

Applicazioni

Transitori

Generalità 1/2

- **Reti considerate:** Reti passive con ingressi costanti o sinusoidali
 - I contributi associati alle condizioni iniziali sono dei transitori
 - I contributi associati agli ingressi sono in parte transitori, in parte termini a regime

Generalità 2/2

- **Contributo all'uscita dell'ingresso:**

funzione trasferimento



$$Y(s) = H(s)S(s)$$



uscita

ingresso

- I poli dell'uscita derivano dai poli della funzione di trasferimento $H(s)$ e dai poli dell'ingresso $S(s)$

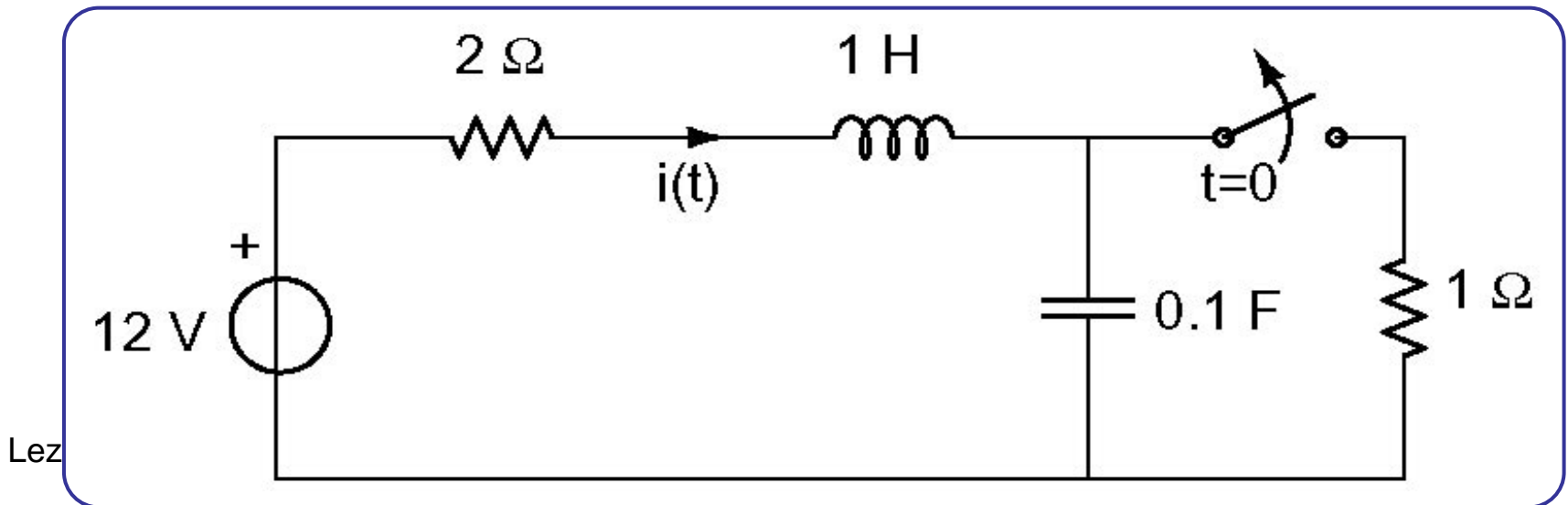
Proprietà poli uscita

- I **poli della funzione di trasferimento** $H(s)$ sono i poli di rete e danno luogo a transitori
- I **poli dell'ingresso** $S(s)$ danno luogo ai termini di regime
 - I contributi dei poli di ingresso coincidono con i contributi di regime e possono essere calcolati in modo più semplice (senza antitrasformare) con il calcolo fasoriale

Esempio con ingresso costante

1/6

- **Calcolare la corrente** $i(t)$ erogata dopo l'apertura dell'interruttore
- Rete nel dominio del tempo
- Ingresso: costante 12V



Esempio con ingresso costante

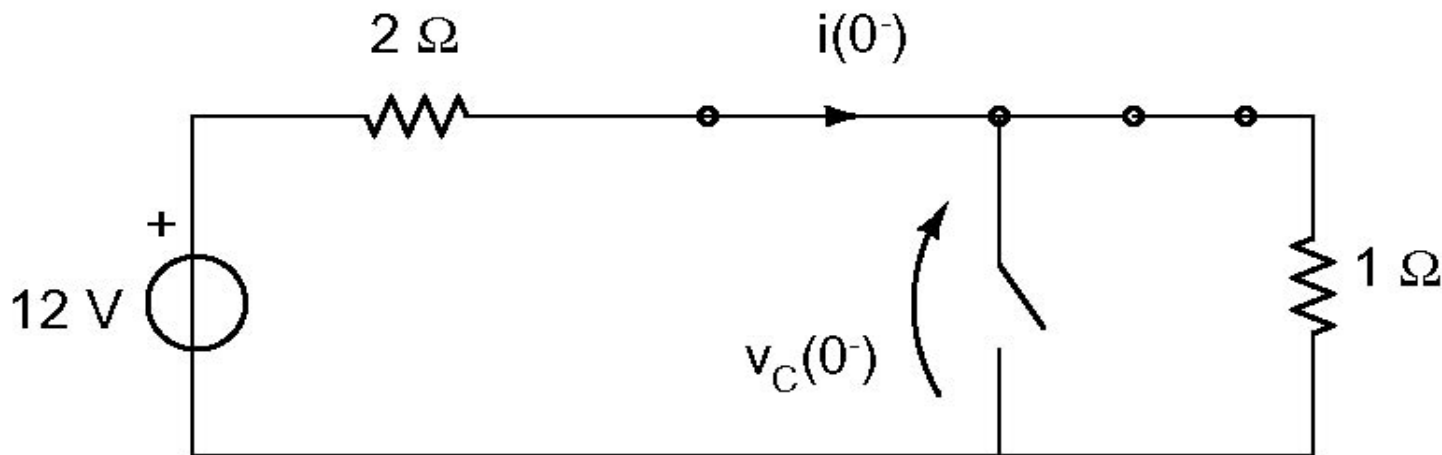
2/6

- **Condizioni iniziali:**

- Induttore è corto circuito
- Condensatore è circuito aperto

$$v_C(0_-) = \frac{1}{1+2} 12 = 4 \text{ V}$$

$$i_L(0_-) = i(0_-) = \frac{12}{3} = 4 \text{ A}$$



Esempio con ingresso costante

3/6

- **Trasformata $E(s)$** dell'ingresso $e(t)=12$ volt

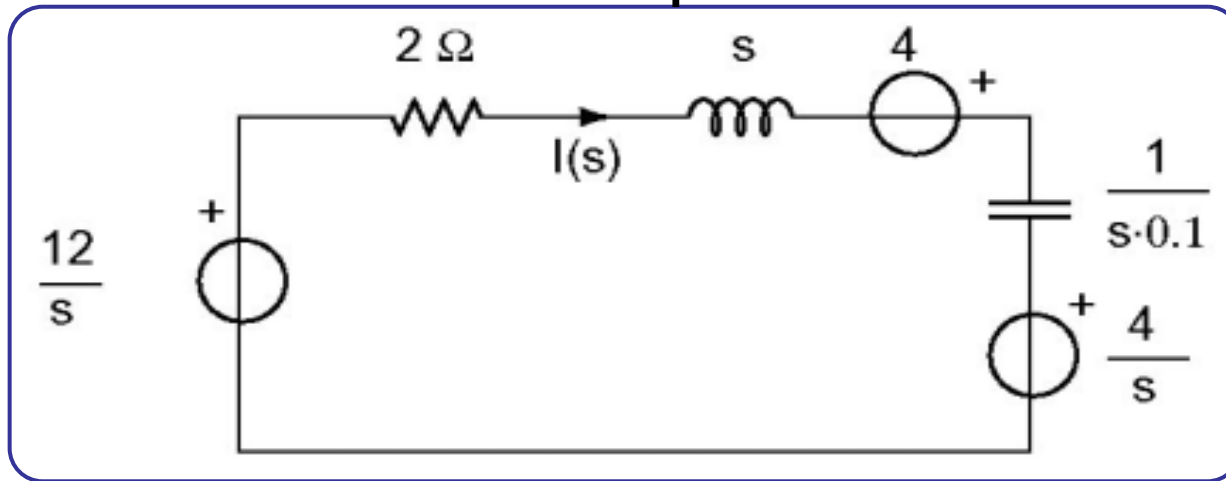
$$e(t) = 12 \text{ V} \qquad E(s) = \frac{12}{s}$$

■ impedenza dell'induttore di 1H: s

■ impedenza del condensatore di 0.1F: $10/s$

Esempio con ingresso costante 4/6

- **Rete nel dominio** di Laplace



– si ottiene:

Razionale fratta

$$I(s) = \frac{\frac{12}{s} + 4 - \frac{4}{s}}{2 + s + \frac{10}{s}} = \frac{4(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$

Esempio con ingresso costante

5/6

- **Antitrasformazione**

$$I(s) = \frac{4(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$

- non esiste polo nell'origine dell'ingresso: il termine di regime è nullo!
- Poli di rete complessi coniugati

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm j3$$

– Residuo
Lezione 13

$$R[s_1] = \frac{4(s_1+2)}{2s_1+2} = \frac{4(-1+j3+2)}{2(-1+j3)+2} = 2 - j\frac{2}{3}$$

Esempio con ingresso costante

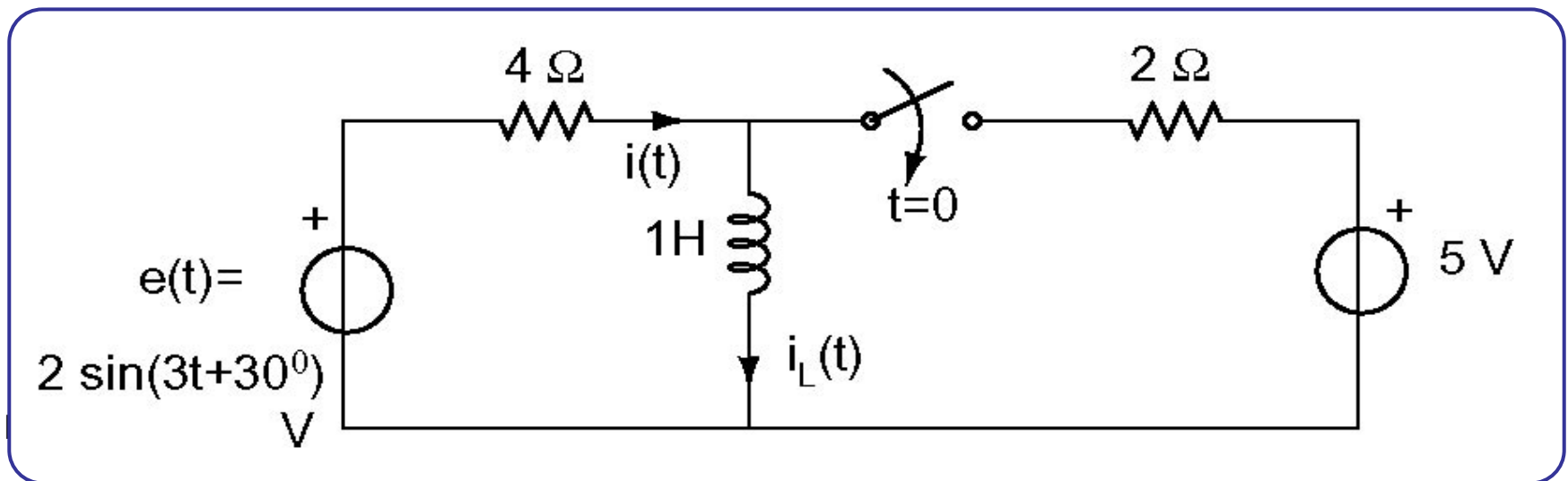
6/6

- si ottiene il **transitorio cisoidale**:

$$I(s) = \frac{4(s+1)}{s^2 + 2s + 10} \Rightarrow 2 \operatorname{Re}\{R[s_1]e^{s_1 t}\} =$$
$$= i(t) = e^{-t} \left[4 \cos(3t) + \frac{4}{3} \sin(3t) \right]$$

Esempio con ingresso sinusoidale 1/9

- **Calcolare** la tensione $i(t)$ erogata dopo la chiusura dell'interruttore
 - Rete nel dominio del tempo
 - Ingresso: sinusoidale
- $e(t) = 2 \sin(3t + 30^\circ)$
 $\omega = 3 \text{ rad} / \text{s}$



Esempio con ingresso sinusoidale 2/9

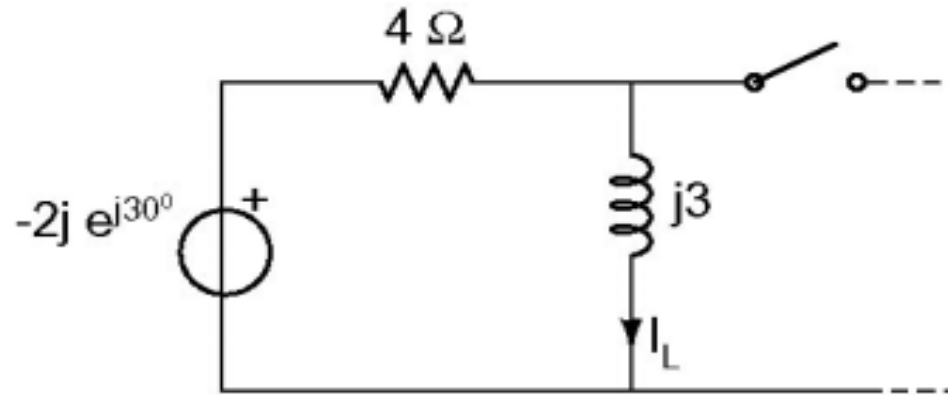
- **Condizioni iniziali:**

- Prima della chiusura dell'interruttore c'è regime sinusoidale e la rete viene rappresentata nel dominio dei fasori

- Il **generatore vale** $E = -2j e^{j30^\circ}$

- **Induttore** (non è corto circuito) ha **impedenza** $j3$

Esempio con ingresso sinusoidale 3/9



$$I_L = \frac{-2j e^{j30^0}}{4 + j3} = -\left(\frac{6}{25} + j\frac{8}{25}\right)e^{j30^0}$$

$$i_L(t) = \text{Re}[I_L e^{j\omega t}] =$$

$$= -\frac{6}{25}\cos(\omega t + 30^0) + \frac{8}{25}\sin(\omega t + 30^0)$$

$$i_L(0_-) = \text{Re}[I_L] = -0.0478 \quad [A]$$

Esempio con ingresso sinusoidale 4/9

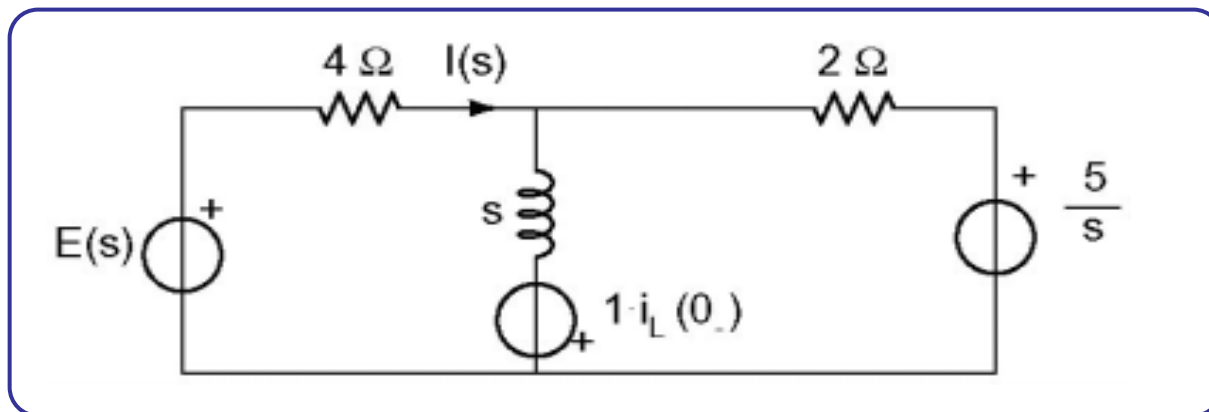
- Trasformata degli ingressi:

$$e(t) = 2 \sin(3t + 30^\circ) = \sqrt{3} \sin(3t) + \cos(3t)$$

$$E(s) = \sqrt{3} \frac{3}{s^2 + 9} + \frac{s}{s^2 + 9} = \frac{3\sqrt{3} + s}{s^2 + 9}$$

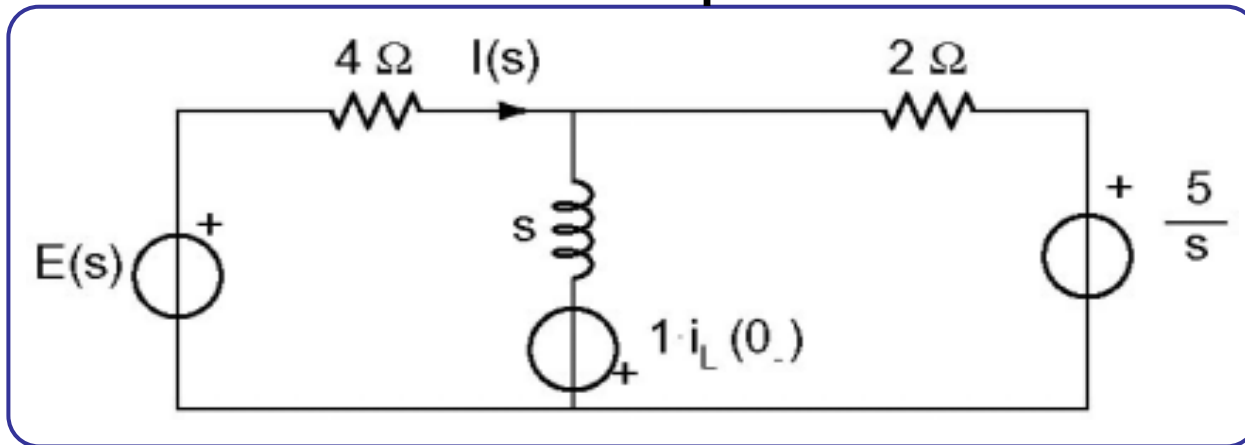
$$5 \text{ V} \Rightarrow \frac{5}{s} \quad \text{impedenza dell'induttore di 1H: } s$$

– rete nel dominio di Laplace



Esempio con ingresso sinusoidale 5/9

- rete nel **dominio** di Laplace



- si ottiene (sovrapposizione degli effetti):

$$\begin{aligned}
 I(s) &= \frac{E(s)}{4 + s \parallel 2} + \frac{i_L(0_-)}{s + 4 \parallel 2} \frac{2}{4 + 2} - \frac{1}{4} \frac{4 \parallel s}{2 + 4 \parallel s} \frac{5}{s} = \\
 &= \frac{(2 + s)(3\sqrt{3} + s)}{2(4 + 3s)(s^2 + 9)} + \frac{i_L(0_-)}{4 + 3s} - \frac{5}{2(4 + 3s)}
 \end{aligned}$$

Esempio con ingresso sinusoidale 6/9

- **Antitrasformazione**

$$I(s) = \frac{(2+s)(3\sqrt{3}+s)}{2(4+3s)(s^2+9)} + \frac{i_L(0_-)}{4+3s} - \frac{5}{2(4+3s)}$$

– c'è solo un polo di rete in $s_o = -4/3$. Il transitorio è dato dal suo contributo

- Residuo $R(s_o) = \frac{(2+s_o)(3\sqrt{3}+s_o)}{2 \times 3(s_o^2+9)} + \frac{i_L(0_-)}{3} - \frac{5}{2 \times 3} = -0.8095$

– si ottiene il transitorio:

$$i_t(t) = -0.8095e^{s_o t} = -0.8095e^{-4t/3}$$

Esempio con ingresso sinusoidale

7/9

- **Termine di regime**

$$I(s) = \frac{(2+s)(3\sqrt{3}+s)}{2(4+3s)(s^2+9)} + \frac{i_L(0_-)}{4+3s} - \frac{5}{2(4+3s)}$$

- Invece di calcolare i residui, è più veloce calcolare direttamente i termini di regime.

- principio di sovrapposizione degli effetti

$$i_p(t) = i'_p(t) + i''_p(t)$$

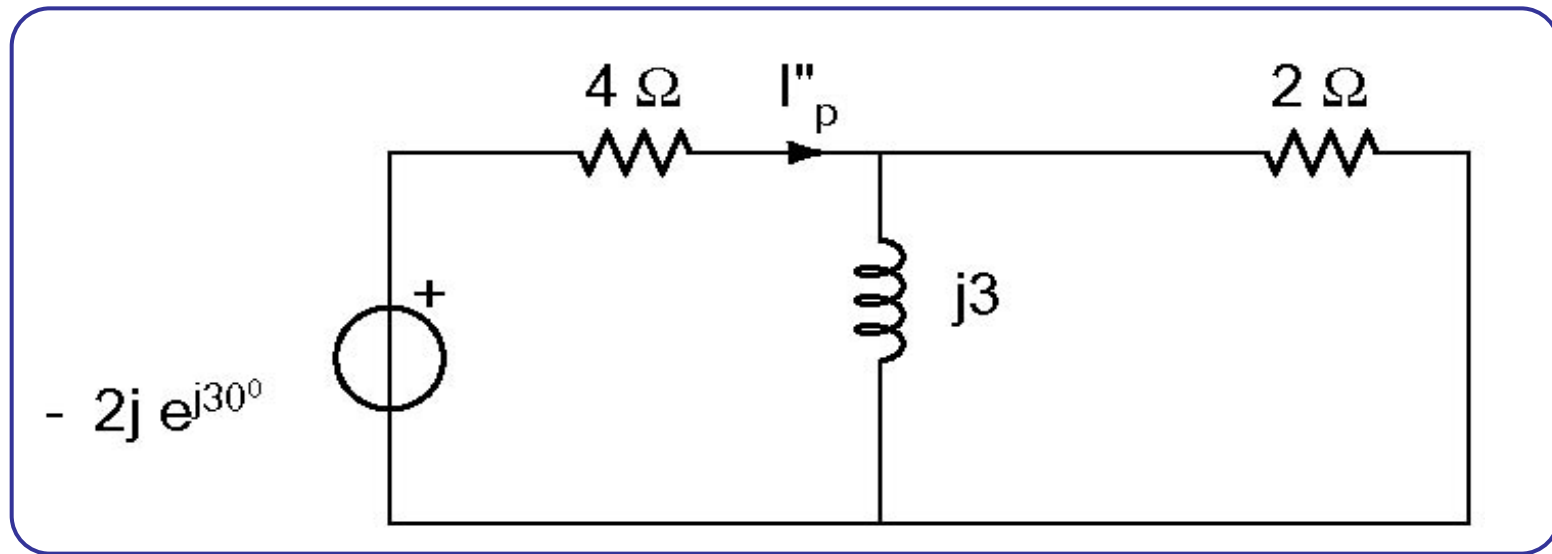
- non c'è contributo in continua sull'uscita

$$i'_p(t) = 0$$

Esempio con ingresso sinusoidale

8/9

- per il **contributo in alternata**



$$I''_p = \frac{-2j e^{j30^\circ}}{4 + (j3) \parallel 2} = 0.127 - j0.343$$

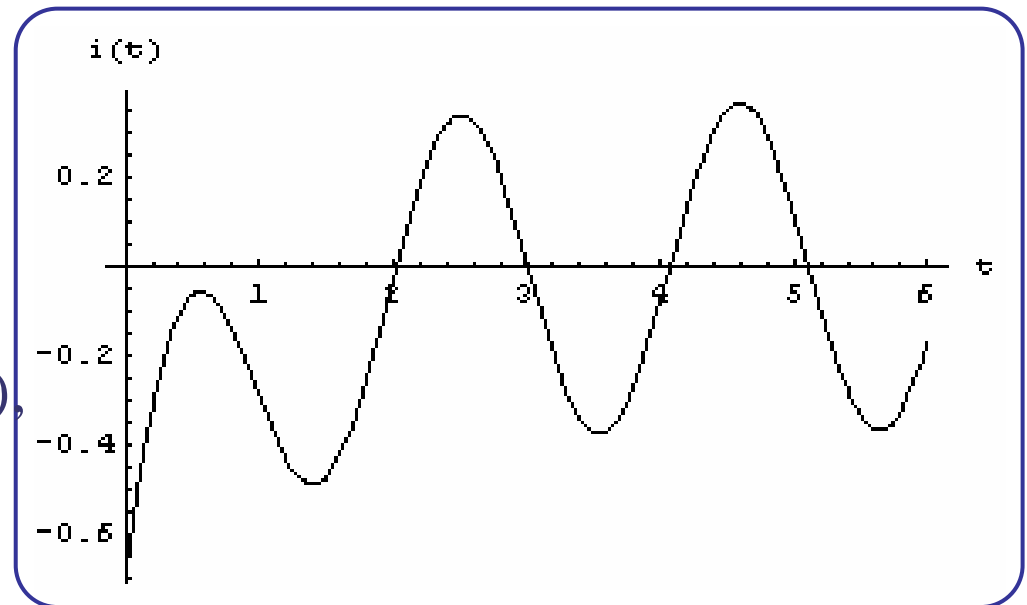
Esempio con ingresso sinusoidale 9/9

$$I''_p = \frac{-2je^{j30^\circ}}{4 + (j3) \parallel 2} = 0.127 - j0.343$$

$$i_p(t) = 0.127 \cos(3t) + 0.343 \sin(3t)$$

- Espressione finale:**

$$\begin{aligned} i(t) &= i_t(t) + i_p(t) = \\ &= -0.8095e^{-4t/3} + \\ &+ 0.127 \cos(3t) + 0.343 \sin(3t), \\ &t > 0 \end{aligned}$$



Reti nel dominio delle frequenze

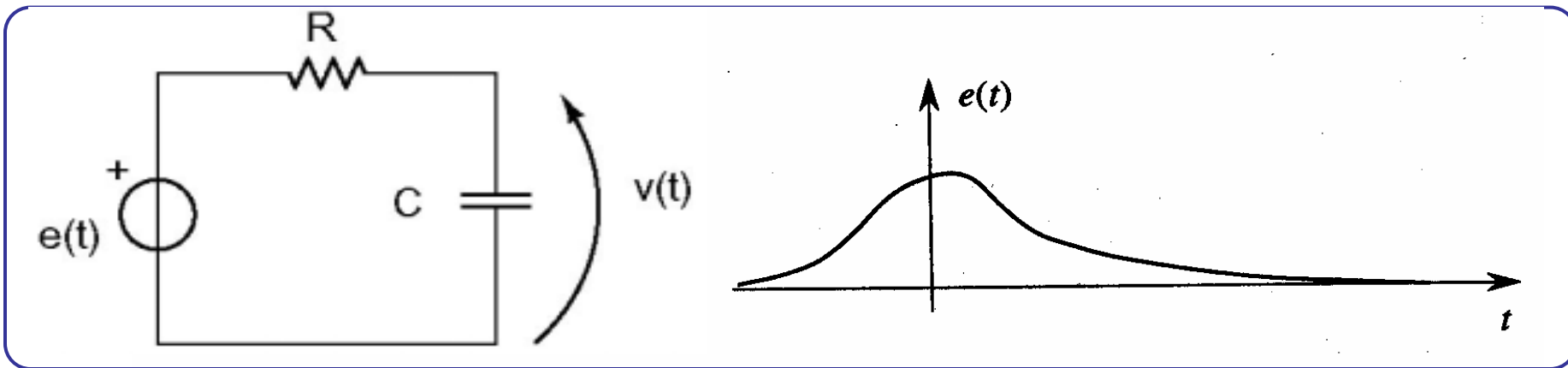
Trasformate di Fourier

Trasformate di Fourier

Definizioni e proprietà

Scopo

- Si consideri il circuito con ingresso arbitrario



Rappresentazione di segnali con sinusoidi

- Integrale di Fourier

$$f(t) = \int_0^{\infty} F_M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega = \int_0^{\infty} f_{\omega}(t) d\omega$$

– ogni funzione è somma di (infinite) sinusoidi elementari:

The diagram illustrates the relationship between the integral of Fourier and its elementary sinusoidal components. At the top, a green-bordered box contains the word "pulsazione". A double arrow points down from this box to the ω term in the equation $f_{\omega}(t) = F_M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$. Below the equation, two green-bordered boxes are positioned: "Valor massimo" on the left and "fase" on the right. A double arrow points up from "Valor massimo" to the $F_M(\omega)$ term, and another double arrow points up from "fase" to the $\varphi(\omega)$ term.

$$f_{\omega}(t) = F_M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Modulo e Fase delle sinusoidi

1/2

$$f(t) = \int_0^\infty f_\omega(t) d\omega \quad f_\omega(t) = F_M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

- le funzioni rappresentabili con integrale di Fourier sono le **distribuzioni temperate (segnali)**
- la pulsazione **varia in generale con continuità** da zero ad infinito

Modulo e Fase delle sinusoidi

2/2

- il valor massimo e la fase delle sinusoidi elementari sono funzioni della pulsazione e si calcolano con la formula

$$F_{\omega} = F_M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

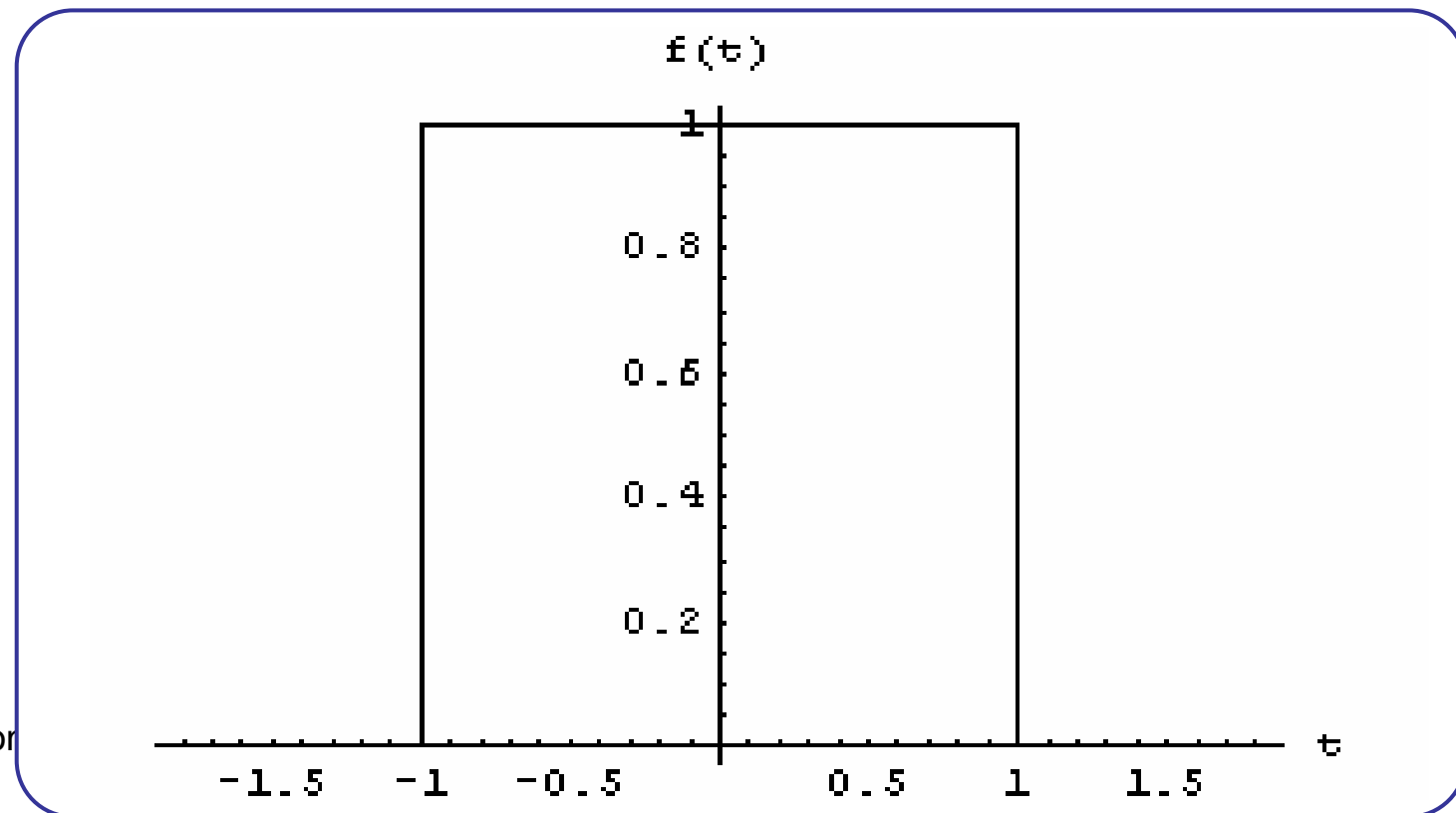
Trasformate di Fourier

Impulso rettangolare

Rappresentazione nel tempo

- **Rappresentare** con integrale di Fourier l'impulso rettangolare

$$f(t) = u(t+1) - u(t-1)$$



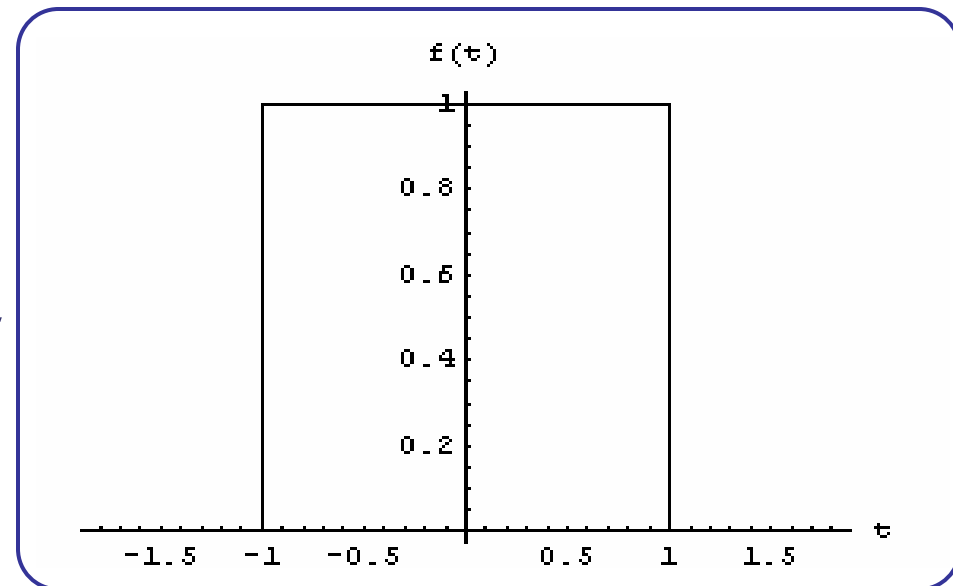
Rappresentazione nelle pulsazioni

- **Risulta** $f(t) = \int_0^\infty f_\omega(t) d\omega$

$$f_\omega(t) = F_M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

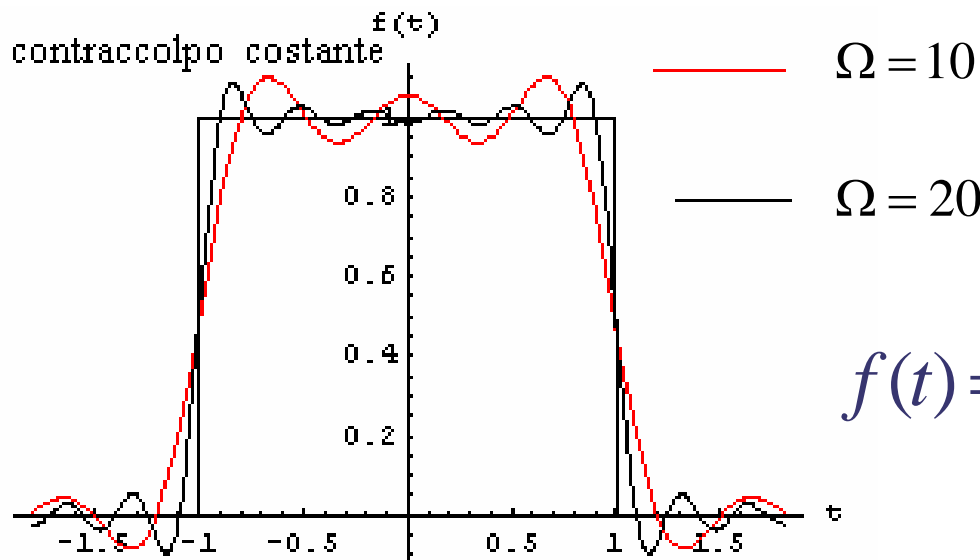
$$F_\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin(\omega)}{\pi \omega}$$

$$F_M(\omega) = 2 \left| \frac{\sin(\omega)}{\pi \omega} \right|, \quad \varphi(\omega) = 0, \pi$$



Approssimazione con intervallo finito

- **Approssimazione dell'integrale di Fourier**
 - Nei casi pratici l'intervallo di integrazione infinito $0 \leq \omega \leq \infty$ viene approssimato con un intervallo di integrazione $0 \leq \omega \leq \Omega$ finito ma continuo



$$\text{contraccollo} = \frac{2}{\pi} \text{SinInt}[\pi] = 1.179$$

$$f(t) = \int_0^{\infty} f_{\omega}(t) d\omega \approx \int_0^{\Omega} f_{\omega}(t) d\omega$$

Numero finito di pulsazioni 1/2

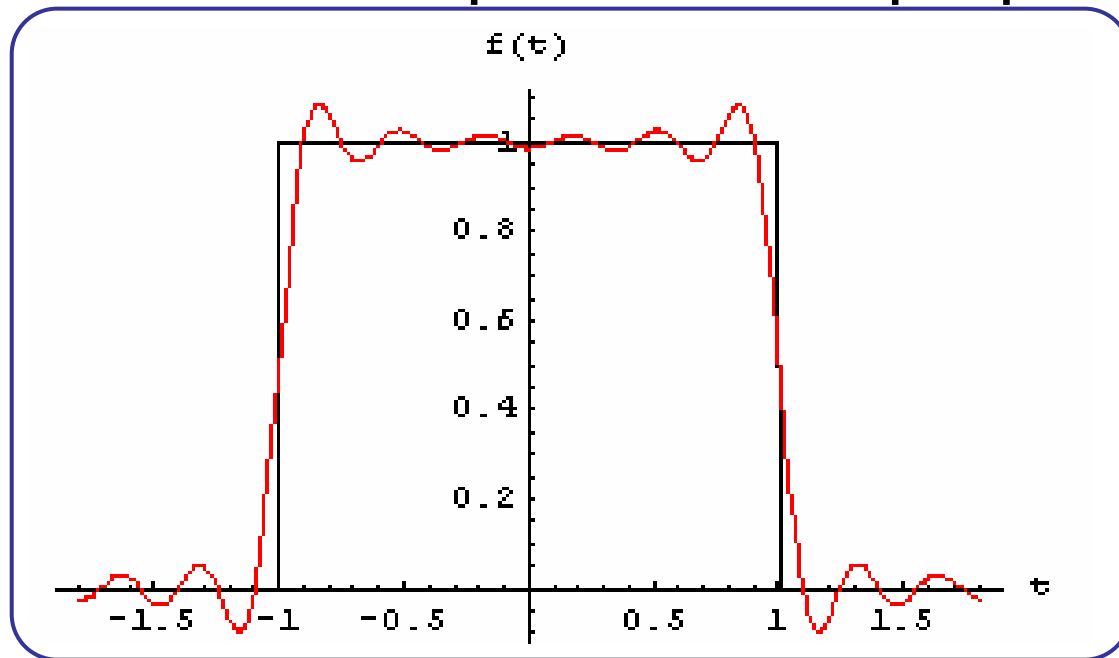
- **Approssimando successivamente l'integrale** con una somma, il numero di sinusoidi che rappresenta un segnale è finito

$$f(t) = \int_0^{\infty} f_{\omega}(t) d\omega \approx \int_0^{\Omega} f_{\omega}(t) d\omega \approx h \sum_{i=0}^{\frac{\Omega}{h}} f_{i_h}(t)$$

- l'impulso rettangolare è approssimato con Ω / h sinusoidi con pulsazioni equispaziate di h

Numero finito di pulsazioni 2/2

- **l'impulso rettangolare** è approssimato con sinusoidi con pulsazioni equispaziate di h



$$\Omega = 20$$

$$h = 1/10$$

Contraccolpo indipendente
da h e da Ω

Il segnale in rosso è la sovrapposizione di 200 sinusoidi elementari equispaziate (a partire dalla pulsazione nulla) di 0.1 rad/s

Trasformate di Fourier

**Generalità sul metodo
di Fourier**

Descrizione

- **Calcolare** l'uscita di una rete con ingresso costituito da un segnale arbitrario
 - **Approssimare** gli ingressi con funzioni sinusoidali elementari
 - **Calcolare** l'uscita relativa ad ognuna delle sinusoidi elementare con il metodo dei fasori
 - **Sommare** le uscite così ottenute

Il procedimento è esatto se le funzioni elementari sono infinite cioè sono riferite a tutte le pulsazioni variabili con continuità da zero ad infinito

Integrale e Trasformata di Fourier 1/2

- Da un punto di vista matematico è preferibile introdurre l'integrale di Fourier nella forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- si introducono anche **pulsazioni negative!**

Integrale e Trasformata di Fourier 2/2

- viene definita la seguente **trasformata di Fourier**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

- la trasformata di Fourier è in sostanza il fasore associato alla **sinusoide elementare**

$$f_{\omega}(t) = F_M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

presente nel segnale

Serie di Fourier 1/2

- **Se il segnale $f(t)$ è periodico** di periodo T :
 $f(t+T)=f(t)$
 - la trasformata di Fourier è costituita da infiniti impulsi:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \delta(\omega - m\omega_o)$$

$$\text{dove :} \quad \omega_o = \frac{2\pi}{T}, \quad F_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jm\omega_o t} dt$$

Serie di Fourier 2/2

- L'integrale di Fourier diviene una serie: **la serie di Fourier**

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{j m \omega_o t}$$

- Le funzioni sinusoidali elementari presenti nel segnale si chiamano armoniche e costituiscono un insieme discreto (ancorchè infinito) anzichè continuo.

Spettri di segnali 1/2

- Si definiscono due **spettri**:
 - **spettro di ampiezza** $|F(\omega)|$
 - lo spettro di ampiezza molte volte si esprime in dB
 - lo spettro di ampiezza si misura con l'analizzatore di spettro (la misura è in dB)
 - **spettro di fase** $\angle F(\omega)$

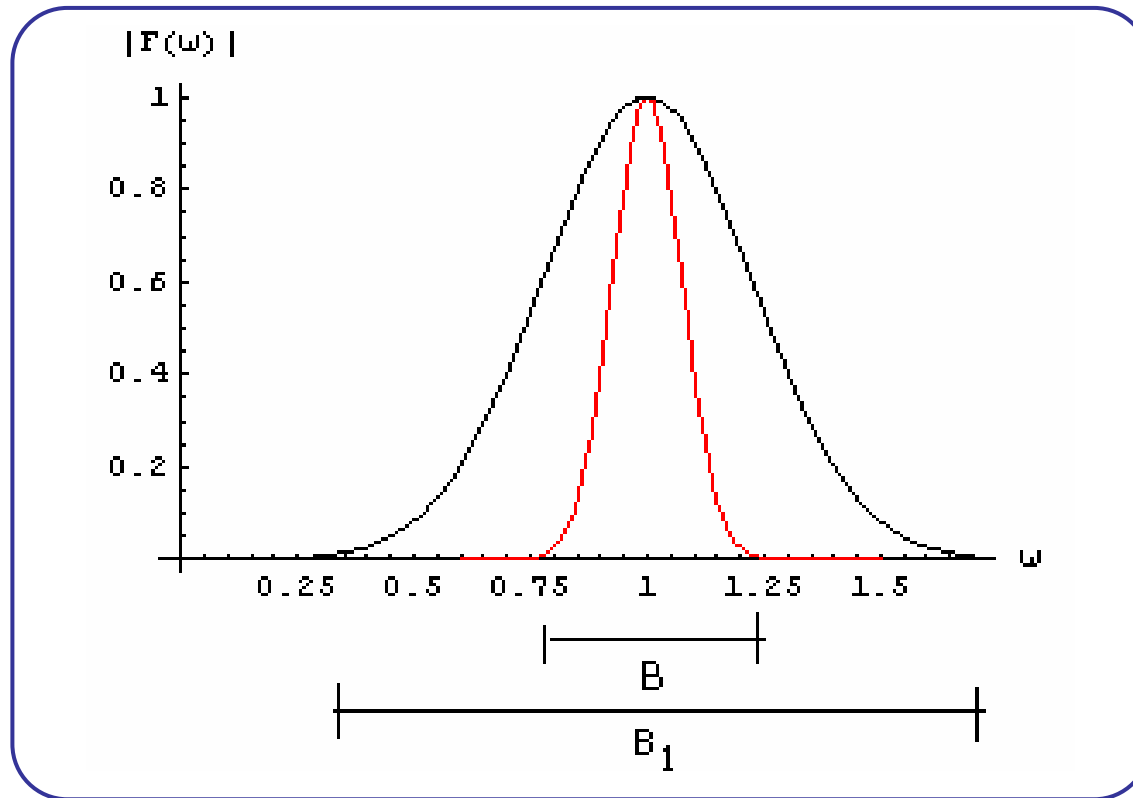
Spettri di segnali 2/2

- Lo spettro (di ampiezza) può essere:
 - **continuo**:
 - nella trasformata di Fourier non esistono impulsi
 - **a righe**
 - nella trasformata di Fourier son presenti solo impulsi (esempio negli spettri delle funzioni periodiche)
 - **misto**

Banda di segnali 1/2

- Teoricamente un **segnale contiene** tutte le frequenze da zero ad infinito
 - In pratica ci si limita a considerare solo gli intervalli di frequenza dove gli spettri di ampiezza sono significativi
 - Tali intervalli definiscono le bande del segnale

Banda di segnali 2/2



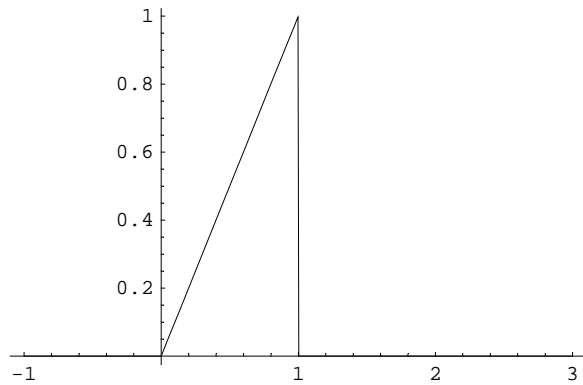
Il segnale il cui spettro è indicato in **rosso** ha una banda B più stretta di quella B_1 del segnale con spettro indicato in nero

Impulso triangolare

```
u[t_] = UnitStep[t];
```

```
f[t_] = t u[t] - t u[t - 1];
```

```
Plot[f[t], {t, -1, 3}]
```



- Graphics -

$$F\omega[\omega_] = \frac{1}{\pi} \int_0^1 t \text{Exp}[-I \omega t] dt$$

$$\frac{-1 + e^{-i \omega} (1 + i \omega)}{\pi \omega^2}$$

Calcolare il valore efficace (in dB) alle frequenze

f0 = 0, f1 = 1 MHz

f2 = 1 GHz

```
F0 = Limit[Fω[ω], ω → 0] // N
```

```
0.159155
```

```
F1 = Fω[2 π] // N
```

```
0. + 0.0506606 i
```

```
F1000 = Fω[2 π 1000] // N
```

```
0. + 0.0000506606 i
```

```
FodB = 20 Log[10, Abs[F0]]
```

```
-15.9636
```

F1dB = 20 Log[10, Abs[F1]]

-25.9066

F1000dB = 20 Log[10, Abs[F1000]]

-85.9066

Gli analizzatori di spettro misurano i dB dei valori efficaci. Quindi :

Foe = FodB - 3

-18.9636

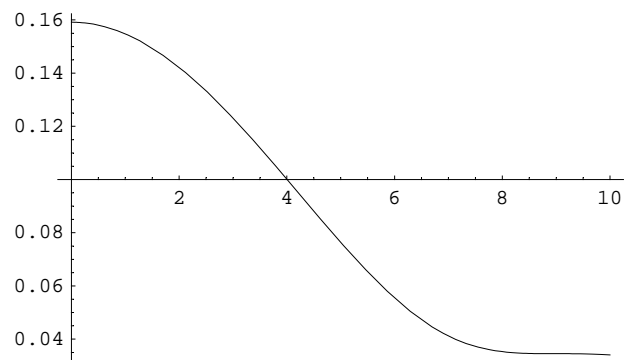
F1e = F1dB - 3

-28.9066

F1000e = F1000dB - 3

-88.9066

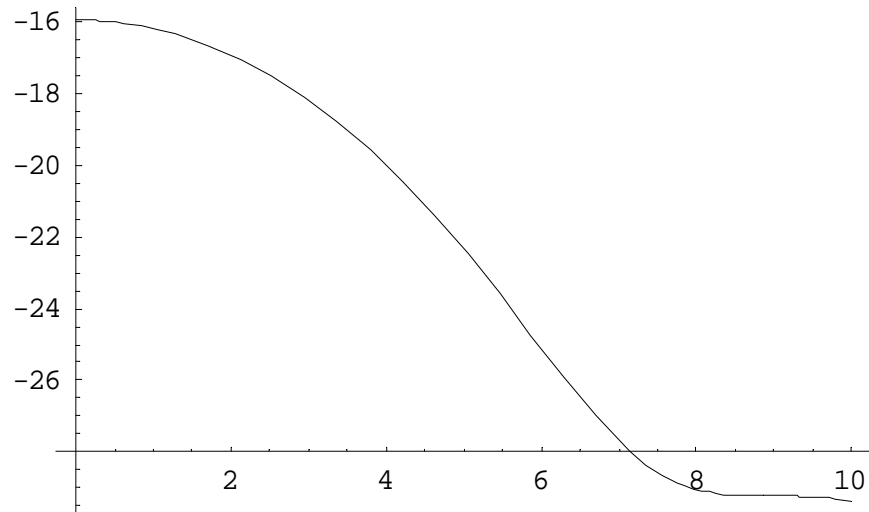
Plot[Abs[F ω [\mathit{\omega}]], {\mathit{\omega}, 0, 10}]



- Graphics -

F ω dB = 20 Log[Abs[F ω [\mathit{\omega}]]];

`Plot[FωdB, { ω , 0, 10}]`



-Graphics-

Esempio A.7

Si consideri il filtro passabasso RC di Fig. A12 e si voglia calcolare la tensione $v(t)$ sul condensatore, supponendo che la forma d'onda del generatore $e(t)$ sia un impulso rettangolare (vedi Fig. A13):

$$e(t) = u(t + a) - u(t - a).$$

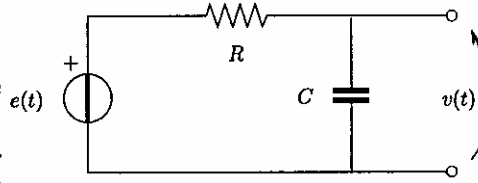


Fig. A.12: Esempio A.7. Filtro RC passabasso.

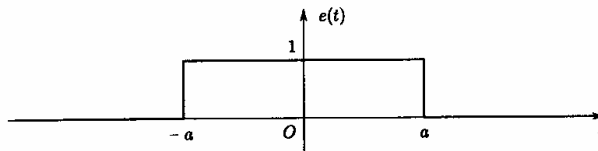


Fig. A.13: Esempio A.7. Segnale in ingresso (impulso rettangolare) al filtro passabasso di Fig. A12.

Si ha:

$$V(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} E(\omega)$$

dove $\tau = RC$ ed $E(\omega)$ assume la seguente espressione:

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega}$$

Ne consegue:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega} \frac{1}{1 + j\omega\tau} e^{j\omega t} d\omega.$$

L'integrale si calcola con il metodo dei residui, con il risultato (Fig. A14):

$$v(t) = \left[1 - e^{-\frac{t+a}{\tau}} \right] u(t + a) + \left[e^{-\frac{t-a}{\tau}} - 1 \right] u(t - a).$$

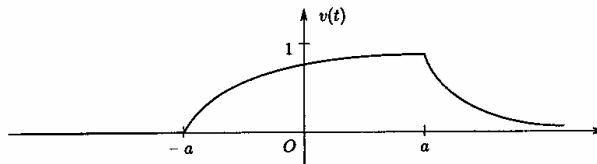


Fig. A.14: Esempio A.7. Segnale in uscita del filtro passabasso di Fig. A12.

Si osserva che la tensione è continua. Più precisamente: è nulla per $t < -a$; nell'intervallo $-a < t < a$ cresce, con costante di tempo τ , da 0 a $[1 - \exp(2a/\tau)]$ e, per $t > a$, decresce con costante di tempo τ da $[1 - \exp(2a/\tau)]$ a 0.