Metodo delle trasformate di Laplace

Sommario del metodo

Fasi del metodo

- **Trasformazione della rete** dal dominio del tempo al dominio di Laplace
- **Calcolo della rete** in Laplace con metodi circuitali
- **Calcolo delle antitrasformate** per le grandezze di uscita

Vantaggi del metodo

- Alcuni **Vantaggi**
  - reti anche non degeneri
  - presenza di generatori impulsivi
  - non richiede calcolo preventivo valori iniziali
  - grande interpetrabilità fisica

Reti nel dominio delle frequenze

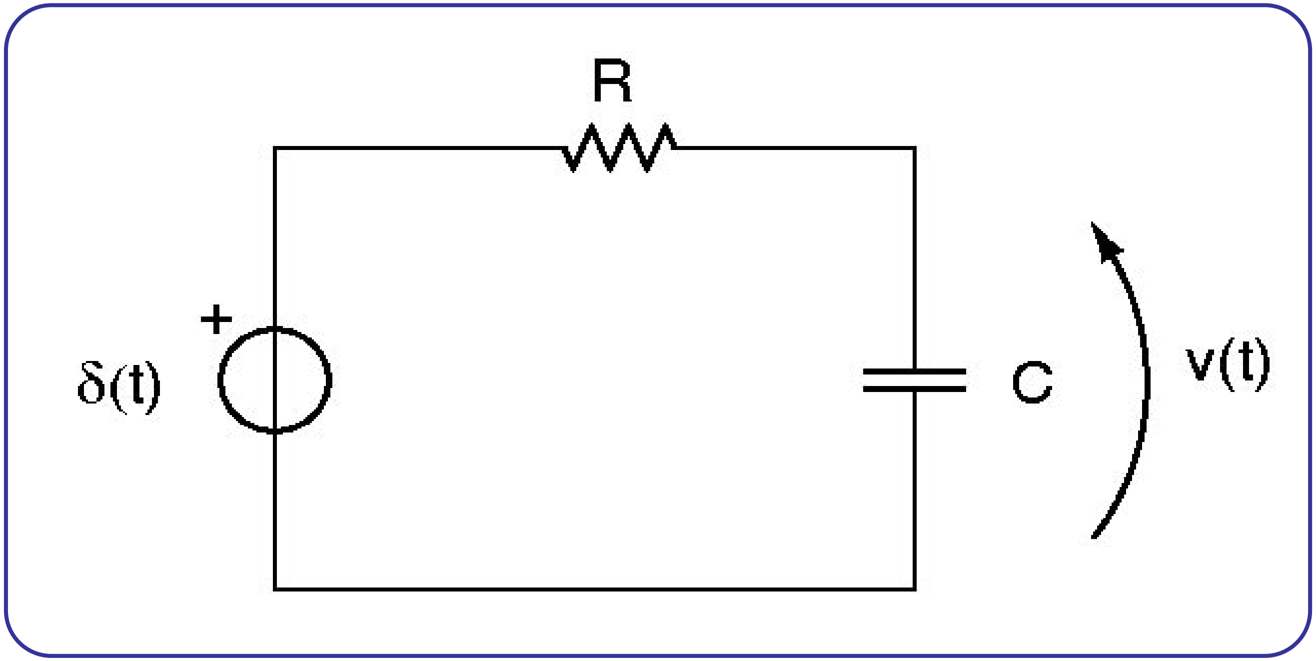
Applicazioni

Applicazioni

Presenza generatore impulsivo

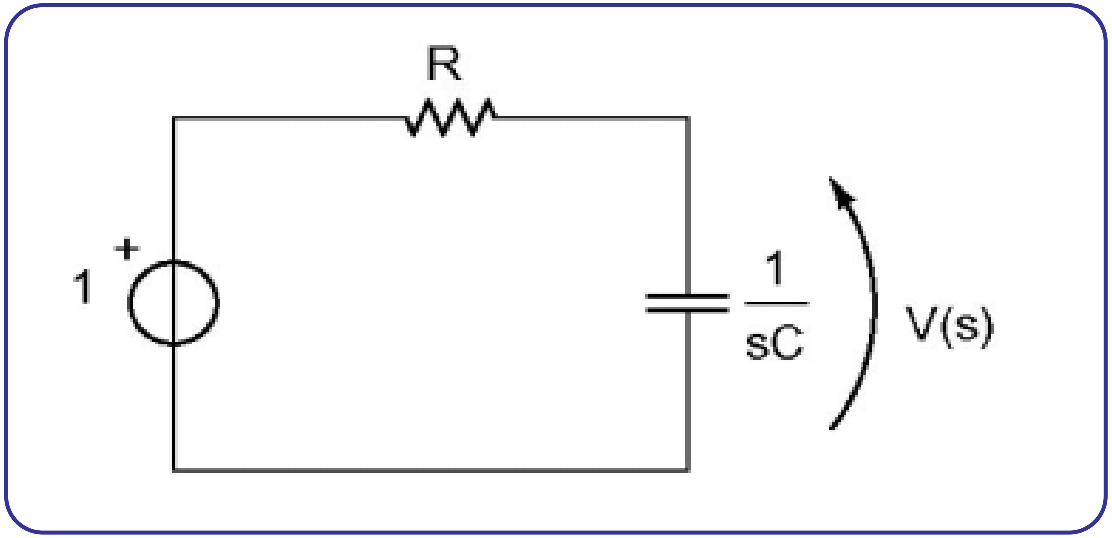
Rete nel dominio del tempo

- **Calcolare** $v(t)=v_C(t)$
  - rete nel dominio del tempo



Rete nel dominio di Laplace

- Condizione iniziale: $v(0_-) = 0$
- Trasformata Laplace ingresso $\Delta(s) = 1$
  - **rete nel dominio di Laplace**



$$V(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} 1 = \frac{1}{1 + sCR}$$

Risultati finali

- Valore iniziale:

$$v\,(0_+) = \lim_{s\to\infty}\left[sV(s)\right] = \frac{1}{CR} \neq v\,(0_-) = 0$$

- Poli della trasformata: $\alpha_o = -\dfrac{1}{RC}$

- Uscita $$v\,(t) = \frac{P(\alpha_o)}{Q'(\alpha_o)} e^{\alpha_o t} = \frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{CR}}$$

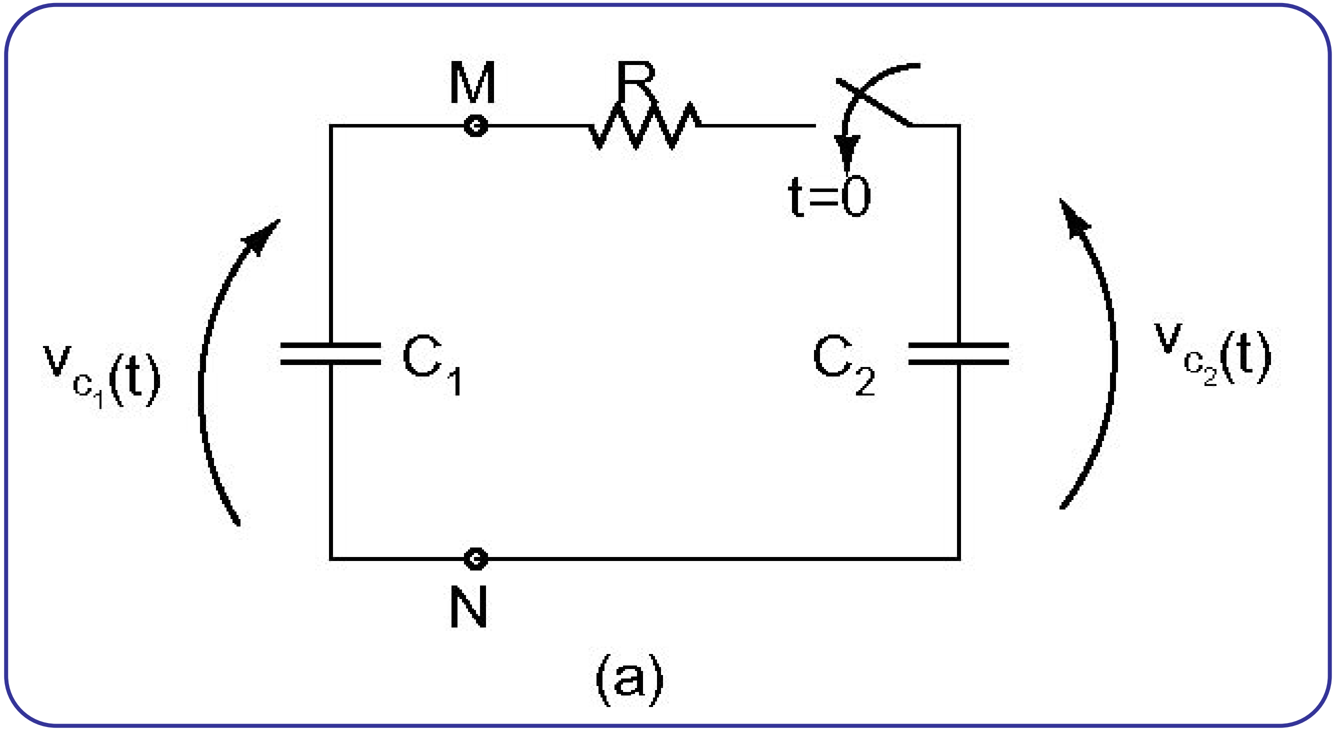
- Anche se la rete non è degenere, c'è discontinuità dello stato per la presenza di ingresso impulsivo

Applicazioni

Scarica condensatori in serie

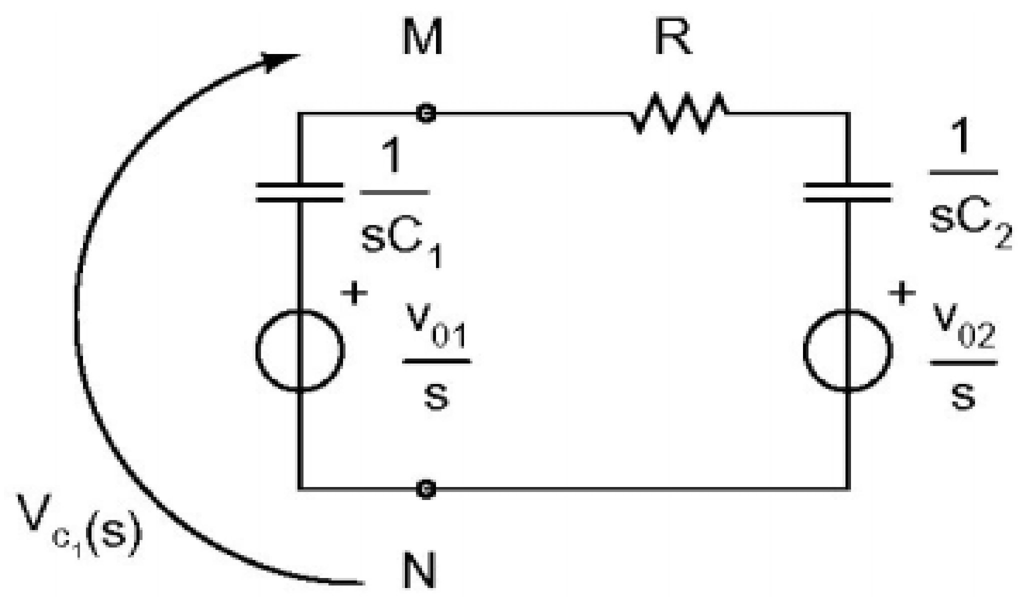
Rete nel dominio del tempo

- **Calcolare** $v_{C1}(t)$
  - rete nel dominio del tempo



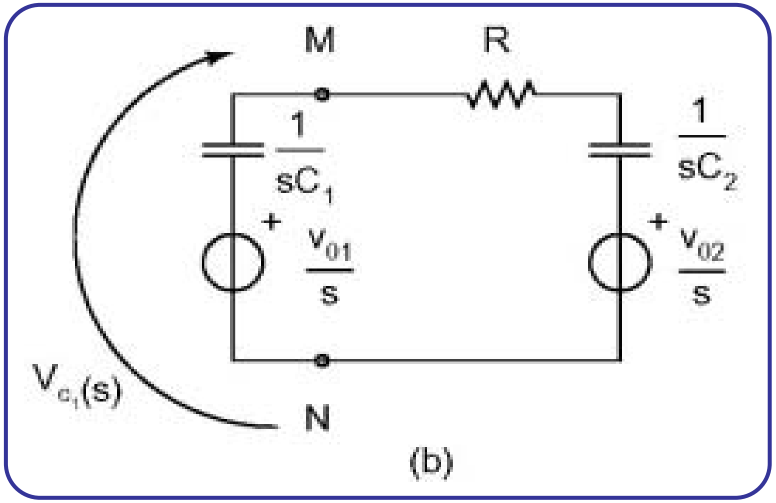
Rete nel dominio di Laplace 1/2

- Condizioni iniziali: $v_{C_1}(0\_) = \dfrac{Q_1}{C_1} = v_{01}, \qquad v_{C_2}(0\_) = \dfrac{Q_2}{C_2} = v_{02}$
- Non ci sono ingressi



(b)

Rete nel dominio di Laplace 2/2



- **Millman porge:**

$$V_{C_1}(s)=\frac{sC_1\dfrac{v_{01}}{s}+\dfrac{v_{02}}{s\left(R+\dfrac{1}{sC_2}\right)}}{sC_1+\dfrac{1}{R+\dfrac{1}{sC_2}}}=\frac{C_1\left(v_{01}+C_2 R\,s\,v_{01}\right)+C_2 v_{02}}{s\left(C_1+C_2+sRC_1C_2\right)}$$

Risultati finali 1/2

- **Valore finale:**

$$v_{C1}(\infty) = \lim_{s \to 0} \left[s V_{C1}(s) \right] = \frac{C_1 v_{01} + C_2 v_{02}}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$$

  – la carica totale si è conservata

- Poli della trasformata: $\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{R C_1 \| C_2}$

Risultati finali 2/2

- Poli della trasformata: $\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{RC_1 \| C_2}$

- Uscita:

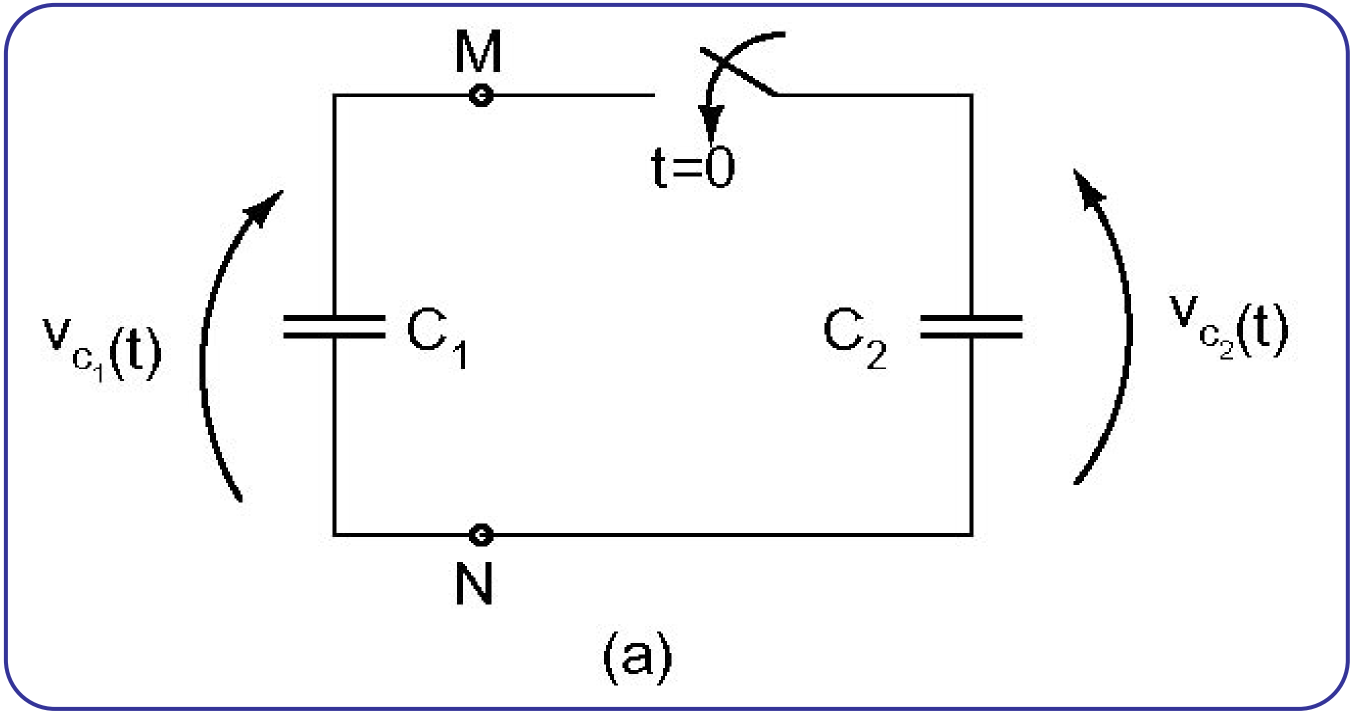
$$v_C(t) = \frac{P(\alpha_1)}{Q^{'}(\alpha_1)} e^{\alpha_1 t} + \frac{P(\alpha_2)}{Q^{'}(\alpha_2)} e^{\alpha_2 t} = v_{C_1}(\infty) + \left(v_{01} - v_{C_1}(\infty)\right) e^{\alpha_2 t}$$

Applicazioni

Maglia di condensatori

Rete nel dominio del tempo

- **Calcolare** $v_{C1}(t) = v_{C2}(t)$
  - rete nel dominio del tempo

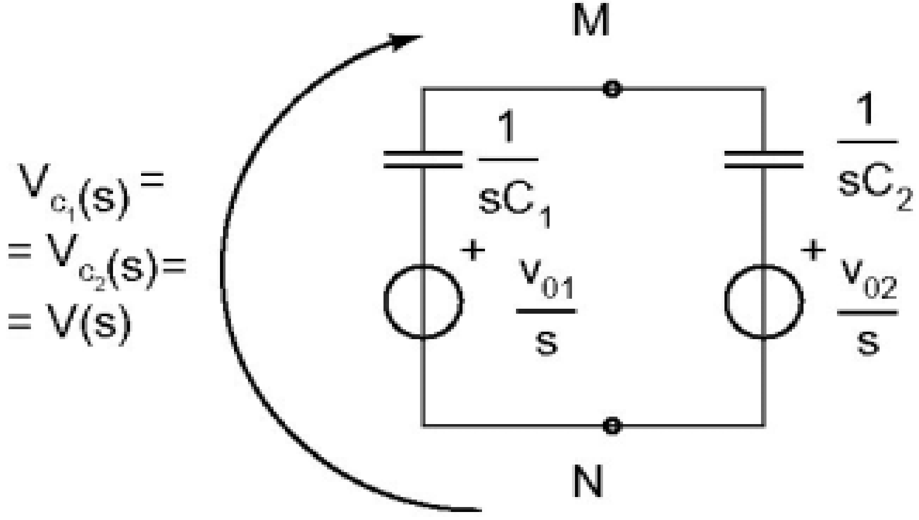


Rete nel dominio di Laplace 1/2

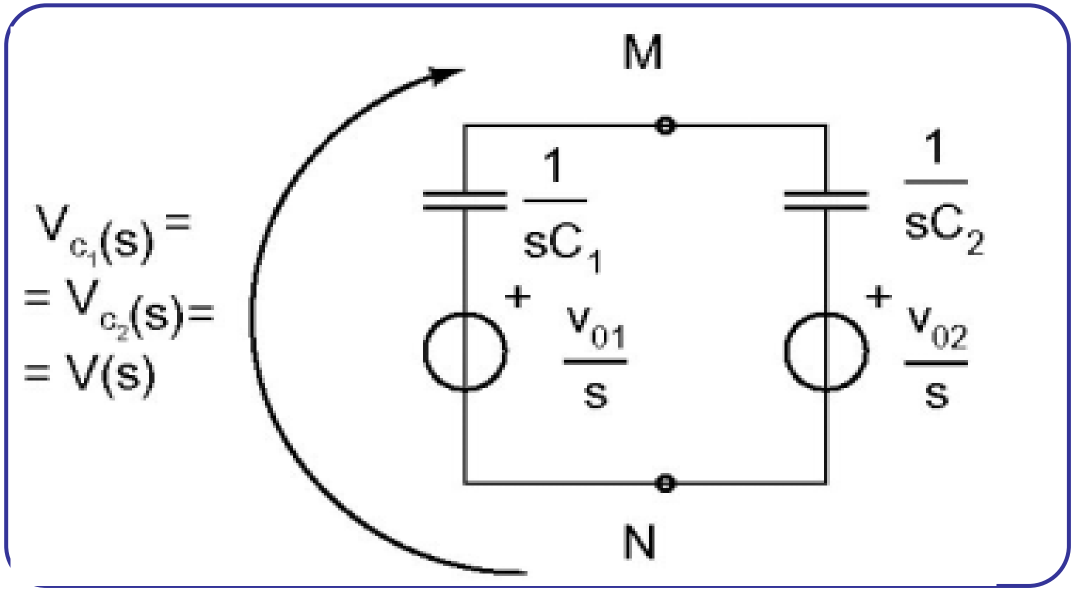
- Condizioni iniziali:

$$v_{C_1}(0_-) = \frac{Q_1}{C_1} = v_{01}, \qquad v_{C_2}(0_-) = \frac{Q_2}{C_2} = v_{02}$$

- Non ci sono ingressi



Rete nel dominio di Laplace 2/2



- **Millman porge:**

$$V_{C_1}(s) = \frac{sC_1 \dfrac{v_{01}}{s} + sC_2 \dfrac{v_{02}}{s}}{sC_1 + sC_2} = \frac{C_1 v_{01} + C_2 v_{02}}{s\left(C_1 + C_2\right)}$$

Risultati finali 1/2

- Valore finale

$$v_{C1}(\infty) = \lim_{s \to 0} \left[s V_{C1}(s) \right] = \frac{C_1 v_{01} + C_2 v_{02}}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$$

- Valore iniziale

$$v_{C1}(0_+) = \lim_{s \to \infty} \left[s V_{C1}(s) \right] = \frac{C_1 v_{01} + C_2 v_{02}}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$$

  - **la carica totale si è conservata**

Risultati finali 2/2

- Poli della trasformata: $\alpha_0 = 0$

- Uscita:

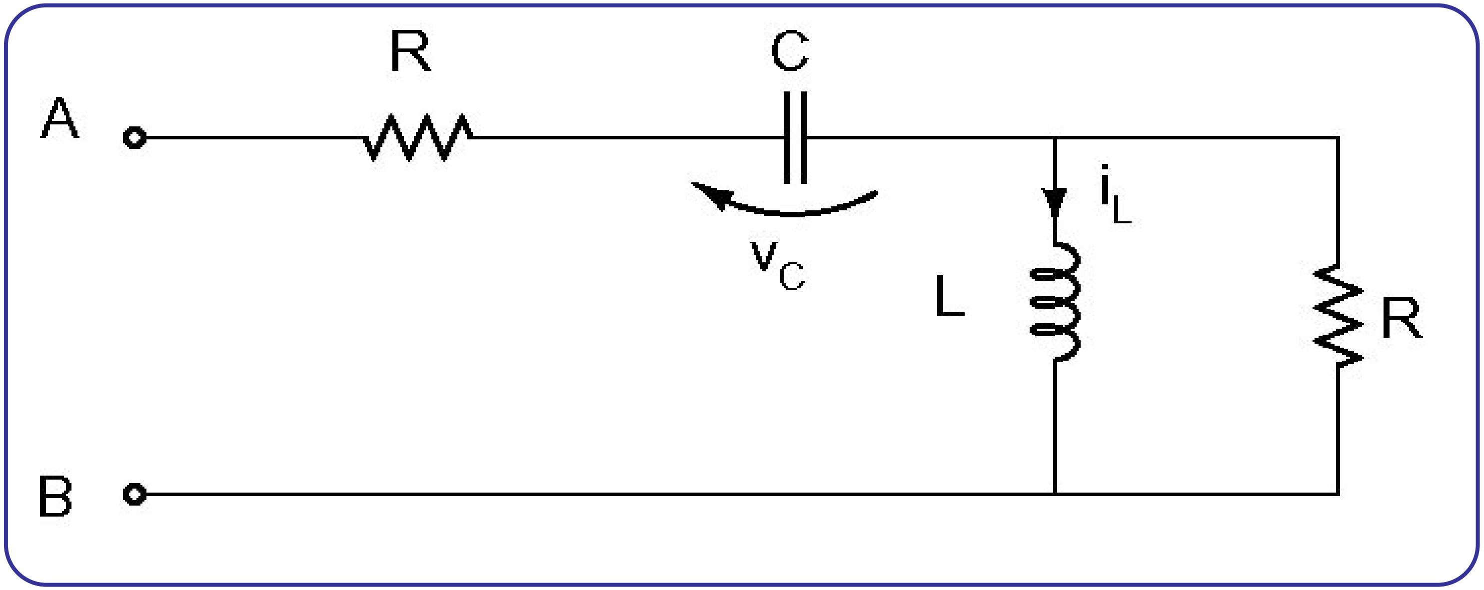
$$v_{C_1}(t) = v_{C_2}(t) = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} e^{\alpha_1 t} = \frac{C_1 v_{01} + C_2 v_{02}}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$$

Applicazioni

Effetto condizioni iniziali

Rappresentazione Thevenin 1/4

- **Rappresentare** con Thevenin nel dominio di Laplace la rete indicata in figura

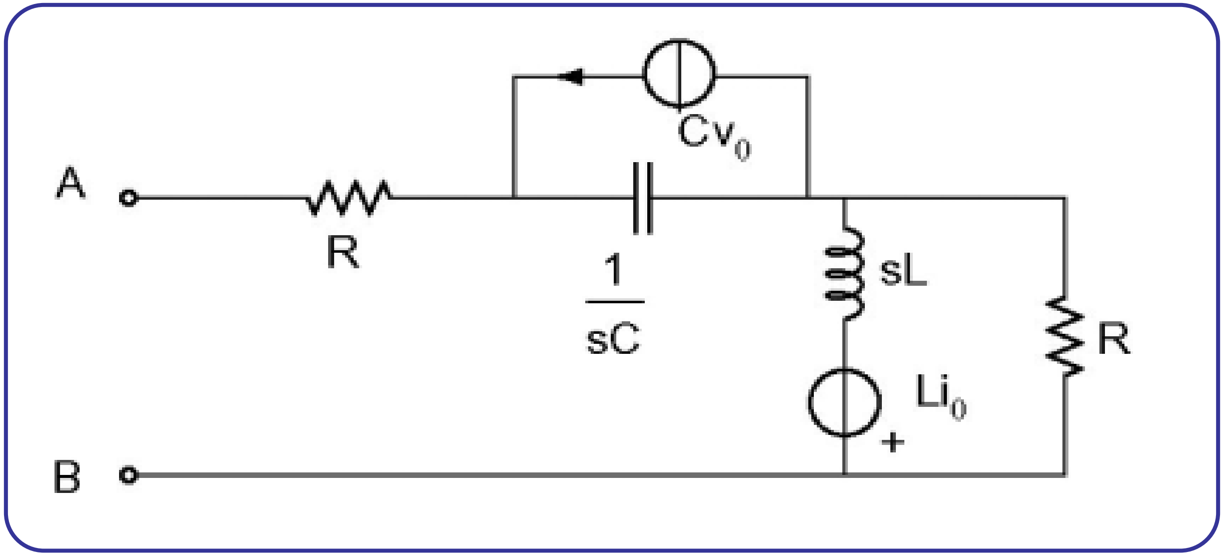


Rappresentazione Thevenin 2/4

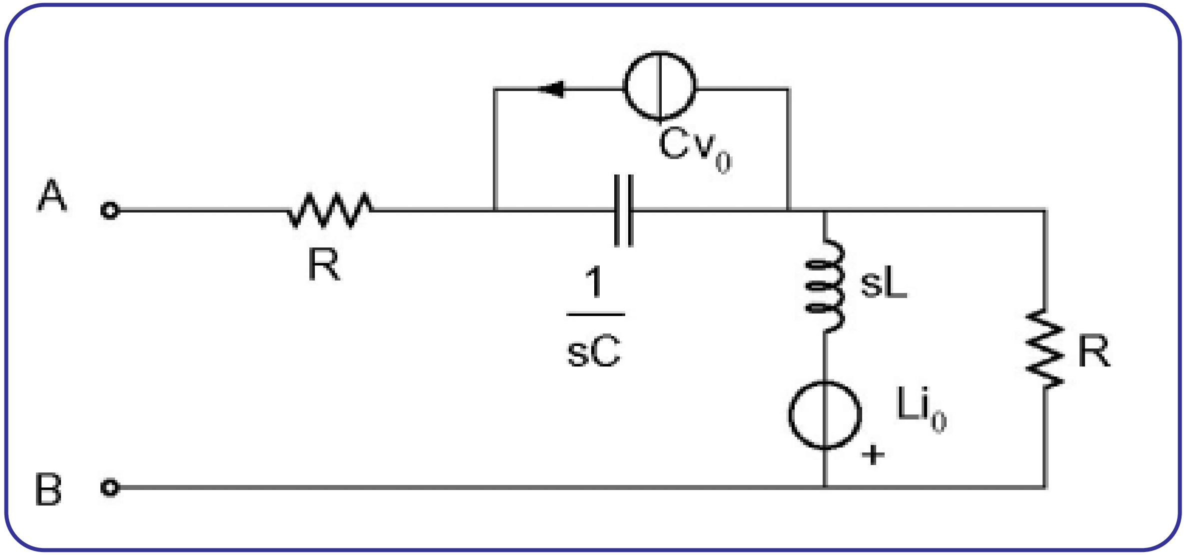
- **Condizioni iniziali:**

$$v_C(0_-) = v_0, \qquad i_L(0_-) = i_0$$

– Bipolo nel dominio di Laplace



Rappresentazione Thevenin 3/4

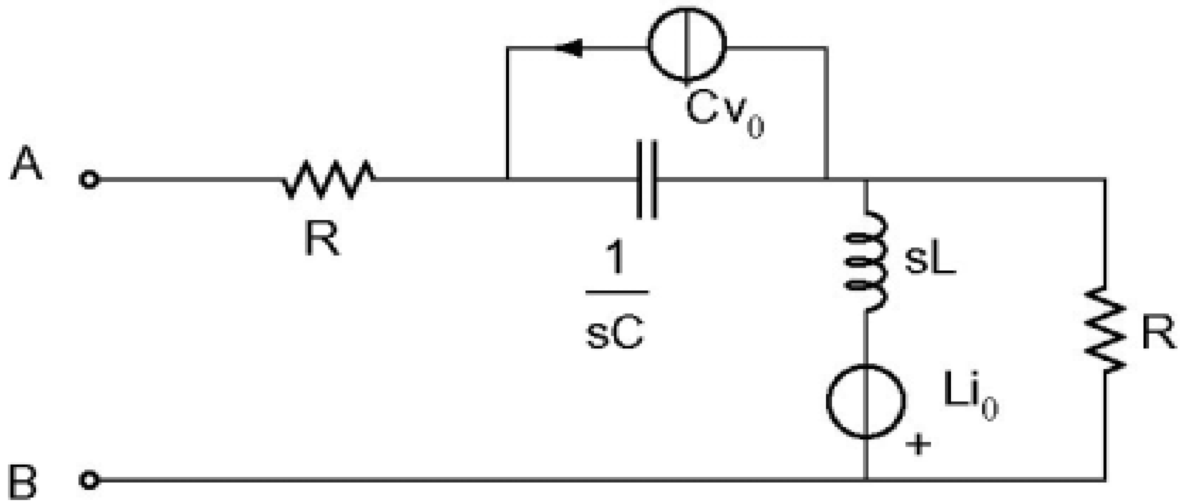


– Impedenza equivalente:

- reso inerte il bipolo risulta:

$$Z(s) = R + \frac{1}{sC} + R \,\|\, (sL) = R + \frac{1}{sC} + \frac{s\,R\,L}{R + sL}$$

Rappresentazione Thevenin 4/4



– Tensione a vuoto:

- usando sovrapposizione:

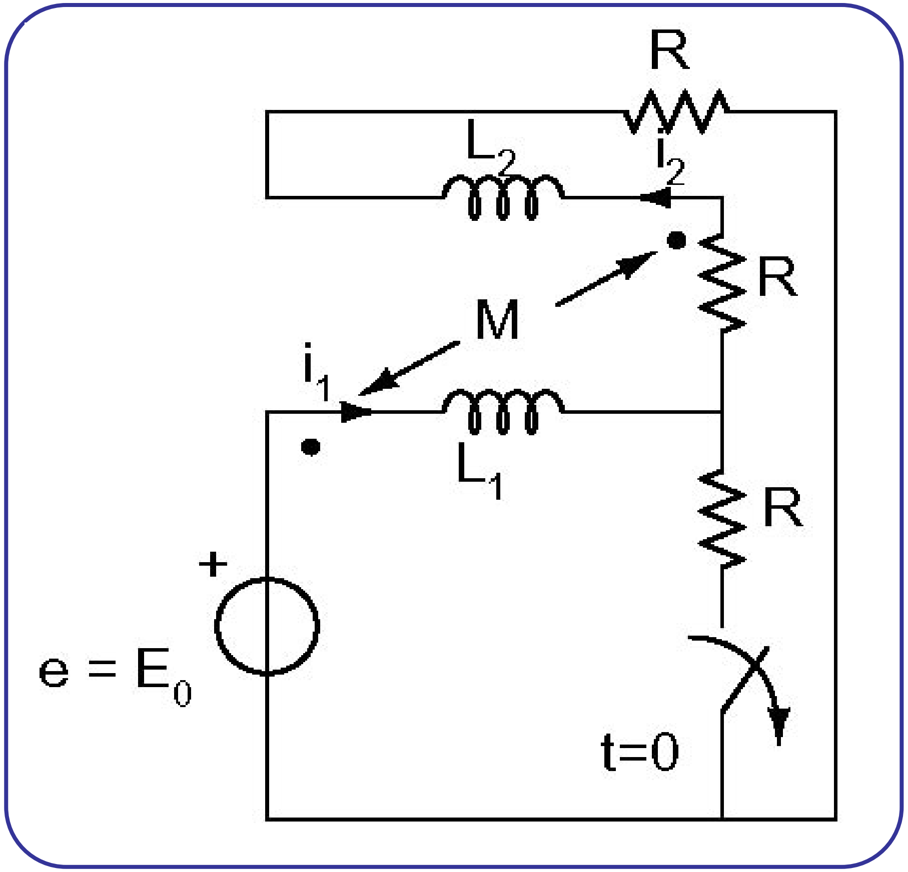
$$V_o(s) = -\frac{R}{R+sL} L i_o + \frac{v_o}{s}$$

Applicazioni

Reti degeneri

Rete nel dominio del tempo

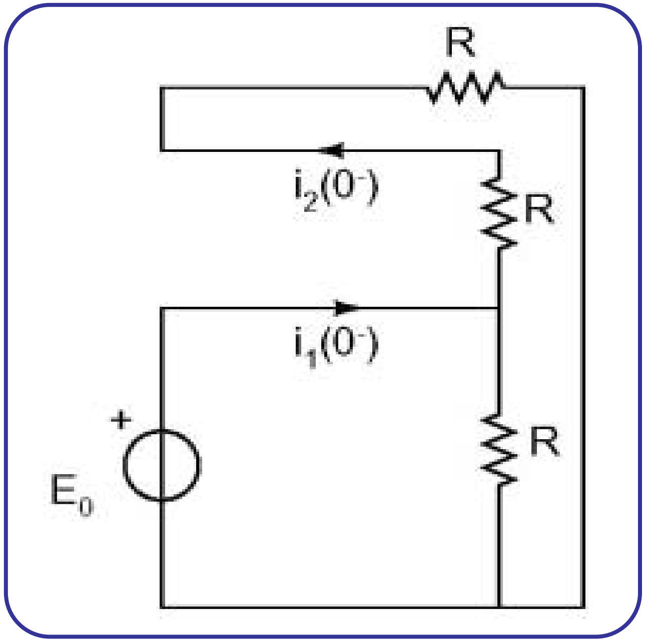
- **Calcolare** il valore iniziale i(0+)
  - rete nel dominio del tempo



Calcolo dati nel dominio di Laplace 1/2

- **Condizioni iniziali:**
- Prima dell'apertura dell'interruttore:

$$i_1(0_-) = \frac{E_o}{(R+R)\parallel R} = \frac{3}{2}\frac{E_o}{R}, \qquad i_2(0_-) = \frac{R}{R+2R} i_1(0_-) = \frac{E_o}{2R}$$



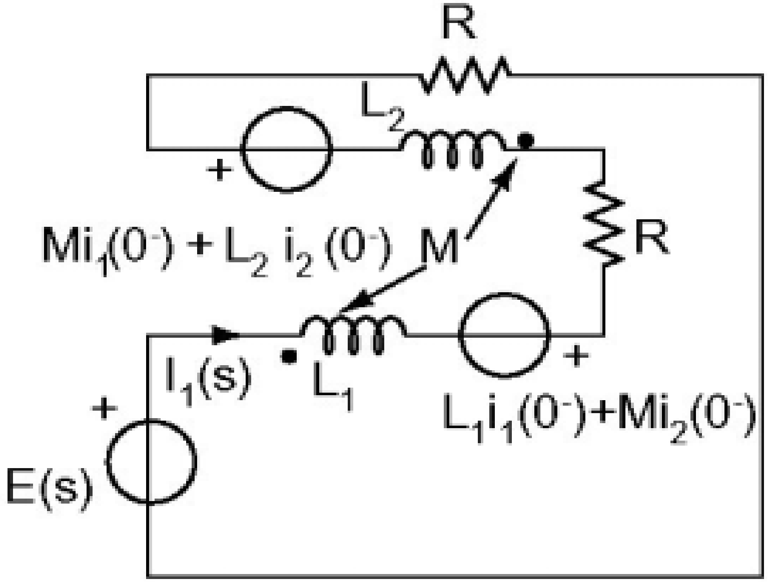
Calcolo dati nel dominio di Laplace 2/2

- L'ingresso costituito dal generatore costante E_o da luogo a:

$$\boxed{E(s) = \frac{E_o}{s}}$$

Rete nel dominio di Laplace 1/2

– **Utilizzando il circuito equivalente** dei trasformatori risulta:



Dall'equazione sull'unica maglia risulta:

$$I_1(s) = I(s) = \frac{\frac{E_o}{s} + \left(L_1 + M\right) i_1(0_-) + \left(L_2 + M\right) i_2(0_-)}{2R + s\left(L_1 + L_2 + 2M\right)}$$

Risultato finale

– È richiesto solo il **valore iniziale**:

$$I(s) = \frac{\frac{E_o}{s} + (L_1 + M)\, i_1(0_-) + (L_2 + M)\, i_2(0_-)}{2R + s(L_1 + L_2 + 2M)}$$

$$i(0_+) = \underset{s \to \infty}{Lim}\,(sI(s)) = \frac{(L_1 + M)\, i_1(0_-) + (L_2 + M)\, i_2(0_-)}{L_1 + L_2 + 2M} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(L_1 + M) + \frac{1}{2}(L_2 + M)}{L_1 + L_2 + 2M}\,\frac{E_o}{R} \neq i_1(0_-) \neq i_2(0_-)$$

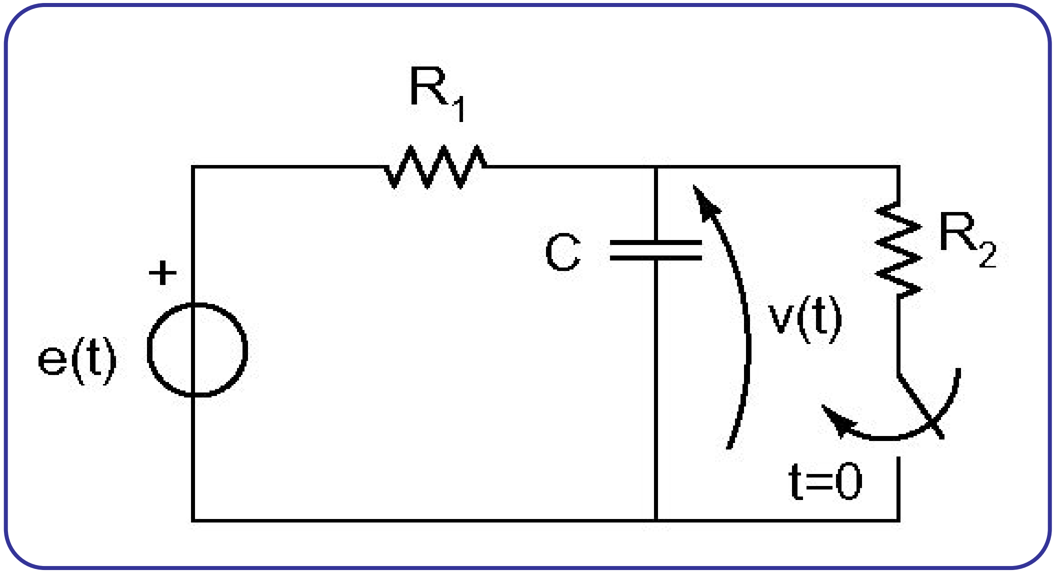
– stato discontinuo (rete degenere!)

Applicazioni

Ingresso discontinuo

Rete nel dominio del tempo 1/2

- **Calcolare la tensione** v(t) sul condensatore
  - rete nel dominio del tempo

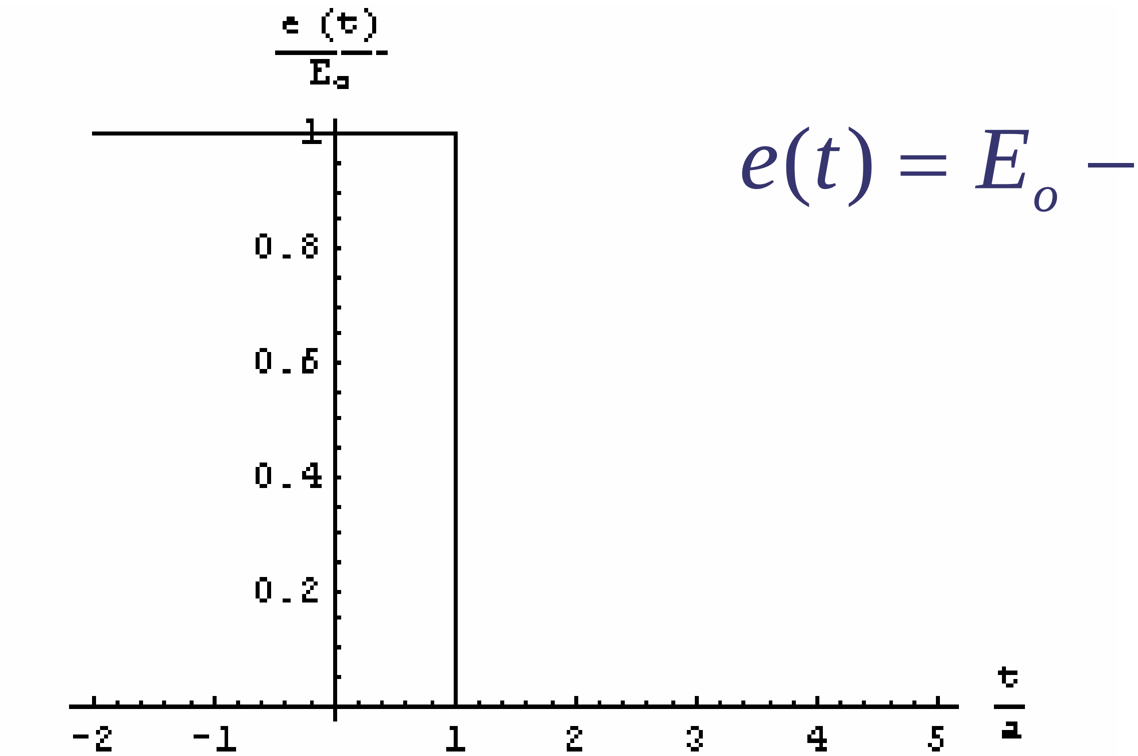


Ingresso discontinuo:

$$e(t) = E_o - E_o u(t-a)$$

Rete nel dominio del tempo 2/2

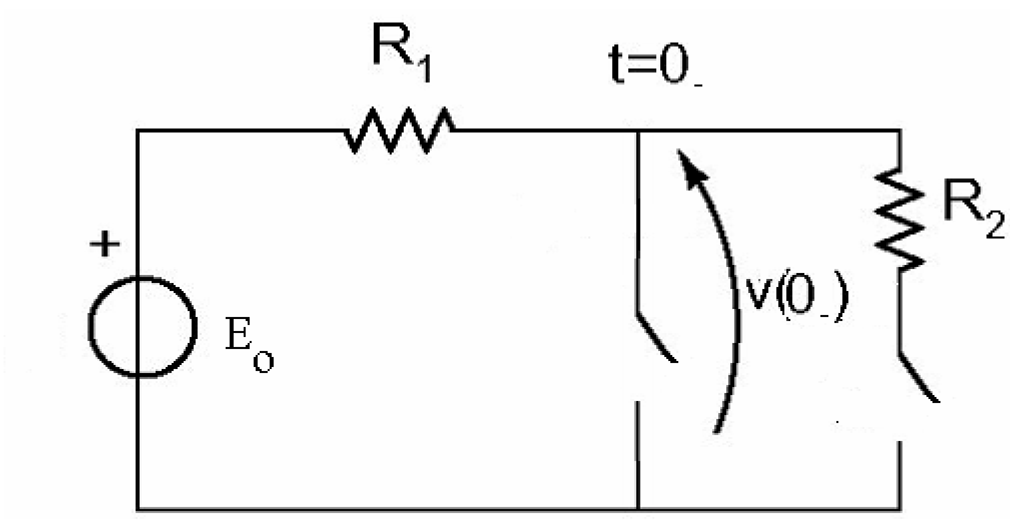
Ingresso discontinuo:



$$e(t) = E_o - E_o u(t-a)$$

Calcolo dati nel dominio di Laplace 1/2

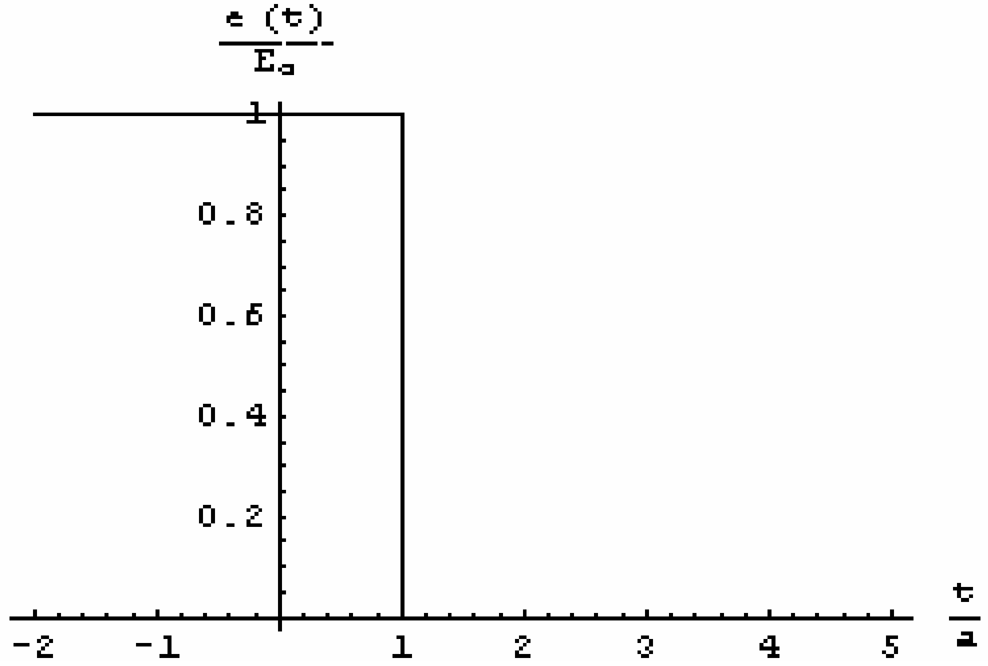
- Condizioni iniziali:
  - Prima dell'apertura dell'interruttore l'ingresso vale E_o da molto tempo
    - Regime stazionario: $v(0_-) = E_o$



Calcolo dati nel dominio di Laplace 2/2

- **Trasformata E(s)** dell'ingresso

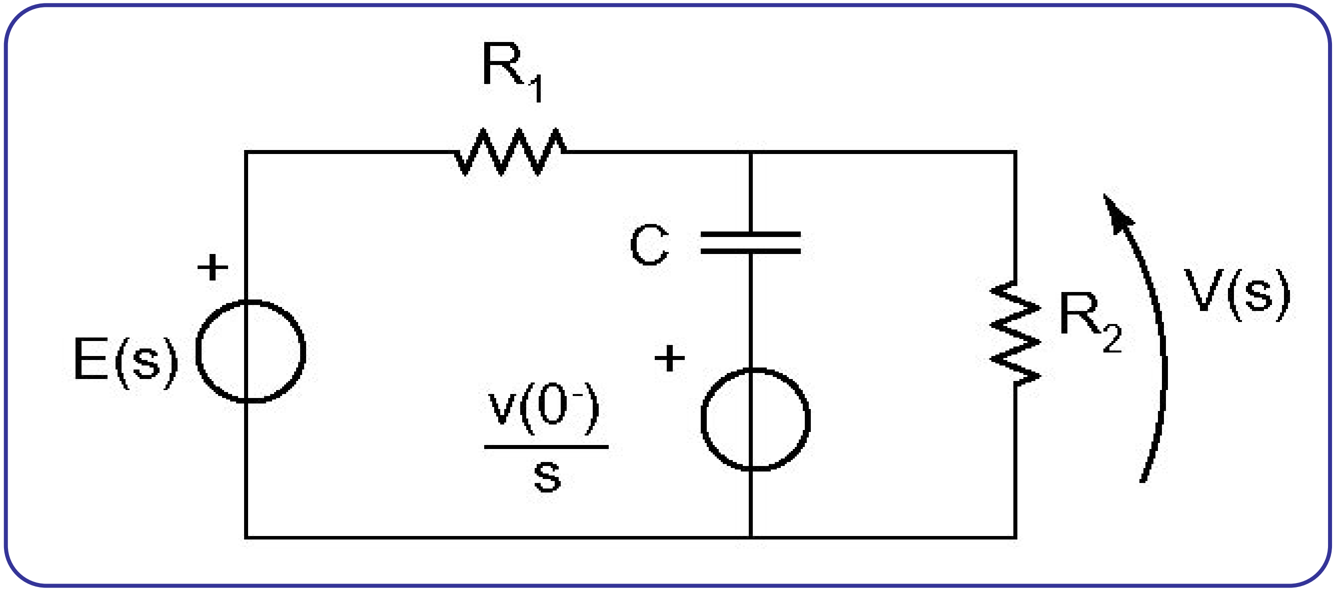
$$e(t) = E_o - E_o u(t-a)$$



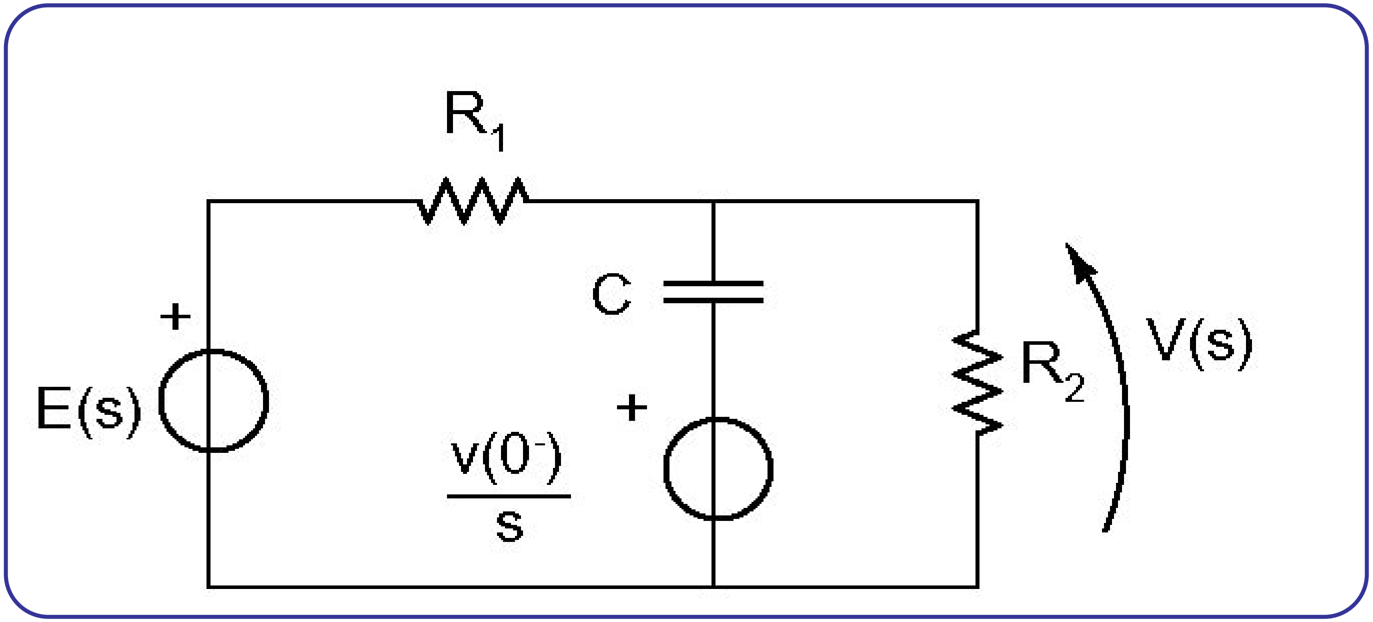
$$E(s) = \frac{E_o}{s} - \frac{E_o}{s} e^{-as}$$

Rete nel dominio di Laplace 1/3

- Rete nel dominio di Laplace



Rete nel dominio di Laplace 2/3



– **si ottiene (Millman):**

$$V(s) = \frac{\dfrac{E(s)}{R_1} + sC\,\dfrac{v(0_-)}{s}}{\dfrac{1}{R_1} + s\,C + \dfrac{1}{R_2}}$$

Rete nel dominio di Laplace 3/3

– **Separando il termine esponenziale:**

$$V(s)=\frac{\dfrac{E(s)}{R_1}+sC\dfrac{v(0_-)}{s}}{\dfrac{1}{R_1}+sC+\dfrac{1}{R_2}}=$$

$$=\underbrace{\frac{R_2+CR_1R_2s}{s(R_1+R_2+CR_1R_2s)}E_o}_{\Uparrow}-\underbrace{\frac{E_o}{R_1s(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+sC)}e^{-as}}_{\Uparrow}$$

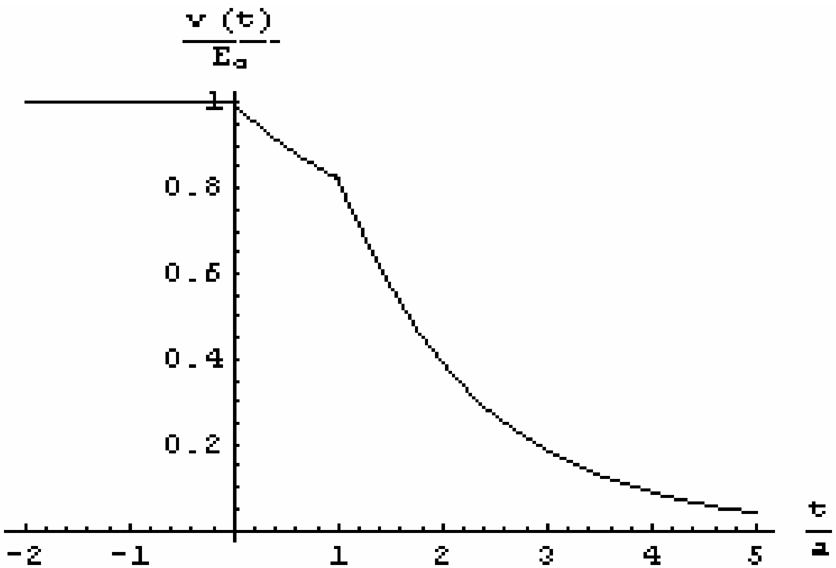
Razionale fratta

Razionale fratta x esponen.

Risultati finali

- **Antitrasformando**:

$$v(t)=\frac{R_2+R_1e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_2+R_1}E_o+\frac{R_2(-1+e^{-\frac{t-a}{\tau}})}{R_2+R_1}E_ou(t-a), \qquad \tau=CR_1 \parallel R_2$$



$$R_1=1\Omega, \quad R_2=1\Omega, \quad C=2F$$

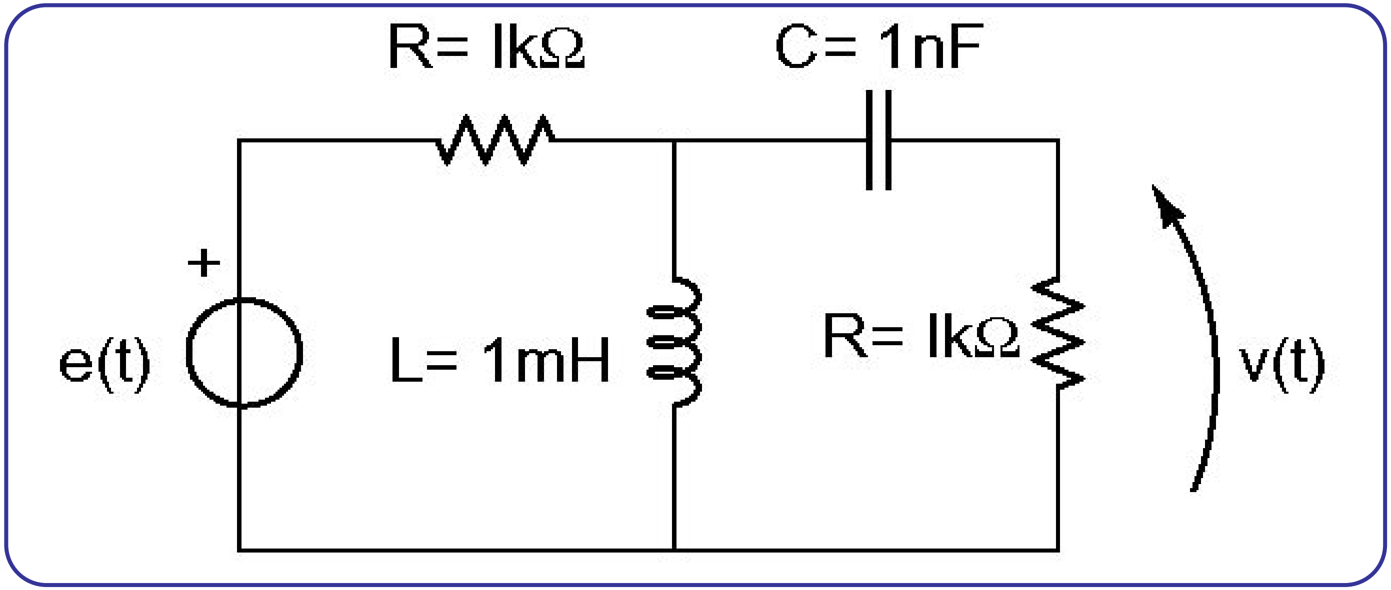
– stato continuo **(rete non degenere!)**

Applicazioni

Ingresso costituito da impulso triangolare

Rete nel dominio del tempo 1/2

- Calcolare la **tensione v(t)**
  - rete nel dominio del tempo



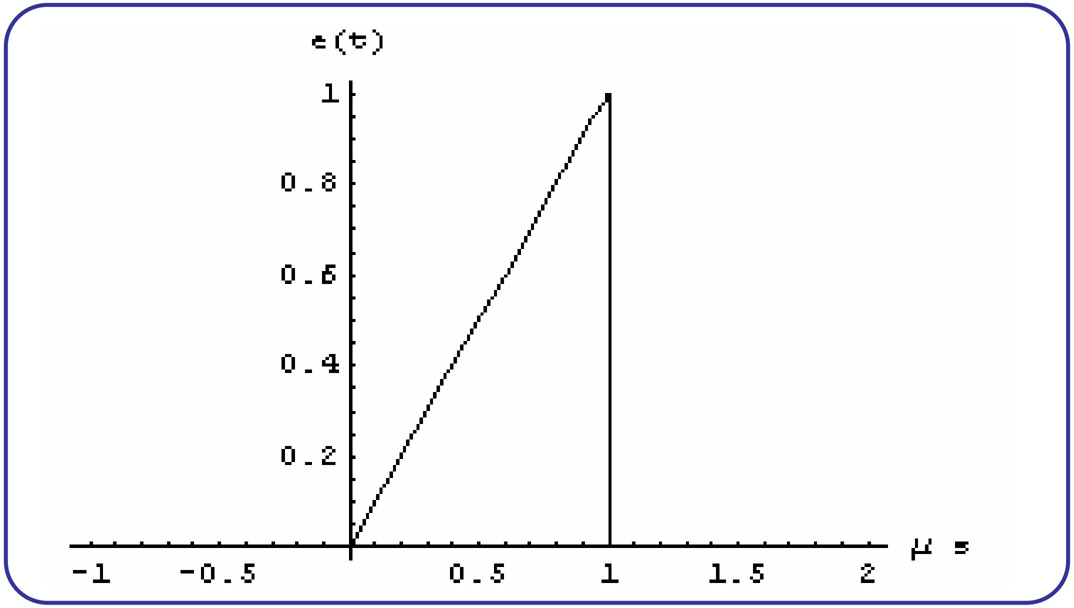
Ingresso: Impulso triangolare

Rete nel dominio del tempo 2/2

Ingresso: Impulso triangolare

$$e(t) = \frac{M}{a} t \left[u(t) - u(t-a) \right]$$

M=1 V, a= 1 micro secondo

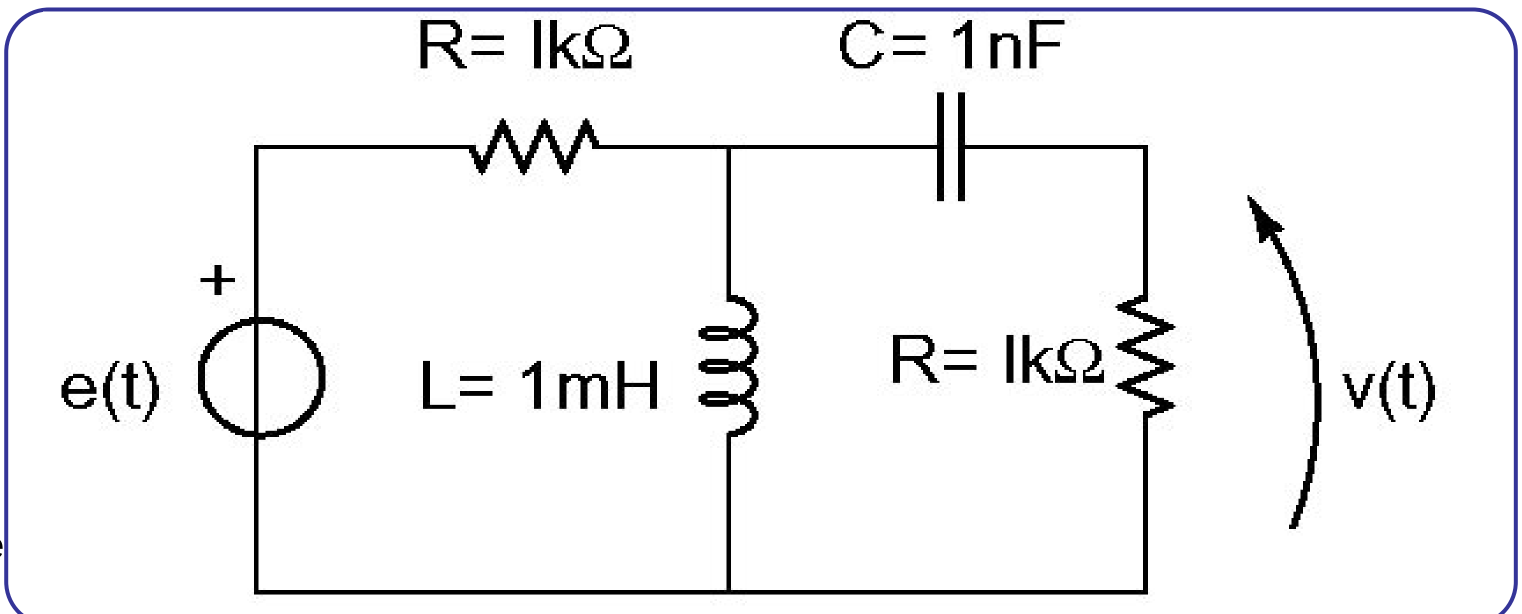


Considerazioni sulle unità di misura

- **I valori dei parametri della rete sono tipici**
  - per non introdurre fastidiose potenze di 10 conviene utilizzare un sistema (coerente) di misure in cui:
    - le correnti si misurano in mA
    - le tensioni si misurano in V
    - i tempi si misurano in micro secondi
    - le frequenze si misurano in MHz
    - le resistenze si misurano in Kilo ohm
    - le induttanze si misurano in mH
    - le capacità si misurano in nF

Calcolo dati nel dominio di Laplace 1/2

- **Condizioni iniziali**:
  - Prima dell'apertura dell'interruttore l'ingresso è nullo da molto tempo
    - Induttore e condensatore scarichi:
      - Condizioni iniziali nulle:



Calcolo dati nel dominio di Laplace 2/2

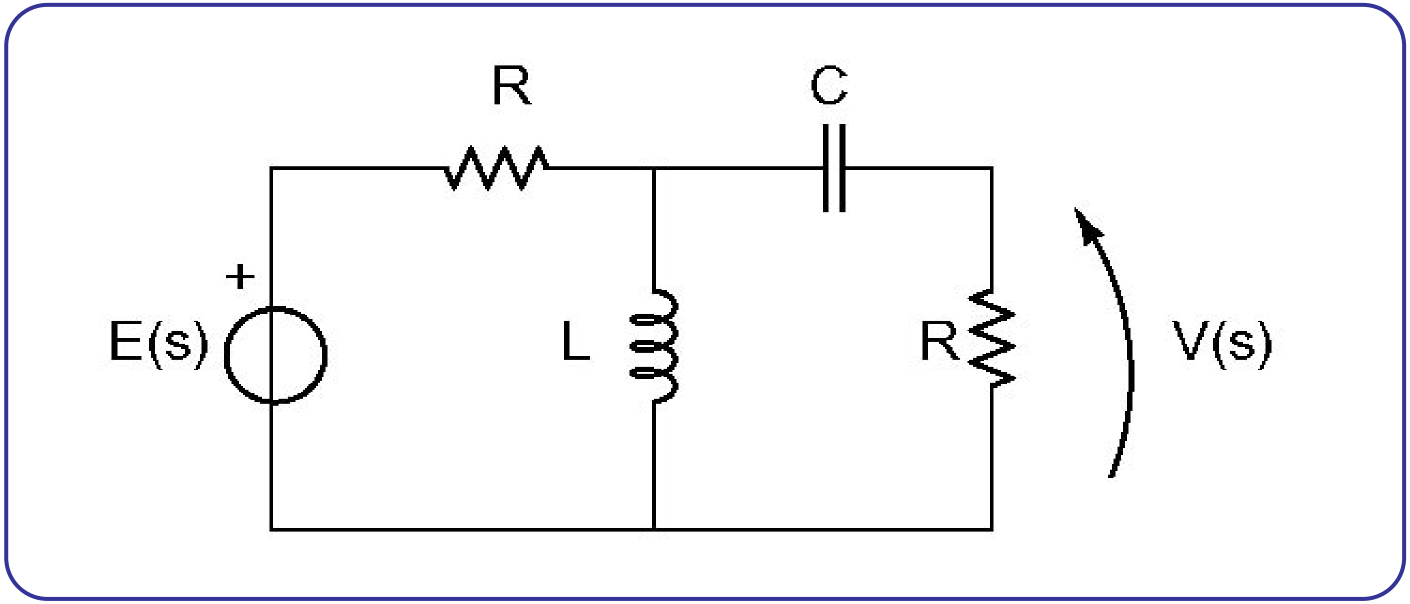
- Trasformata E(s) dell'ingresso e(t)

$$e(t) = \frac{M}{a} t\left[u(t) - u(t-a)\right] = t\,u(t) - [1 + (t-1)]u(t-1)$$

$$E(s) = \frac{1}{s^2} - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-s} = \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2}e^{-s}$$

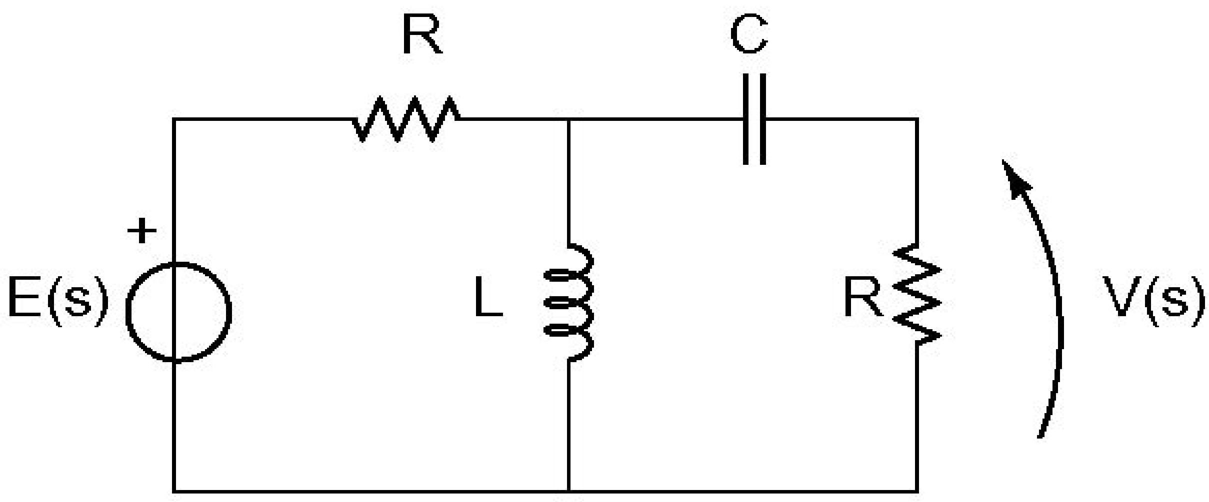
Rete nel dominio di Laplace 1/3

- rete nel **dominio di Laplace**



  – Per calcolare V(s) usare cascata di partitori di tensione

Rete nel dominio di Laplace 2/3



– **si ottiene:**

$$V(s) = \frac{(R + \frac{1}{sC}) \,||\, (sL)}{(R + \frac{1}{sC}) \,||\, (sL) + R} \, \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} E(s)$$

Rete nel dominio di Laplace 3/3

– Separando il termine esponenziale:

$$V(s) = \frac{(R+\frac{1}{sC}) \,\|\, (sL)}{(R+\frac{1}{sC}) \,\|\, (sL) + R} \; \frac{R}{R+\frac{1}{sC}} E(s) =$$

$$= \frac{1}{2s^2+2s+1} - \frac{s+1}{2s^2+2s+1} e^{-s}$$

$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

Razionale fratta **Razionale fratta x espon.**

Antitrasformazione 1/2

- **Antitrasformazione** $V(s) = \frac{1}{2s^2+2s+1} - \frac{s+1}{2s^2+2s+1}e^{-s}$

  – Antitrasformazione: $\frac{1}{2s^2+2s+1}$

  – Poli complessi coniugati $s_{1,2} = \frac{-1 \pm j}{2}$

  – Residuo $R[s_1] = \frac{1}{4s_1+2} = -\frac{j}{2}$

  – si ottiene:

$$\boxed{\frac{1}{2s^2+2s+1} \quad \Rightarrow \quad 2\,\mathrm{Re}\{R[s_1]e^{s_1 t}\} = e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Antitrasformazione 2/2

- **Antitrasformazione** $-\dfrac{s+1}{2s^2+2s+1}e^{-s}$
  - fattore razionale $-\dfrac{s+1}{2s^2+2s+1}$
  - Poli complessi coniugati $s_{1,2}=\dfrac{-1\pm j}{2}$
  - Residuo $R_e[s_1]=-\dfrac{s_1+1}{4s_1+2}=\dfrac{-1+j}{4}$
- **si ottiene:**

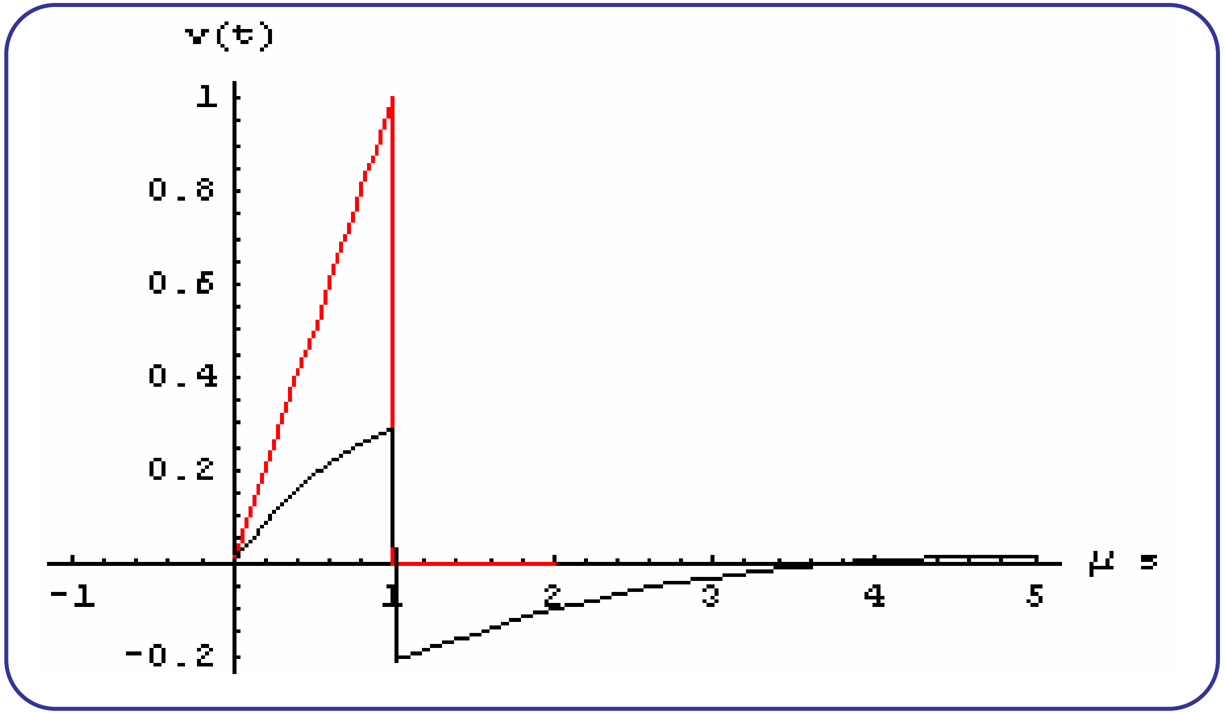
$$\boxed{-\frac{s+1}{2s^2+2s+1} \quad\Rightarrow\quad 2\,\mathrm{Re}\{R[s_1]e^{s_1 t}\}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}[\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\cos\left(\frac{t}{2}\right)]}$$

$$\boxed{-\frac{s+1}{2s^2+2s+1}e^{-s} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}e^{-\frac{t-1}{2}}[\sin\left(\frac{t-1}{2}\right)+\cos\left(\frac{t-1}{2}\right)]u(t-1)}$$

Risultati finali

- Risultato finale:

$$v(t)=e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t}{2}\right)u(t)-\frac{1}{2}e^{-\frac{t-1}{2}}[\sin\left(\frac{t-1}{2}\right)+\cos\left(\frac{t-1}{2}\right)]u(t-1)$$



– Uscita discontinua (**non è una variabile di stato!**)