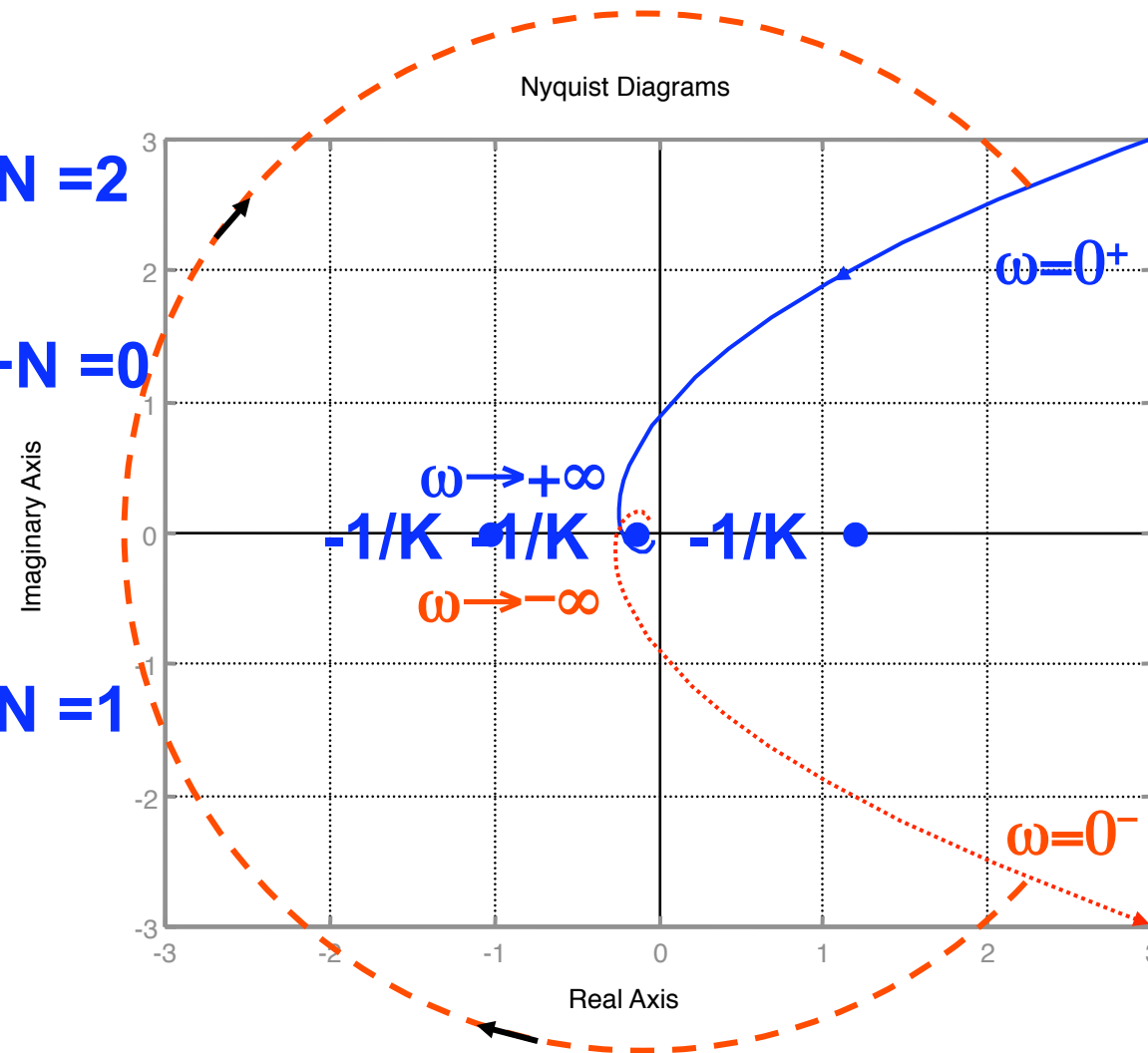


Esempi

$$N=1, P=1 \Rightarrow Z=P+N=2$$

$$N=-1, P=1 \Rightarrow Z=P+N=0$$

$$N=0, P=1 \Rightarrow Z=P+N=1$$



Margini di stabilita`

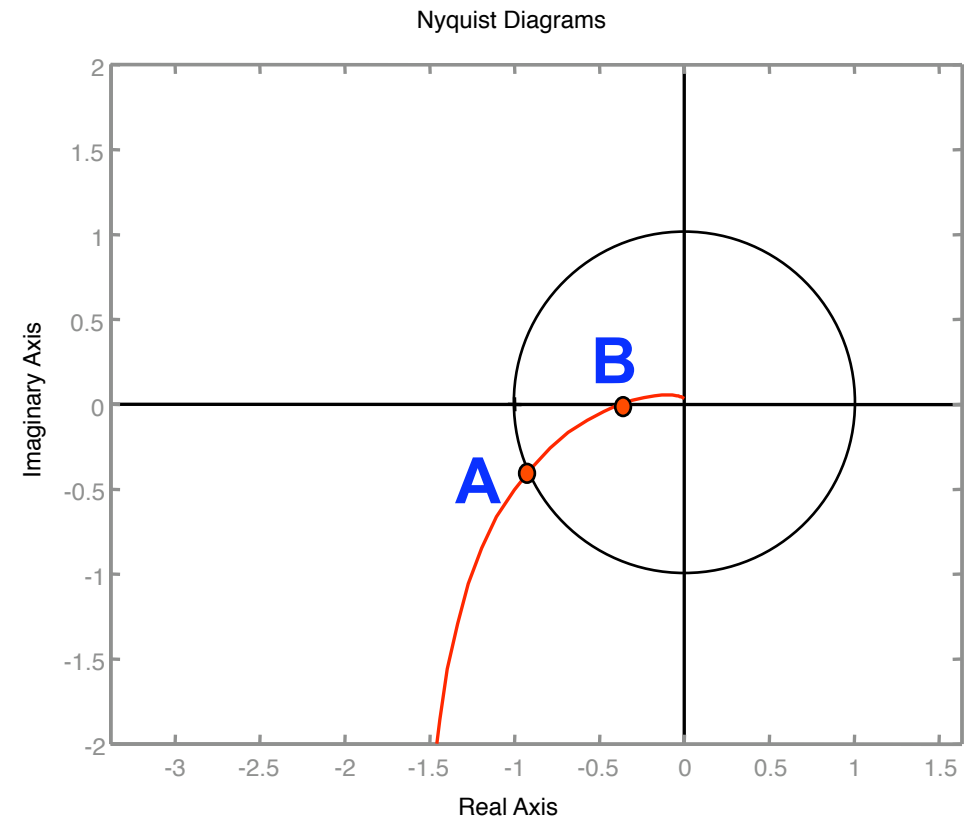
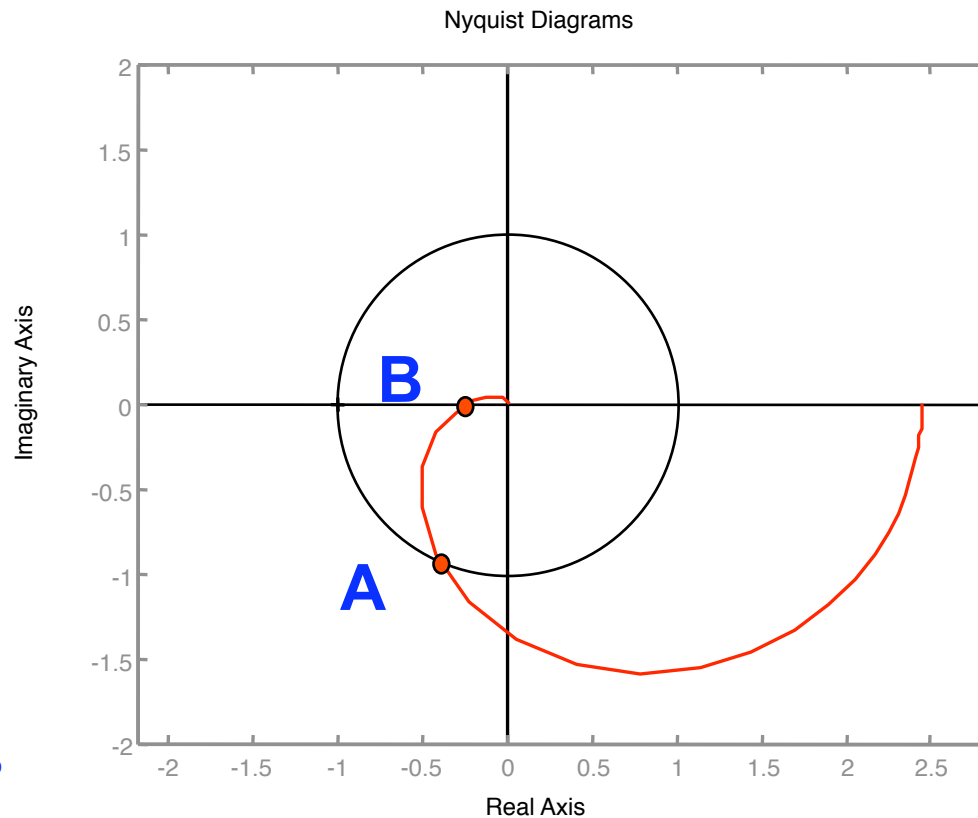


- In molte situazioni pratiche si ha interesse a dare una misura della “prossimita`” di un sistema all’instabilita`
 - incertezza nella descrizione del sistema
 - indicazioni su quanto si puo` “forzare” il sistema con il controllo
 - indicazioni sulla “robustezza” del sistema di controllo nei confronti di fenomeni perturbativi
- Tecniche raffinate per affrontare tali problemi
- Metodi molto semplici per una classe particolare di sistemi, che si incontra pero` frequentemente nella pratica



- Ipotesi sulla f.d.t. $G(s)$ del sistema:
 - $G(s)$ non ha poli in $\text{Re}[s] > 0$
 - $G(s)$ e` strettamente propria
 - Il diagramma di Nyquist (per $\omega \geq 0$) interseca una sola volta la circonferenza unitaria
 - Il diagramma di Nyquist (per $\omega \geq 0$) interseca una sola volta il semiasse reale negativo
 - $|G(j\omega)|$ e` una funzione monotona decrescente di ω

Margini di stabilita`

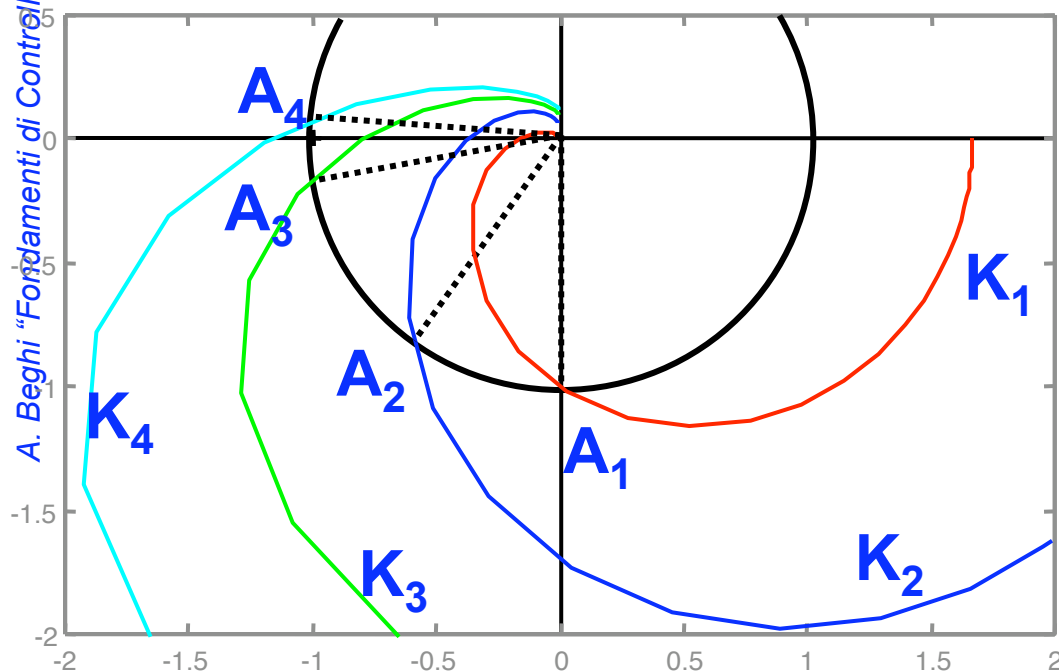


- ω_A : **pulsazione di attraversamento (della cfr. unitaria)**
- ω_B : **pulsazione di attraversamento del semiasse reale negativo**

Margine di fase

- Criterio ridotto di Nyquist: il sistema a catena chiusa è stabile se e solo se il punto A si trova al disotto del semiasse delle ascisse ossia se e solo se

$$\text{Arg}[G(j\omega_A)] > -\pi$$



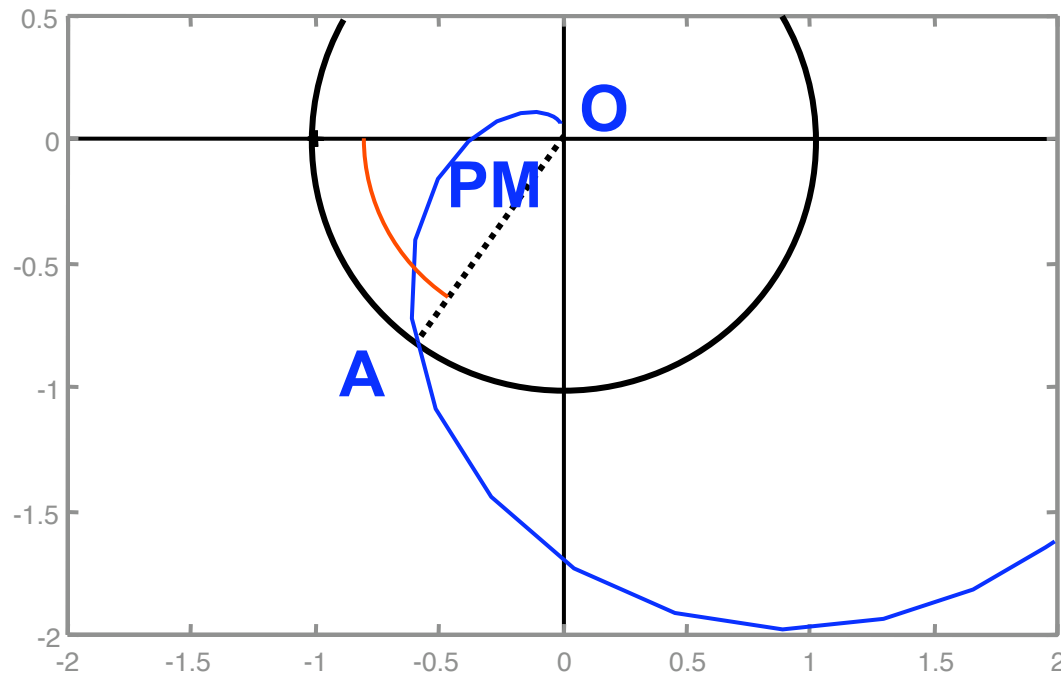
$$K_1 < K_2 < K_3 < K_4$$

$$\text{Arg}G(j\omega_{A4}) < \text{Arg}G(j\omega_{A3}) < \text{Arg}G(j\omega_{A2}) < \text{Arg}G(j\omega_{A1})$$

Margine di fase

- Margine di fase

$$PM = \text{Arg}[G(j\omega_A)] - (-\pi) = \text{Arg}[G(j\omega_A)] + \pi$$



Stabilita' \Leftrightarrow

$$\text{Arg}[G(j\omega_A)] > -\pi$$

$$\Rightarrow \text{PM} > 0$$

Margine di fase

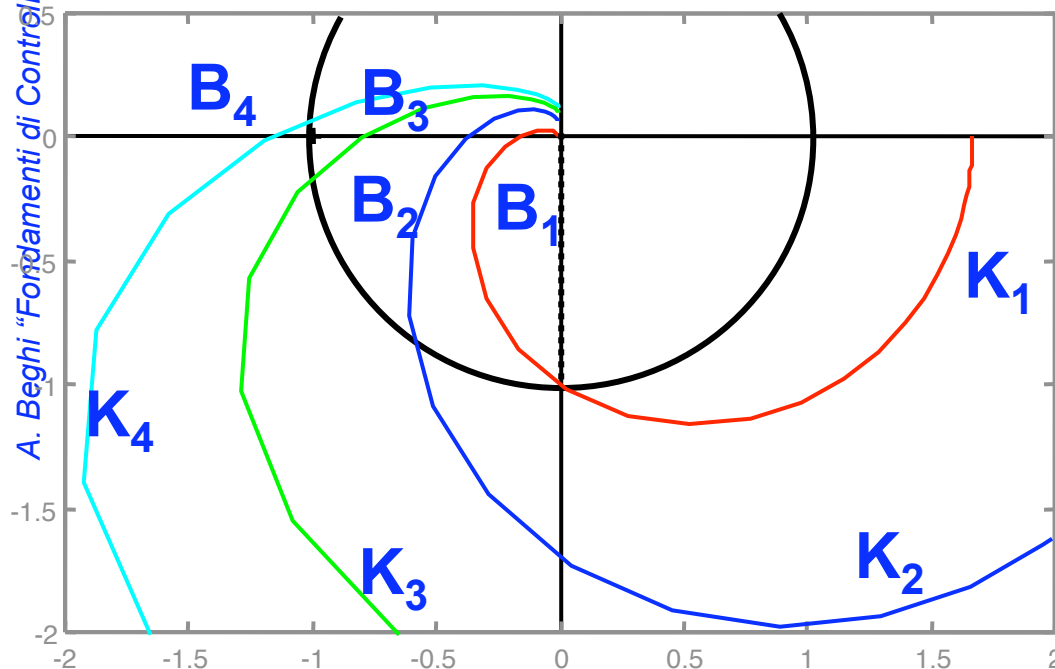


- $PM > 0 \Rightarrow$ stabilità
- $PM < 0 \Rightarrow$ instabilità
- $PM = 0 \Rightarrow$ poli puramente immaginari nella f.d.t. a catena chiusa
- Tanto più PM (positivo) è ampio, tanto più “sicura” è la stabilità del sistema a catena chiusa
- “**Robustezza** della stabilità”: non viene persa per “piccole” variazioni del diagramma di Nyquist di $G(s)$

Margine di ampiezza

- Criterio ridotto di Nyquist: il sistema a catena chiusa è stabile se e solo se il punto B si trova a destra del punto critico $-1+j0$ ossia se e solo se

$$|G(j\omega_B)| < 1$$



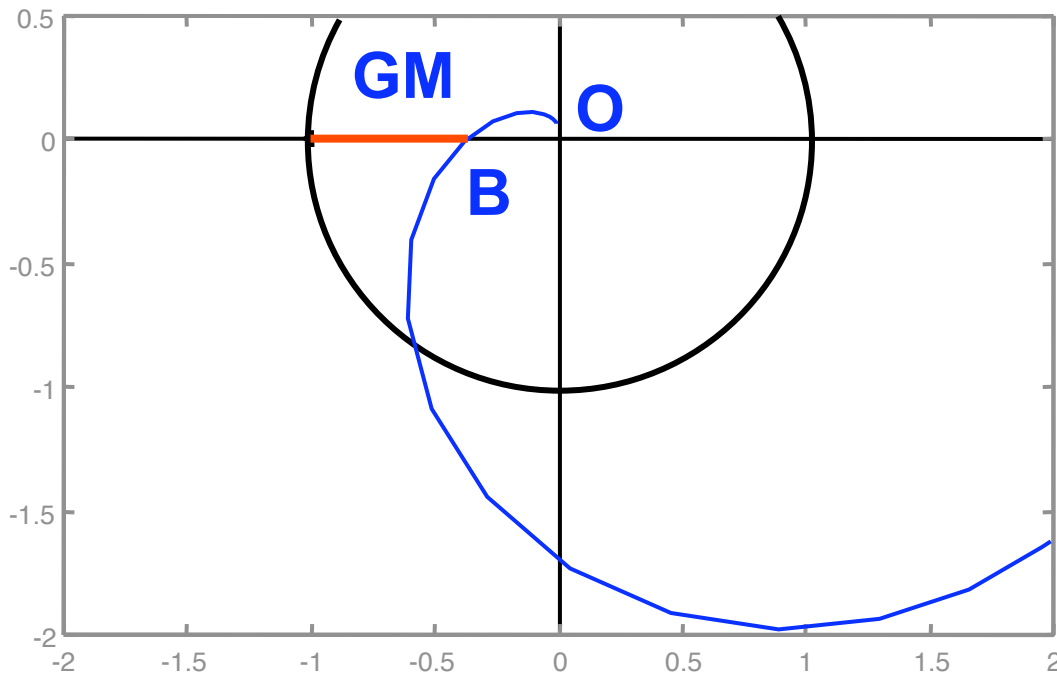
$$K_1 < K_2 < K_3 < K_4$$

$$|G(j\omega_{B1})| < |G(j\omega_{B2})| < |G(j\omega_{B3})| < |G(j\omega_{B4})|$$

Margine di ampiezza

- Margine di ampiezza (in dB)

$$GM = [1 - |G(j\omega_B)|]_{dB} = 20\log \frac{1}{|G(j\omega_B)|} = -|G(j\omega_B)|_{dB}$$



Stabilita' \Leftrightarrow

$$|G(j\omega_B)| < 1$$

$$\Rightarrow GM > 0$$

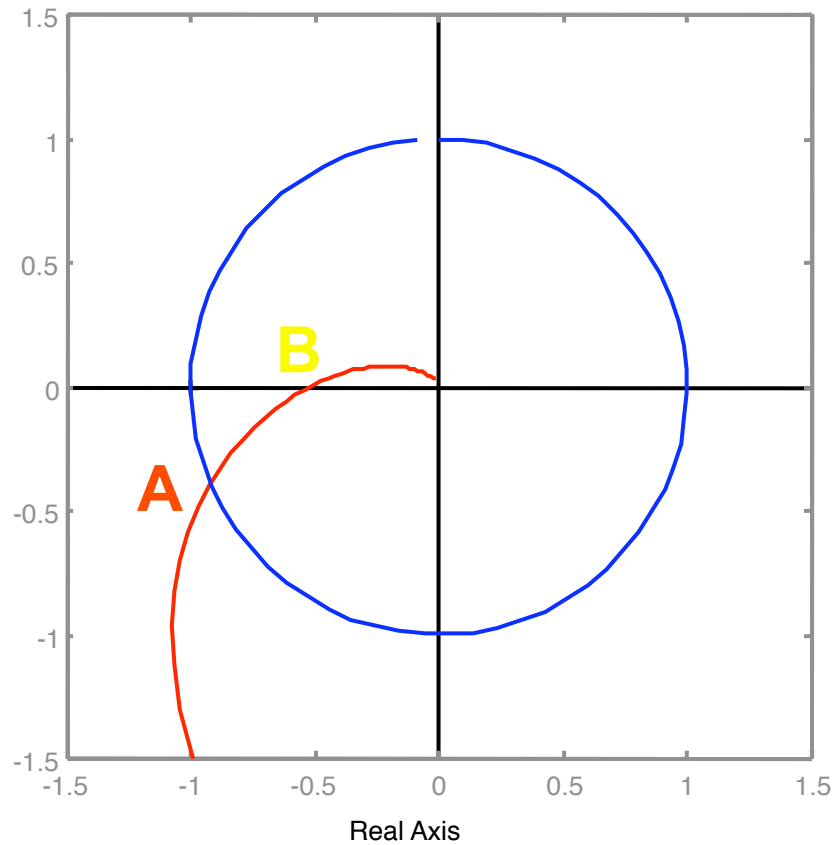
Margine di ampiezza



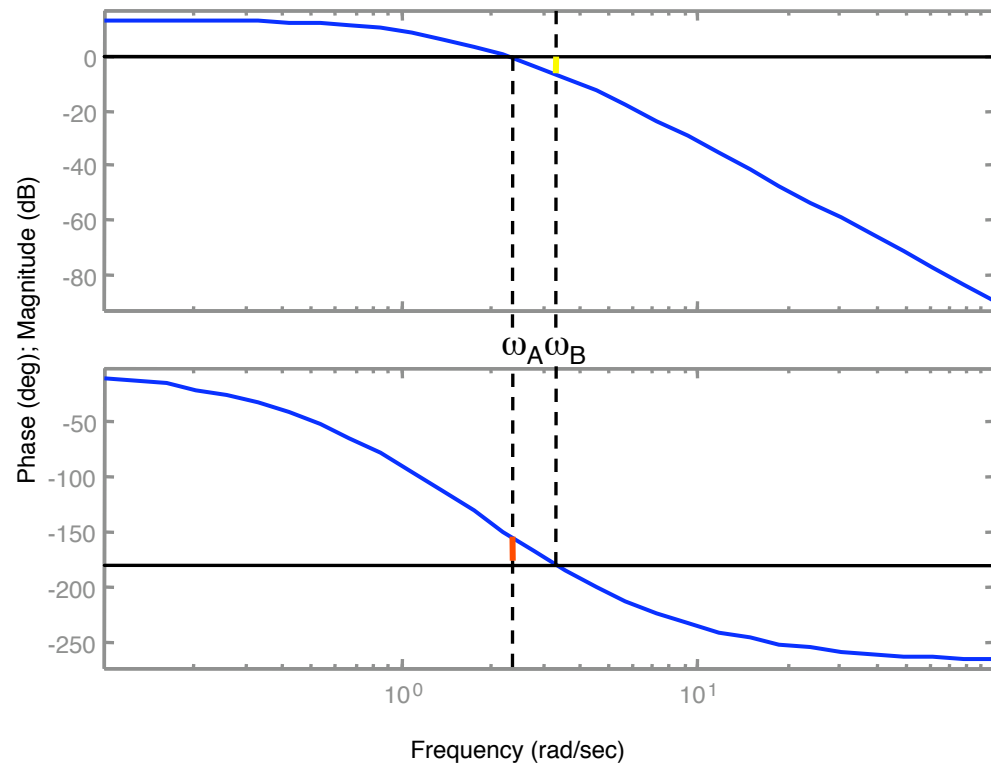
- $GM > 0 \Rightarrow$ stabilita`
- $GM < 0 \Rightarrow$ instabilita`
- $GM = 0 \Rightarrow$ poli puramente immaginari nella f.d.t. a catena chiusa
- Tanto piu` GM (positivo) e` ampio, tanto piu` “sicura” e` la stabilita` del sistema a catena chiusa
- I margini di fase e ampiezza si determinano agevolmente anche sui diagrammi di Bode

Margini di stabilit  dai diagrammi di Bode

Nyquist Diagrams

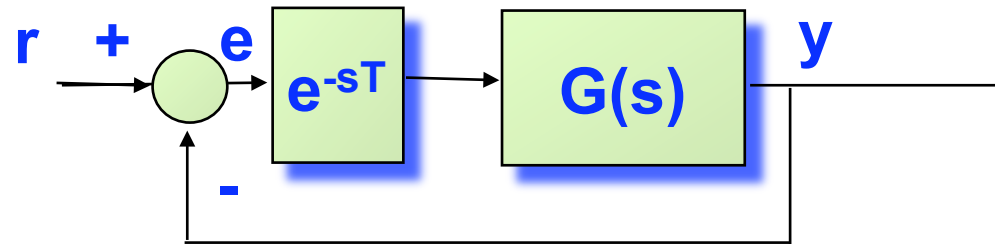


$G_m (m_a)=6.0206 \text{ dB}$ (at $(\omega_B)=3.3166 \text{ rad/sec}$),
 $P_m (m_\varphi)=25.426 \text{ deg.}$ (at $(\omega_A)=2.3486 \text{ rad/sec}$)



Interpretazione dei margini di stabilità

- Effetto della presenza di un ritardo finito in catena diretta



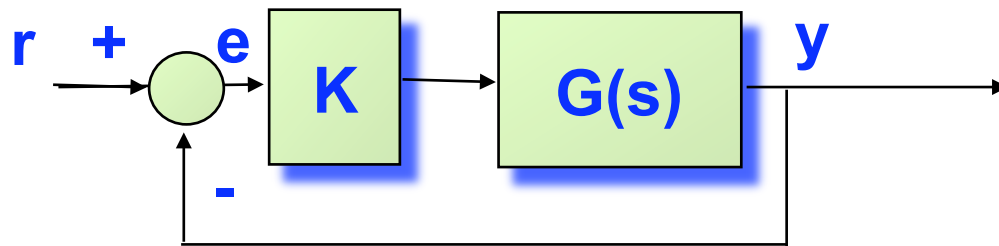
$$\left| e^{-j\omega T} G(j\omega) \right| = |G(j\omega)|$$

$$\text{Arg}\left[e^{-j\omega T} G(j\omega) \right] = \text{Arg}[G(j\omega)] - \omega T$$

- Diagrammi di Bode:
 - non viene modificato il diagramma dei moduli
 - il diagramma delle fasi si modifica per l'aggiunta del termine $-\omega T$

Interpretazione dei margini di stabilita`

- La pulsazione di attraversamento ω_A rimane invariata
- Il margine di fase diventa $PM' = PM - \omega_A T$
- Il sistema e` stabile per $PM' > 0$ ossia $0 \leq T < \frac{PM}{\omega_A}$
- Il margine di fase da` un'indicazione di quanta perturbazione, in termini di ritardo, si puo` "tollerare" nel sistema senza compromettere la stabilita`
- Effetto della presenza di un guadagno in catena diretta



$$|KG(j\omega)| = |G(j\omega)| + |K|$$

$$\text{Arg}[KG(j\omega)] = \text{Arg}[G(j\omega)]$$

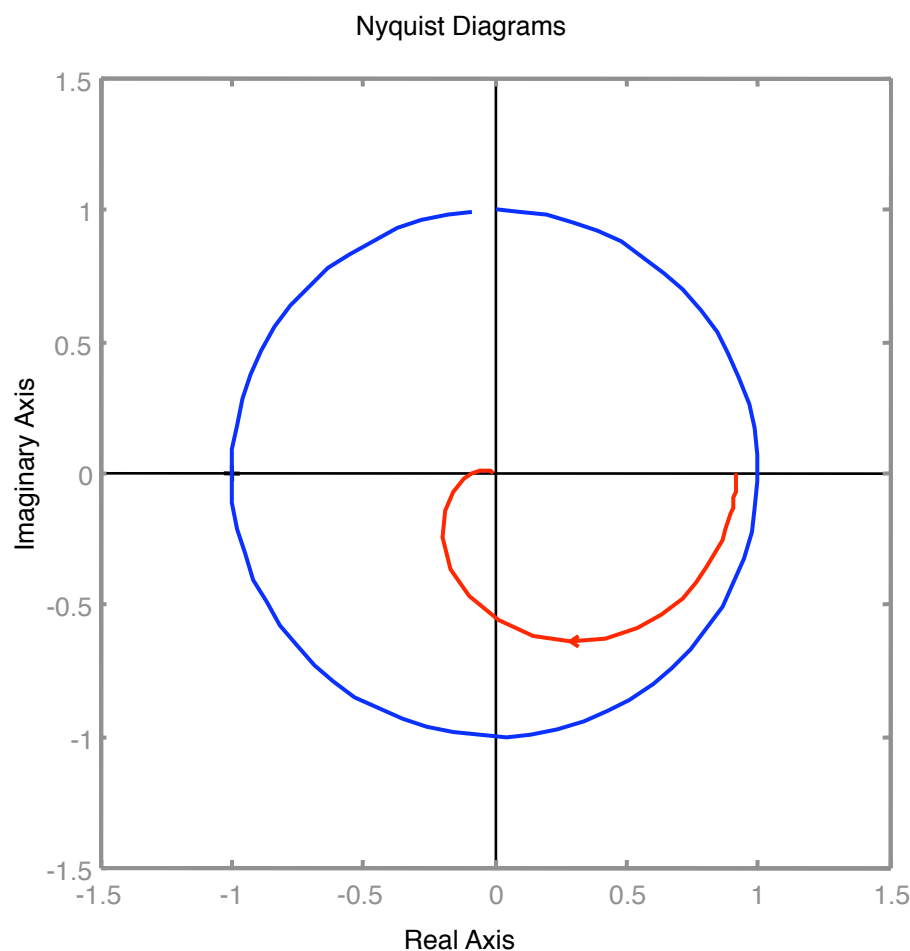
Interpretazione dei margini di stabilità



- **Diagrammi di Bode:**
 - il diagramma delle fasi rimane inalterato
 - il diagramma dei moduli trasla della quantità $|K|_{dB}$
- La pulsazione ω_B rimane invariata
- Il margine di ampiezza diventa $GM' = GM - |K|_{dB}$
- Il sistema è stabile per $GM' > 0$ ossia $|K|_{dB} < GM$
- Il margine di ampiezza dà un'indicazione di quanto si possa perturbare il guadagno del sistema mantenendo la stabilità

Interpretazione dei margini di stabilit 

- **Situazioni particolari:**



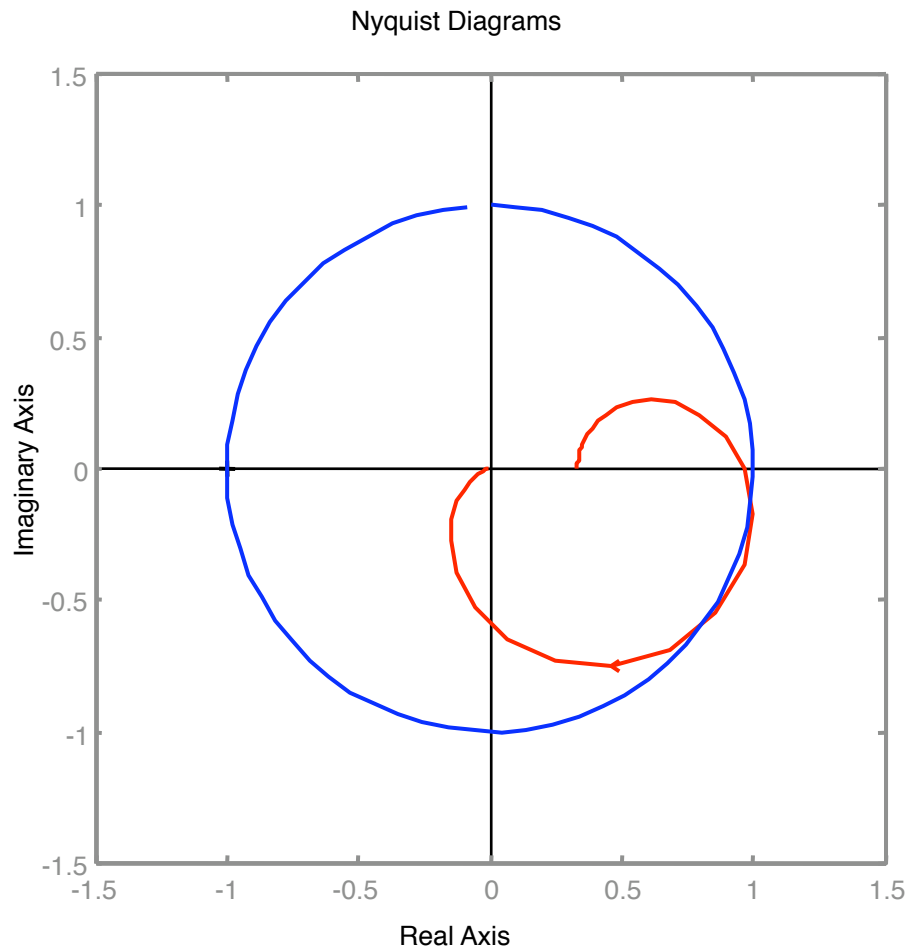
Il diagramma di Nyquist
  interamente contenuto
nella cfr. unitaria

Il diagramma di Nyquist
non interseca la cfr. unitaria
 $\Rightarrow \sim \exists \omega_A$

Un arbitrario ritardo, a
qualsiasi pulsazione, altera
la fase ma non il modulo \Rightarrow
il diag. rimane nella cfr.
unitaria \Rightarrow **PM**= ∞

Interpretazione dei margini di stabilit 

- Situazioni particolari:



Il diagramma di Nyquist
non interseca il semiasse
reale negativo

$\Rightarrow \sim \exists \omega_B$

Un arbitrario aumento del
guadagno altera la scala ma
non la forma del diag. \Rightarrow il
diag. continua a non
circondare il punto critico \Rightarrow

GM= ∞