Esercitazione 6: Tracciamento dei diagrammi di Bode

16 aprile 2012 (2h)

Alessandro Vittorio Papadopoulos

Fondamenti di Automatica (per Aerospaziali)
Prof. Paolo Rocco - Prof. Luca Bascetta

Indice

Esercizio 1

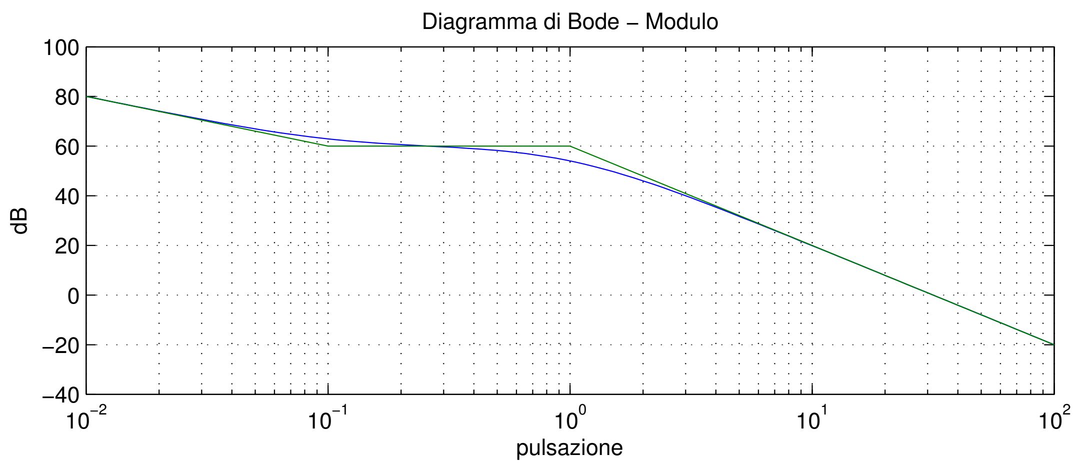
Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase del sistema con funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{100}{s} \cdot \frac{1 + 10s}{(1 + s)^2}$$

Possiamo scomporre $|G(\jmath\omega)|_{\mathrm{dB}}$ nella somma di 4 termini:

$$|G(\jmath\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20 \log 100 + 20 \log |1 + 10\jmath\omega| - 20 \log |\jmath\omega| - 20 \log |1 + \jmath\omega|^2$$

Possiamo fare i diagrammi dei singoli addendi e sommare, ottenendo un diagramma di Bode del modulo come rappresentato in figura:



Come fatto per il modulo, scomponiamo anche la fase in somma di addendi elementari:

$$\begin{aligned}\measuredangle G(\jmath\omega) =& \measuredangle 100 + \measuredangle(1 + 10\jmath\omega) - \measuredangle(\jmath\omega) - 2\measuredangle(1 + \jmath\omega) \\ =& 0 + \operatorname{atan}(10\omega) - \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{atan}(\omega)\end{aligned}$$

Possiamo fare i diagrammi dei singoli addendi e sommare, ottenendo un diagramma di Bode della fase come rappresentato in figura:

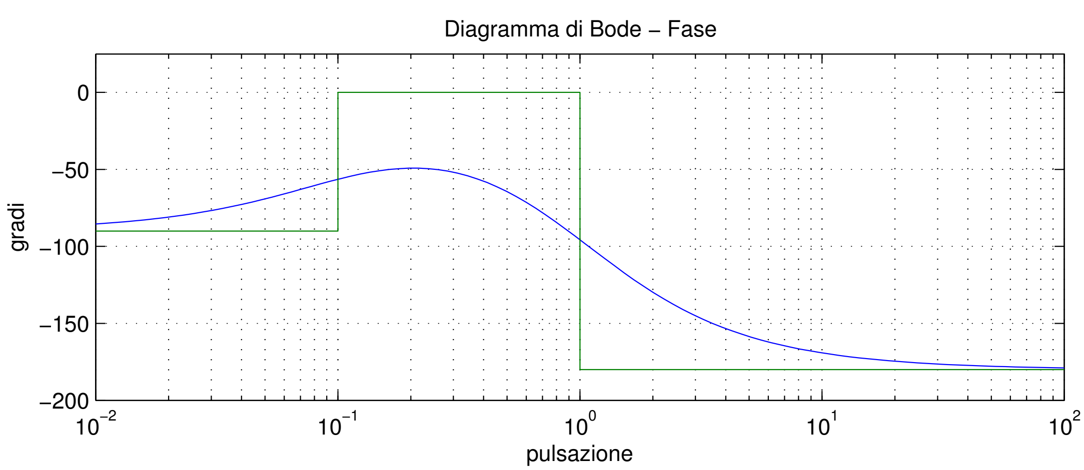


Diagramma del modulo

- A **bassa frequenza** il diagramma giace sulla retta a pendenza $-g$, passante per il punto ($\omega = 1$, $|G(\jmath 1)|_{\mathrm{dB}} = \mu_{\mathrm{dB}}$).
- Ad ogni pulsazione corrispondente ad un polo (zero) **reale** la pendenza diminuisce (aumenta) di una unità.
- Ad ogni pulsazione corrispondente alla pulsazione naturale di una coppia di poli (zeri) **complessi coniugati**, la pendenza diminuisce (aumenta) di due unità.
- La **pendenza finale** è pari al numero degli zeri meno il numero dei poli.
- Nel caso vi siano poli (zeri) coincidenti, il decremento (incremento) della pendenza va moltiplicato per la molteplicità.

Diagramma della fase

- A **bassa frequenza** il diagramma giace sulla retta orizzontale di ordinata $\measuredangle\mu - g \cdot 90°$.
- Ad ogni pulsazione corrispondente a:
  - **zero reale** nel **semipiano sinistro**
  - **polo reale** nel **semipiano destro**

  il diagramma ha un salto **positivo** di 90°.
- Ad ogni pulsazione corrispondente a:
  - **zero reale** nel **semipiano destro**
  - **polo reale** nel **semipiano sinistro**

  il diagramma ha un salto **negativo** di 90°.
- Ad ogni pulsazione corrispondente a:
  - una coppia di **zeri complessi coniugati** nel **semipiano sinistro**
  - una coppia di **poli complessi coniugati** nel **semipiano destro**

  il diagramma ha un salto **positivo** di 180°.
- Ad ogni pulsazione corrispondente a:
  - una coppia di **zeri complessi coniugati** nel **semipiano destro**
  - una coppia di **poli complessi coniugati** nel **semipiano sinistro**

  il diagramma ha un salto **negativo** di 180°.

Riassumendo possiamo scrivere una tabella:

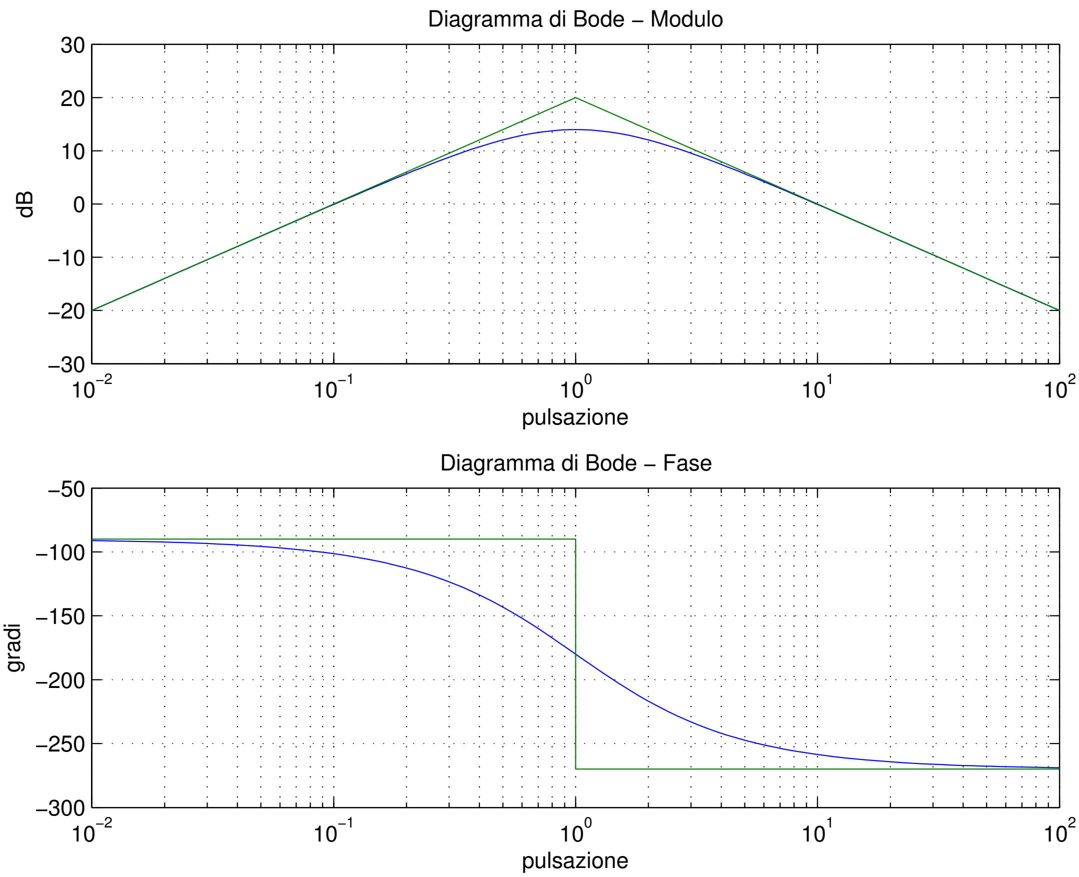
	$\lvert\cdot\rvert$	$\measuredangle$
ZSS	$\nearrow$	$\nearrow$
ZSD	$\nearrow$	$\searrow$
PSS	$\searrow$	$\searrow$
PSD	$\searrow$	$\nearrow$

Esercizio 2

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = -10\frac{s}{(1+s)^2}$$

Dato che il tipo della funzione di trasferimento è $g = -1$, il diagramma di Bode del modulo parte con pendenza $-g = 1$ e quello della fase parte a $\measuredangle(-10) - g90° = -180° + 90° = -90°$.
In $\omega = 1$ passa per $20\log(10) = 20\,\text{dB}$. Inoltre ci sono due poli coincidenti in $\omega = 1$ che abbassano la pendenza di 2.



Esercizio 3

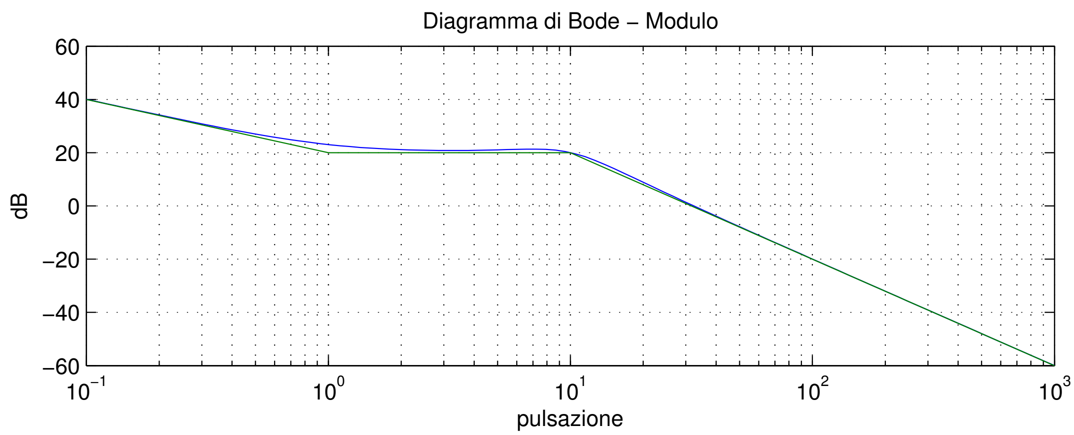
Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase del sistema con funzione di trasferimento

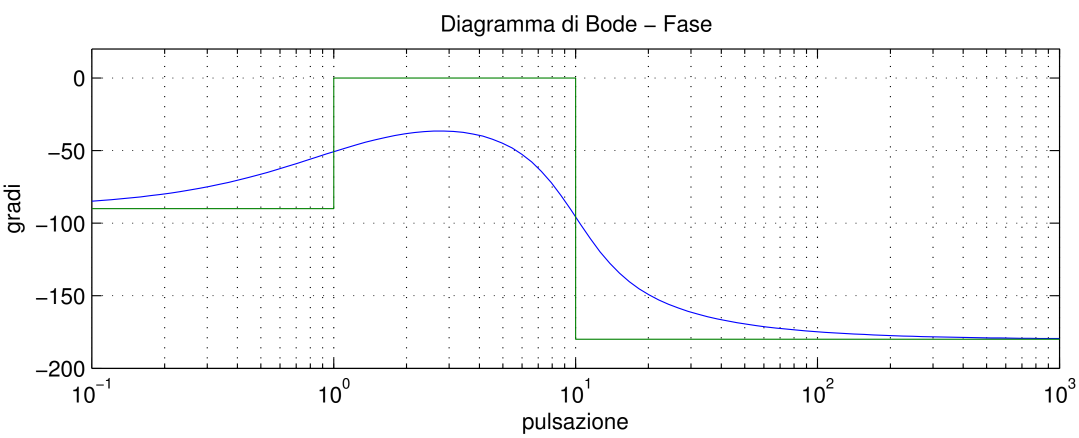
$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1+s}{1+0.1s+\dfrac{s^2}{100}}$$

Dalla funzione di trasferimento si ricava facilmente che:

$$\omega_n = 10, \quad \xi = 0.5, \qquad \mu = 10, \quad g = 1$$

Il tipo di $G(s)$ è $g = 1$, quindi il diagramma di Bode del modulo parte con pendenza -1 e quello della fase parte a $-90°$.
C'è uno zero sinistro per $\omega = 1$ e due poli complessi coniugati nel semipiano sinistro in $\omega = \omega_n = 10$.



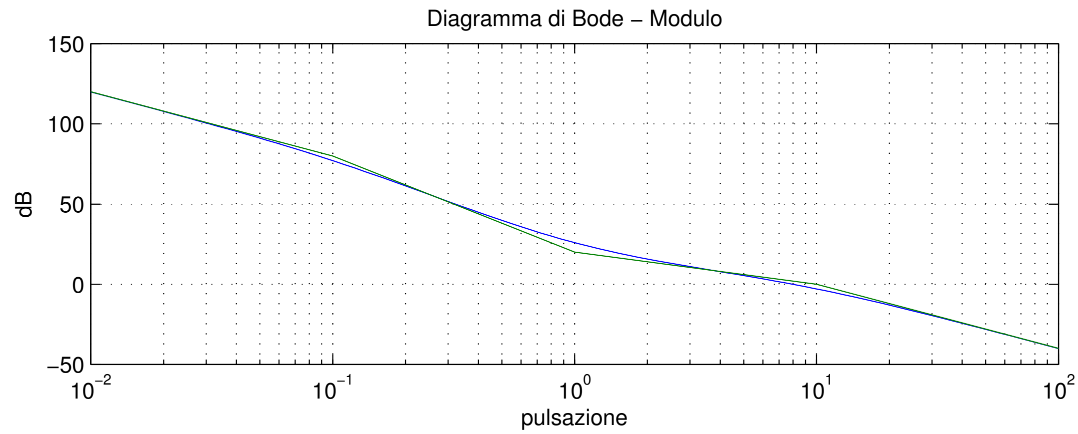


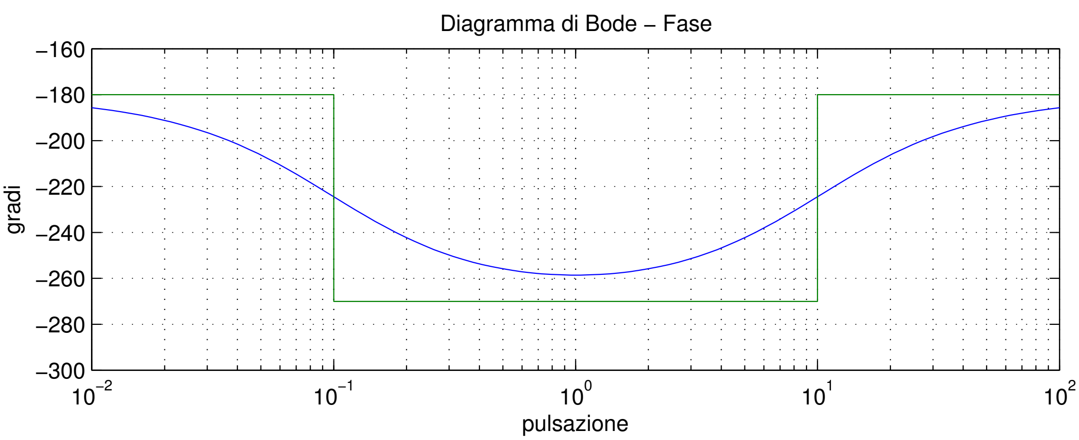
Esercizio 4

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1000}{s^2} \frac{(1+s)(1-s)}{(1+10s)(10-s)}$$

Il tipo di $G(s)$ è $g = 2$, per cui il diagramma di Bode del modulo parte con pendenza -2 e quello della fase a $-180°$. Il guadagno statico è $\mu = s^g G(0) = 100$, che in dB è $20\log(100) = 40\,\mathrm{dB}$, quindi per $\omega = 1$ il diagramma di Bode del modulo dovrebbe passare per μ_{dB}.
Ci sono due zeri (uno sinistro e uno destro) in $\omega = 1$, un polo in $s = -0.1$ e uno in $s = 10$.





Lo zero nel semipiano sinistro e lo zero nel semipiano destro danno contributi di fase che si elidono.

Esercizio 5

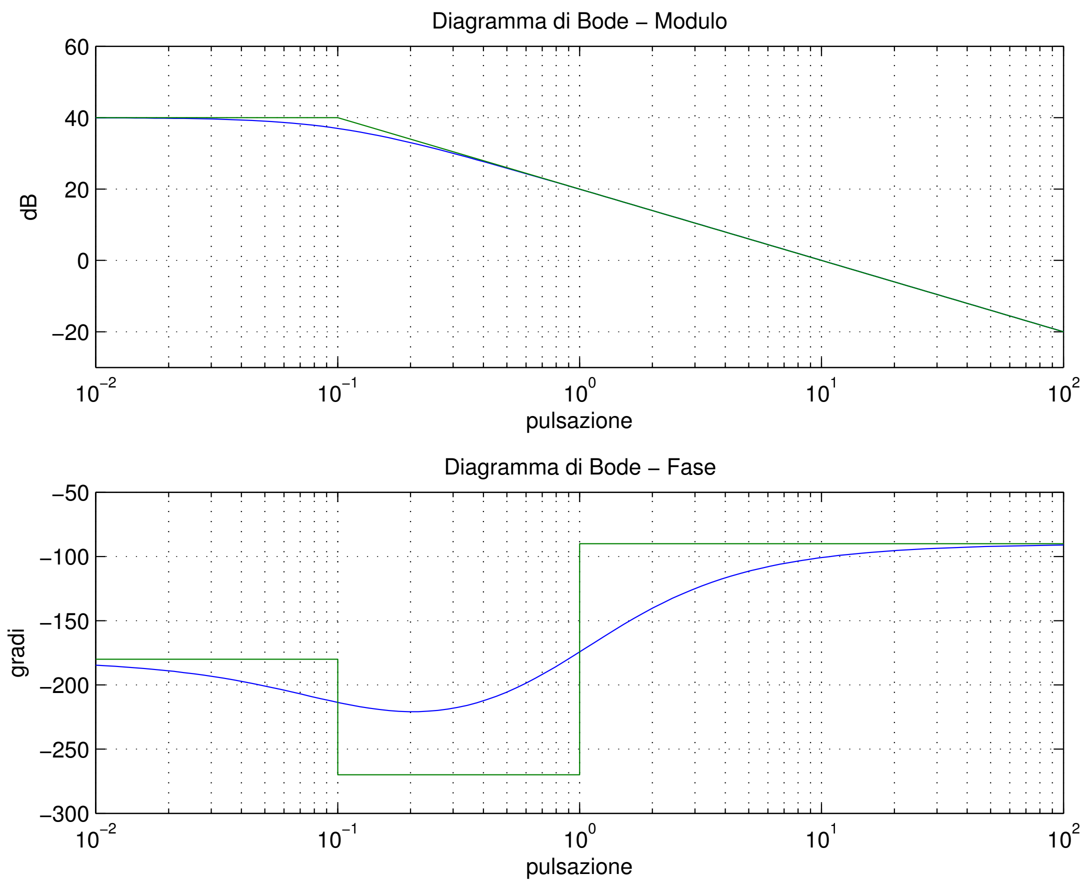
Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = 100\frac{1+s}{(1+10s)(s-1)}$$

Per tracciare i diagrammi di Bode, conviene riscrivere la funzione di trasferimento come:

$$G(s) = -100\frac{1+s}{(1+10s)(1-s)}$$

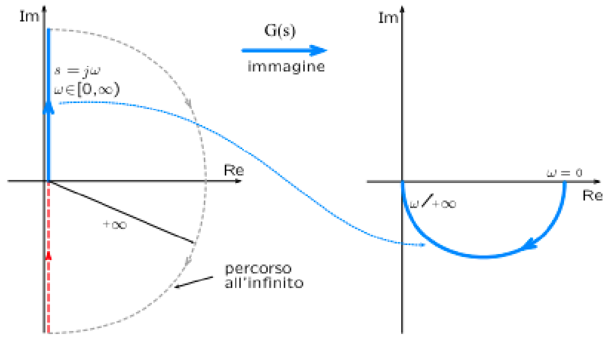
Così si vede che il guadagno statico, in realtà, è negativo, dando un contributo di fase di $-180°$.



Il polo nel semipiano destro e lo zero nel semipiano sinistro danno contributi che si elidono nel diagramma di Bode del modulo, ma si vede il contributo sul diagramma di Bode della fase.

Diagramma polare

È il diagramma della funzione $G(\jmath\omega)$, $\omega \geq 0$, nel piano complesso, ipotizzando che $\jmath\omega$ non sia un polo.
Può essere interpretato, come l'immagine attraverso $G(s)$, del semiasse immaginario positivo.



Il diagramma polare può essere determinato:

- per costruzione grafica
- a partire dai diagrammi di Bode (solo diagramma qualitativo)

Esercizio 6

Data la funzione di trasferimento

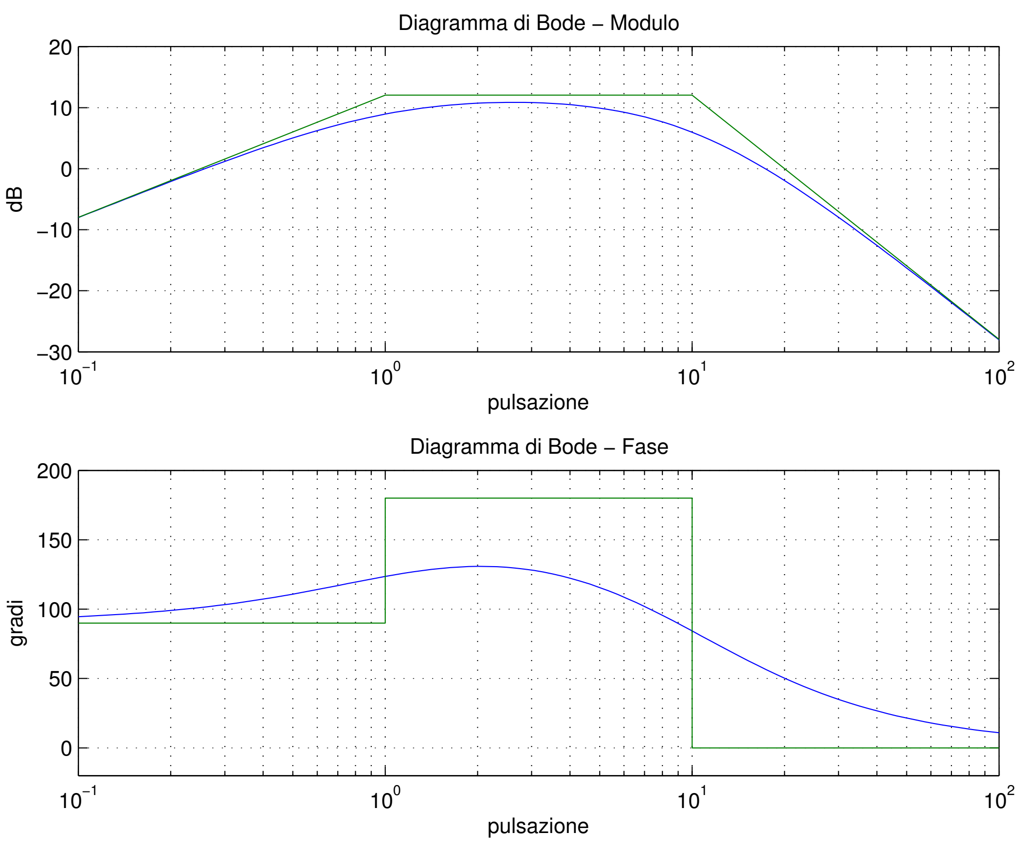
$$G(s) = \frac{4s}{(1-s)(1+0.1s)^2}$$

1. Tracciare i diagrammi di Bode;
2. Tracciare il diagramma polare a partire dai diagrammi di Bode ottenuti.

1

Tracciare i diagrammi di Bode

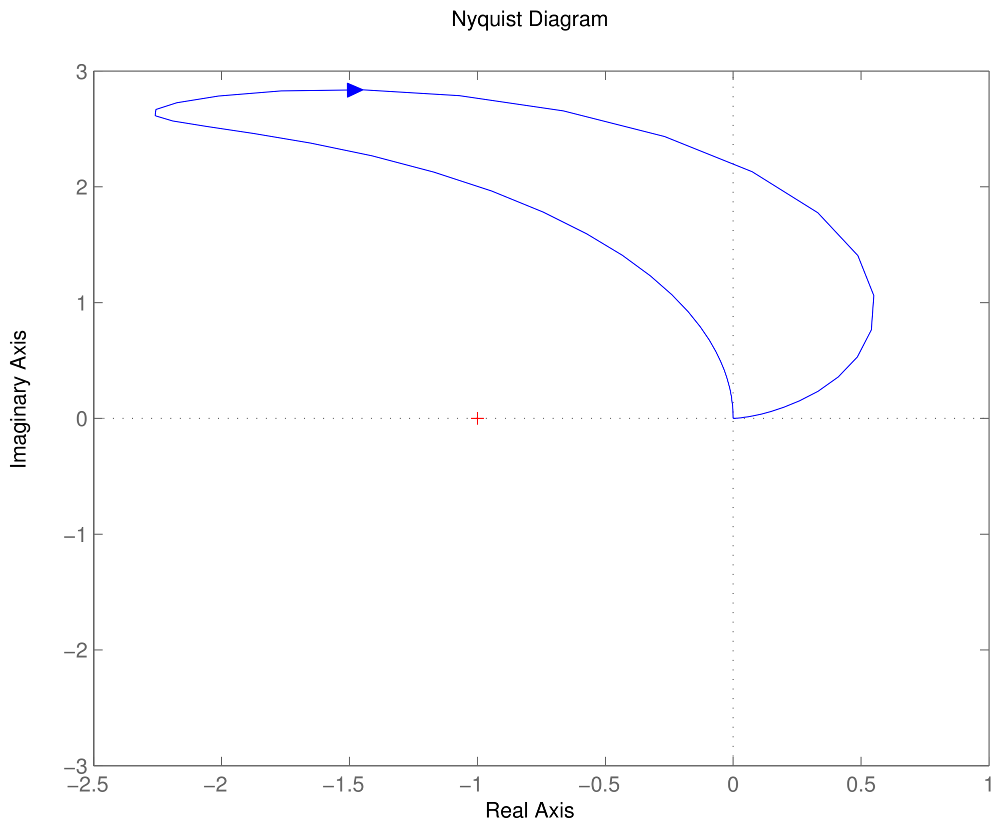
Il guadagno statico è $\mu = 4$ che equivale a $\mu_{\text{dB}} = 12\,\text{dB}$. Il tipo di $G(s)$ è $g = -1$. C'è un polo nel semipiano destro in $\omega = 1$ e due poli sinistri coincidenti in $\omega = 10$. 1



2

Tracciare il diagramma polare a partire dai diagrammi di Bode ottenuti

Possiamo notare che $G(\jmath\omega)$ per $\omega = 0$ ha un modulo nullo e una fase che tende a $\pi/2$. All'aumentare di ω il modulo tende a crescere e la fase ad aumentare fino a $\omega = 1$, da cui il modulo smette di crescere fino a $\omega = 10$, da cui comincia a decrescere fino a 0 per $\omega \to \infty$ con una fase che tende a 0. 2



Esercizio 7

Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

1. Tracciare i diagrammi di Bode per $\omega_n = 1$ e $\xi = \{0.1, 0.9\}$;
2. Tracciare i diagramma polare a partire dai diagrammi di Bode ottenuti.

1

Tracciare i diagrammi di Bode

I poli complessi coniugati si comportano come se ci fossero 2 poli reali alla pulsazione $\omega = \omega_n$. In questo caso, quindi, il diagramma di Bode del modulo è costante fino a $\omega_n = 1$. Nel diagramma di Bode asintotico, tuttavia, non si vede l'effetto dello smorzamento che si presenta solo nei diagrammi di Bode reali. In particolare, per $\xi \to 0$ si formano dei picchi di risonanza nell'intorno di ω_n ($\omega_r = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$). 1

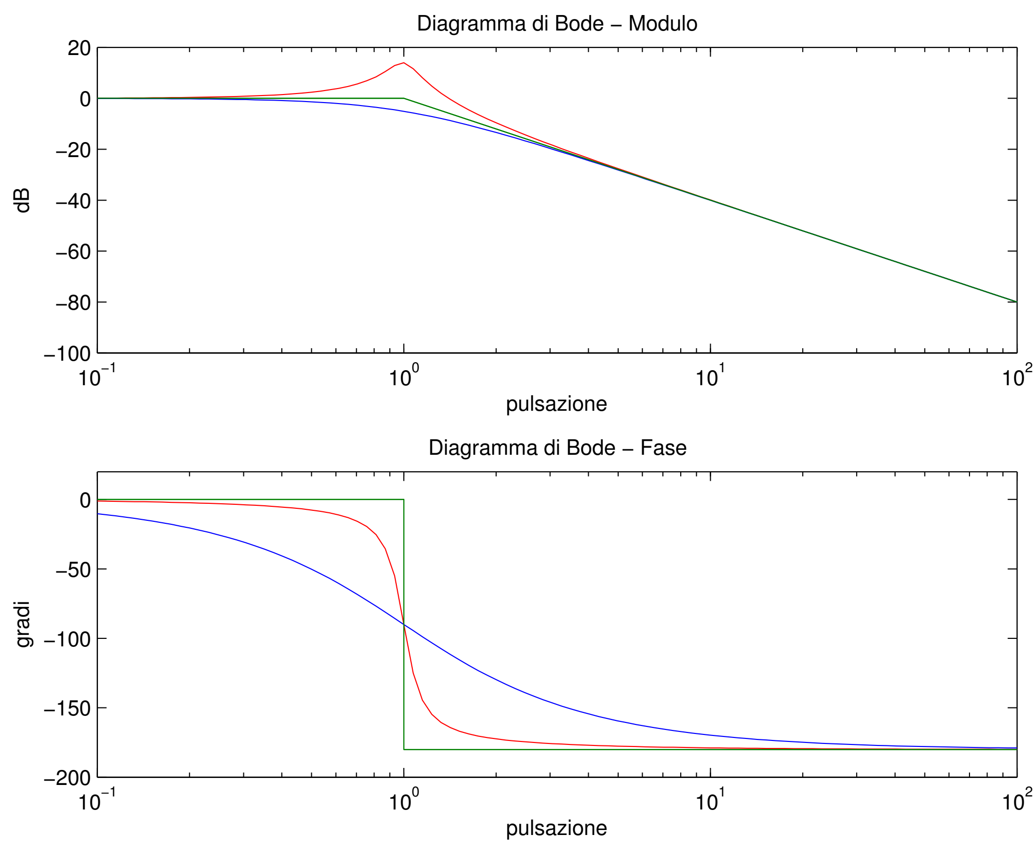


Figura 1: $\xi = 0.1$ in rosso, $\xi = 0.9$ in blu (diagramma asintotico in verde).

2

Tracciare il diagramma polare a partire dai diagrammi di Bode ottenuti

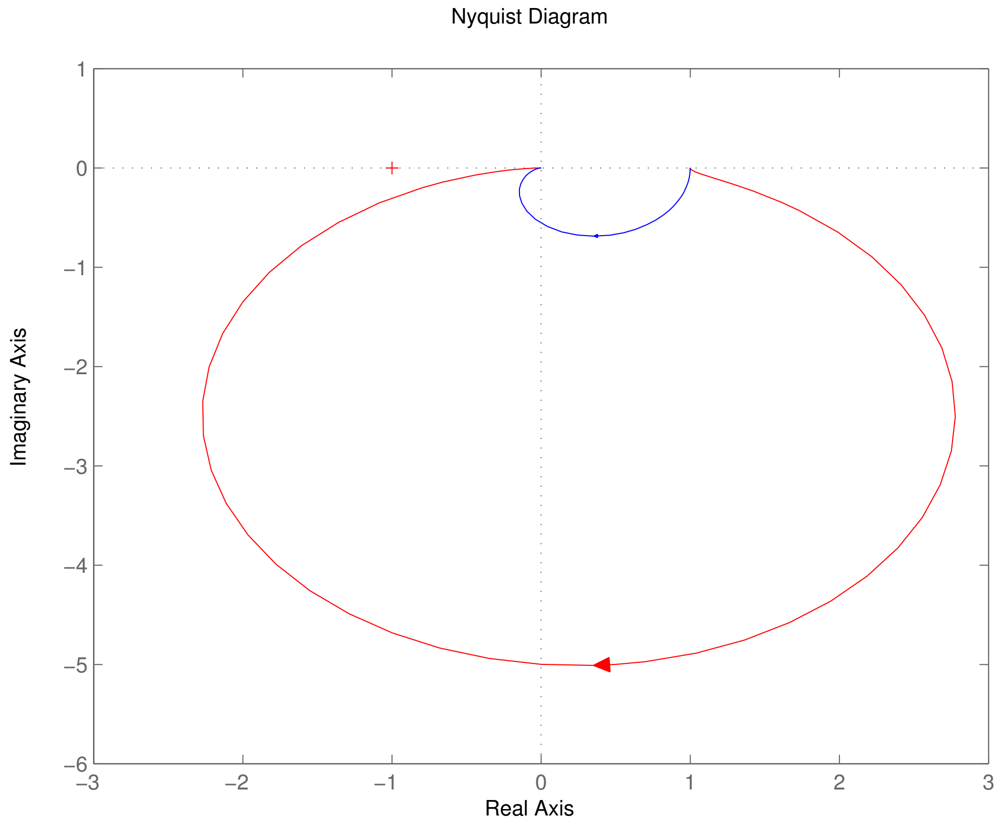


Figura 2: $\xi = 0.1$ in rosso, $\xi = 0.9$ in blu (diagramma asintotico in verde).

Esercizio 8

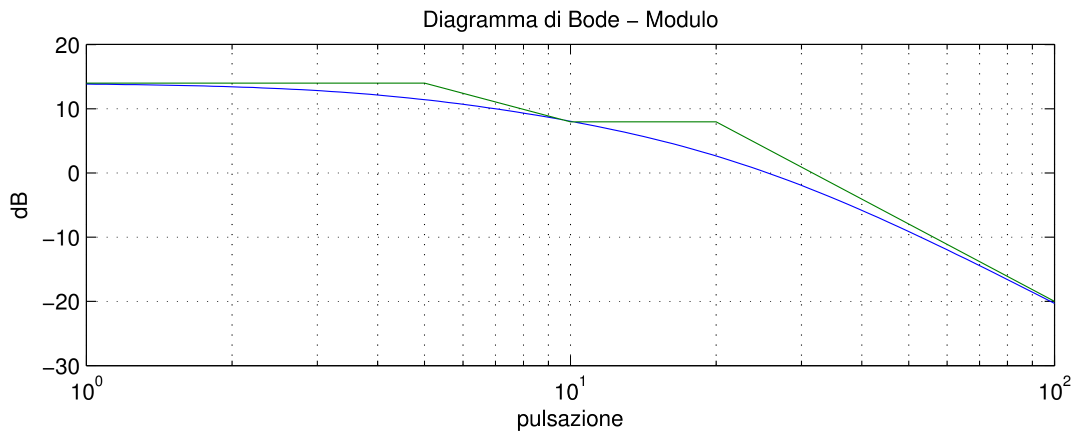
Data la funzione di trasferimento:

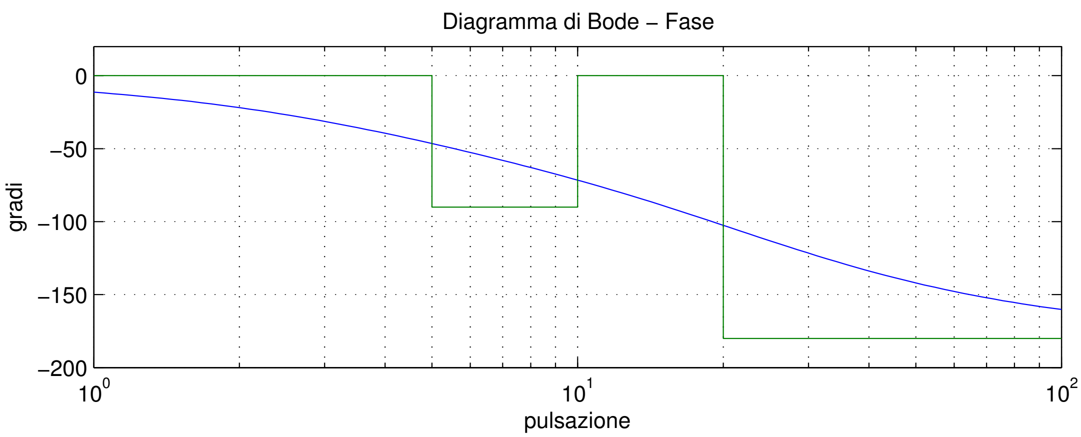
$$G(s) = \frac{5(1+0.1s)}{(1+0.2s)(1+0.05s)^2}$$

tracciare l'andamento qualitativo del diagramma polare associato e indicare sul grafico il punto corrispondente a $\omega = 10$.

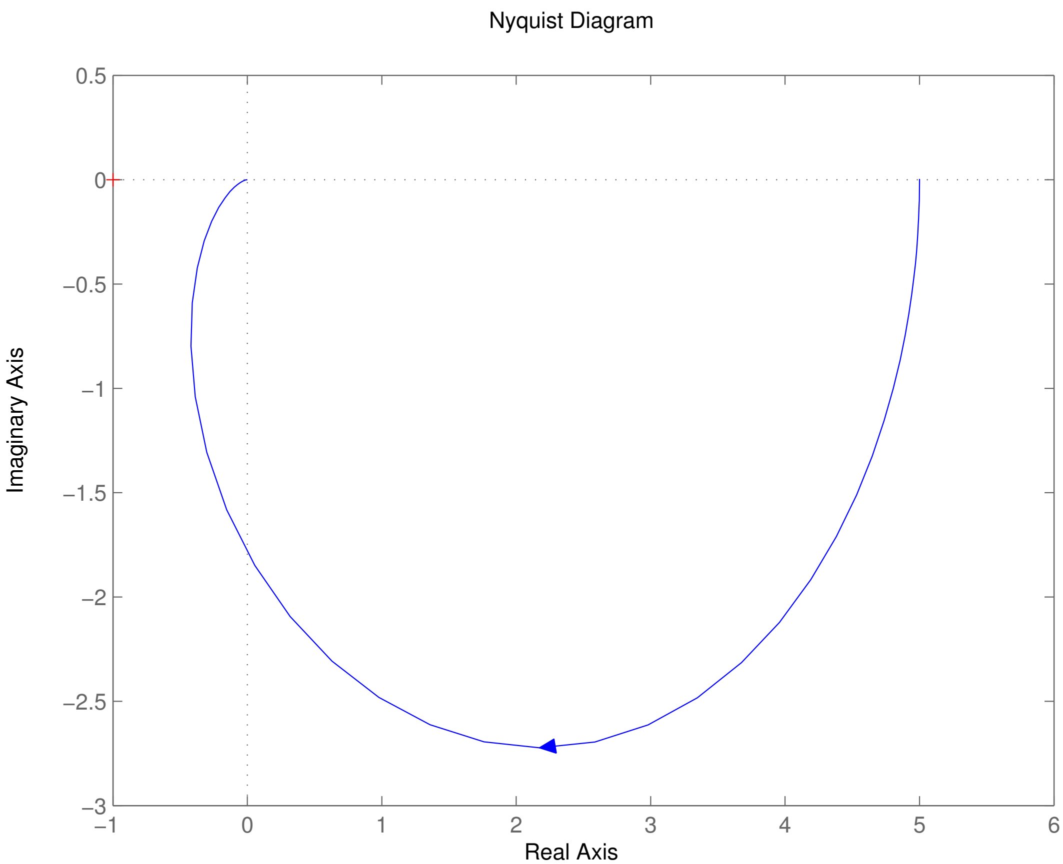
Per tracciare i diagrammi di Bode, calcoliamo quanto vale il guadagno in dB.

$$\mu_{\text{dB}} = 20\log(5) \approx 13\,\text{dB}$$





Da cui possiamo ricavare il diagramma polare



Per individuare il punto associato a $\omega = 10$ ricaviamo il valore di modulo e fase dalla funzione di trasferimento

$$|G(\jmath 10)| = \frac{5|1 + 0.1 \cdot \jmath 10|}{|1 + 0.2 \cdot \jmath 10| \cdot |1 + 0.05 \cdot \jmath 10|^2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5} \cdot (\frac{\sqrt{5}}{2})^2} = 4\sqrt{\frac{2}{5}} \approx 2.53$$

$$\measuredangle G(\jmath 10) = \measuredangle 5 + \measuredangle(1 + \jmath) - \measuredangle(1 + 2\jmath) - 2\measuredangle\,(1 + 0.5\jmath) \approx 0 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - 2\frac{\pi}{6} = -\frac{5}{12}\pi = -75°$$

Dato che $\tan(\pi/3) = \sqrt{3} \approx 1.73$ e $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3} \approx 0.57$. (Il valore reale sarebbe stato di circa $-71.6°$).

Esercizio 9

Data la funzione di trasferimento

$$G = \frac{50(1-2s)}{s(1+s)(1+s/8)}$$

1. Dire se il sistema è asintoticamente stabile;
2. Dire se il sistema è a fase minima;
3. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase;
4. Calcolare il valore esatto della fase in $\omega = 5$;
5. Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma polare di $G(s)$.

1

Dire se il sistema è asintoticamente stabile

No, perché c'è un polo nell'origine.

1

2

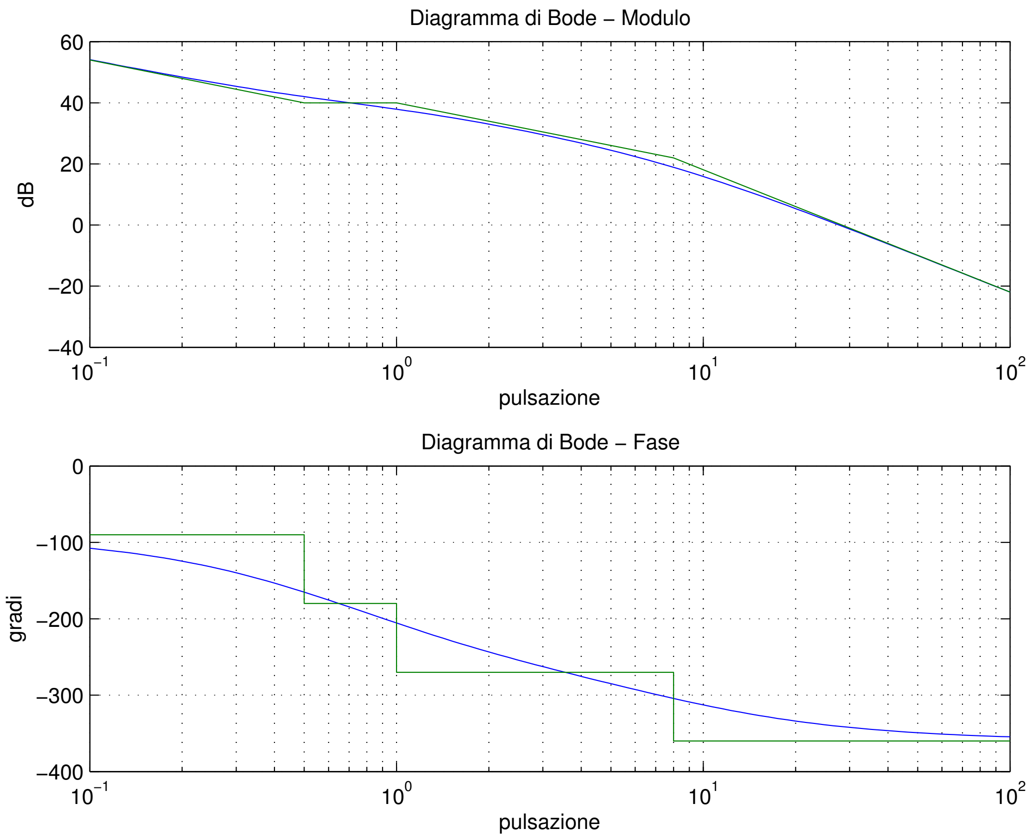
Dire se il sistema è a fase minima

No, perché c'è uno zero in $s = \frac{1}{2}$.

2

3

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase



4

Calcolare il valore esatto della fase in $\omega = 5$

$$\begin{aligned}\measuredangle G(\jmath 5) =& \measuredangle 50 + \measuredangle(1 - 2\jmath 5) - \measuredangle(\jmath 5) - \measuredangle(1 + \jmath 5) - \measuredangle\left(1 + \frac{1}{8}\jmath 5\right) = \\ =& \operatorname{atan}(0) + \operatorname{atan}(-10) - \operatorname{atan}\left(\frac{5}{0}\right) - \operatorname{atan}(5) - \operatorname{atan}\left(\frac{5}{8}\right) = \\ \approx& 0 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{5}{3}\pi = -300^\circ\end{aligned}$$

Facendo i conti esatti viene $\measuredangle G(\jmath 5) = -285^\circ$

4

5

Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma polare di $G(s)$

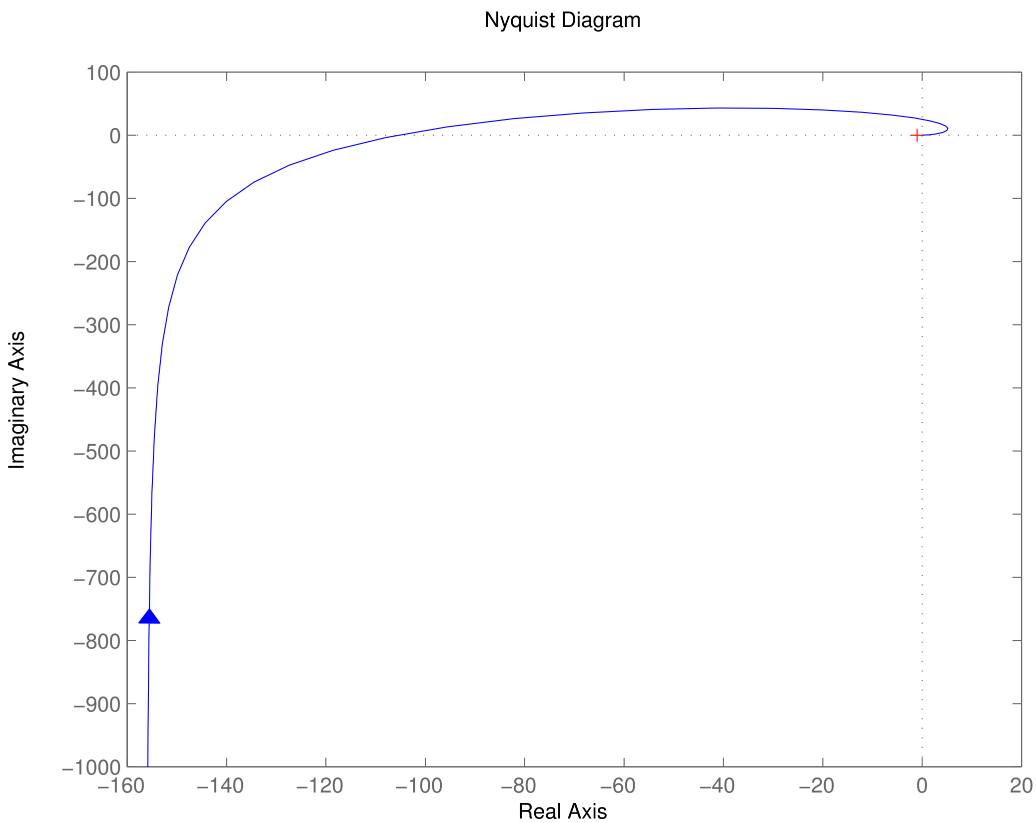
Calcoliamo la parte reale di $G(\jmath\omega)$

$$\Re(G(\jmath\omega)) = \frac{800\omega^2 - 10000}{\omega^4 + 65\omega^2 + 64}$$

di cui possiamo calcolare il limite per $\omega \to 0$

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{800\omega^2 - 10000}{\omega^4 + 65\omega^2 + 64} = -\frac{625}{4} \approx -156.25$$

5



Esercizio 10

Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s+100)(s^2+12s+144)}{(s+1)(s^2+10s+100)}$$

- Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase;
- Individuare una funzione di trasferimento che approssima bene $G(s)$ in bassa frequenza, e di ordine ridotto.

1

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase

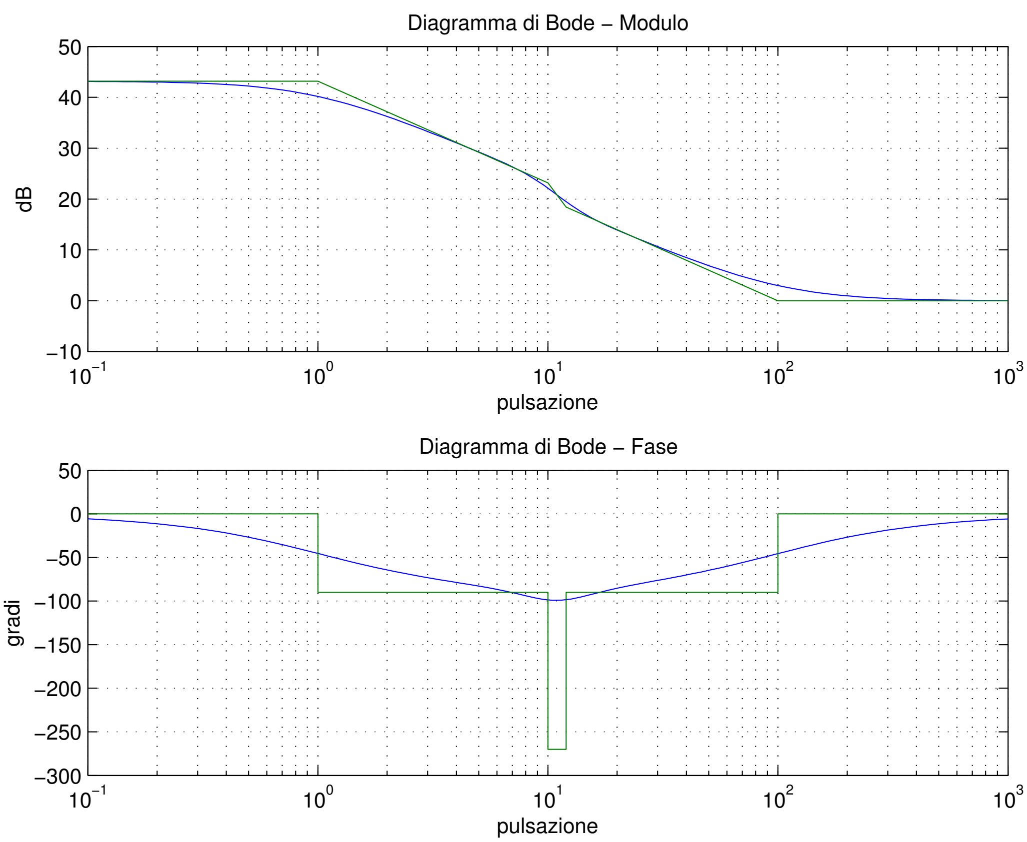
Per tracciare i diagrammi di Bode dobbiamo sapere quanto vale il guadagno statico

$$\mu = G(0) = \frac{100 \cdot 144}{100} = 144$$

che, in dB vale

$$\mu_{\text{dB}} = 20 \log 144 \approx 43$$

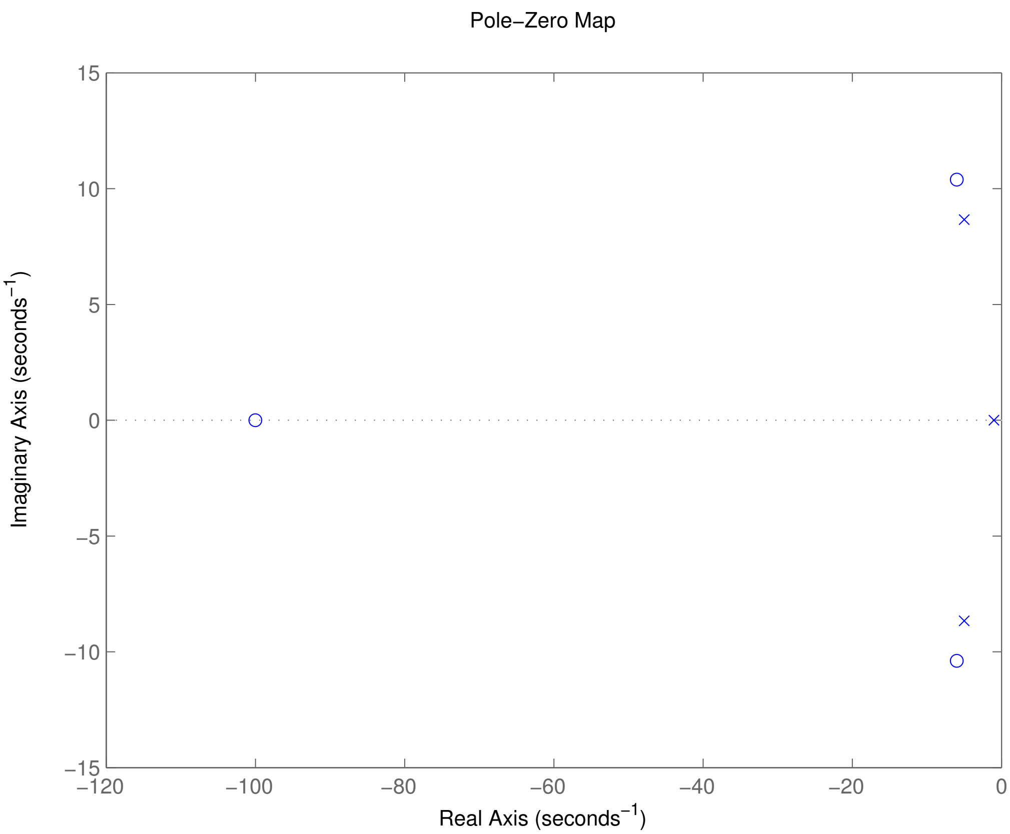
1



2

Individuare una funzione di trasferimento che approssima bene $G(s)$ in bassa frequenza, e di ordine ridotto

Analizziamo come sono posizionati i poli e gli zeri di $G(s)$ 2



Possiamo notare che gli zeri complessi sono molto vicini ai poli complessi e che la loro influenza sul comportamento del sistema tende ad elidersi. In aggiunta, il contributo dello zero è in alta frequenza (possiamo vederlo anche dal diagramma di Bode del modulo), quindi possiamo considerarlo trascurabile per una approssimazione di bassa frequenza. Di conseguenza, una buona approssimazione, è una funzione di trasferimento con lo stesso guadagno statico e con polo il polo dominante di $G(s)$, cioè $(s+1)$. 2

$$\frac{144}{1+s}$$

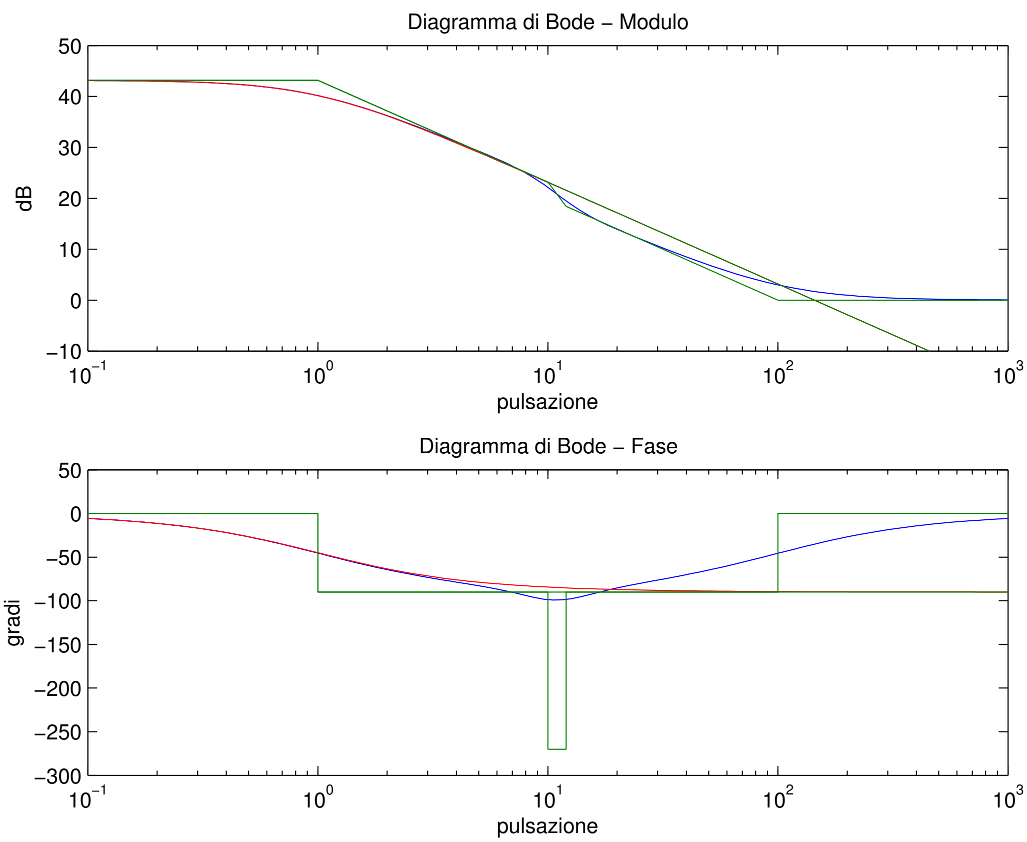


Diagramma di Bode – Modulo
dB
50
40
30
20
10
0
−10
10^−1
10^0
10^1
10^2
10^3
pulsazione
Diagramma di Bode – Fase
gradi
50
0
−50
−100
−150
−200
−250
−300
10^−1
10^0
10^1
10^2
10^3
pulsazione

Esercizio 11

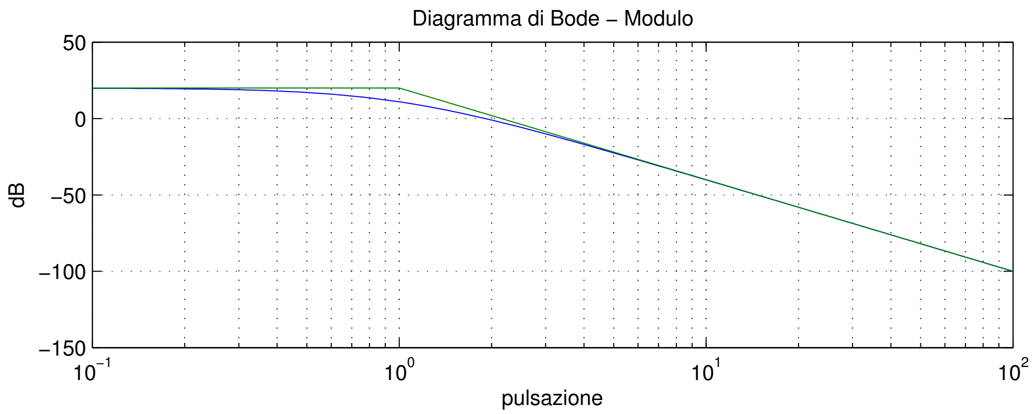
Data la funzione di trasferimento

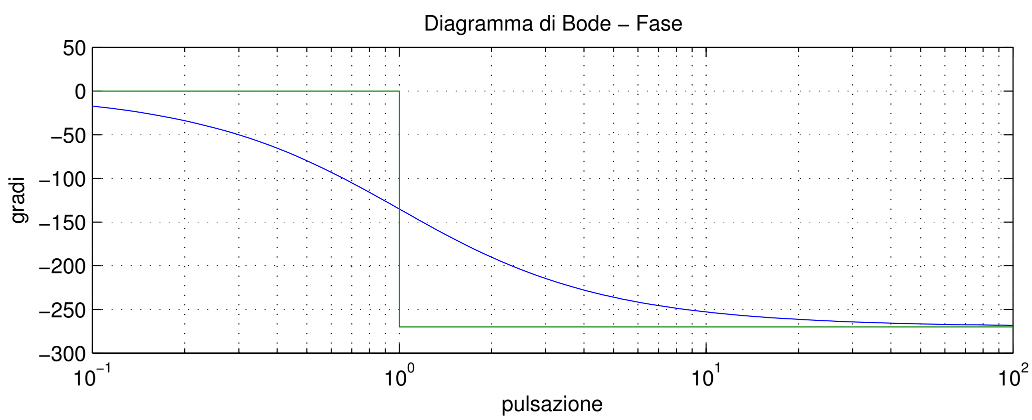
$$G(s) = \frac{10}{(1+s)^3}$$

1. Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase;
2. Tracciare il diagramma polare a partire dai diagrammi di Bode ottenuti.

1

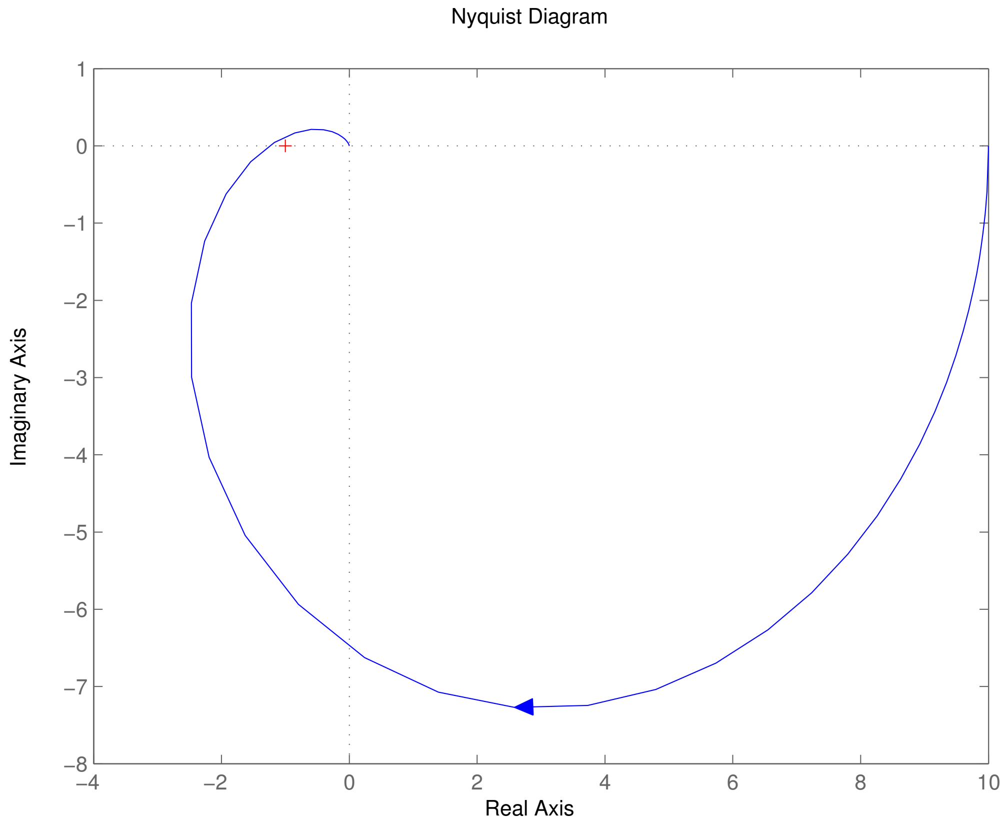
Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase





2

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase



Esercizio 12

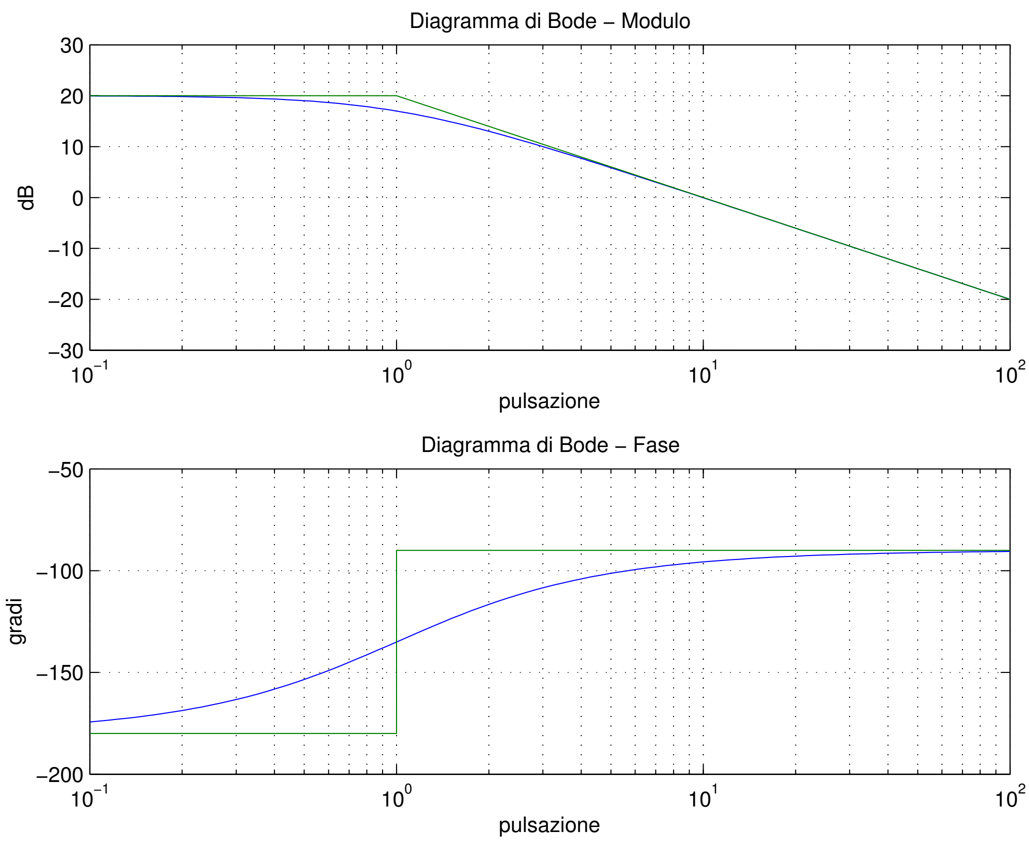
Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s-1}$$

1. Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase;
2. Tracciare il diagramma polare a partire dai diagrammi di Bode ottenuti.

1

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase



2

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase