Unità 3

Reti nel dominio delle frequenze

Reti nel dominio delle frequenze

Introduzione

Introduzione

Contenuto Unità 3

Cosa c'è nell'Unità 3

- In questa sezione si affronteranno
  - Introduzione all'Unità
  - Trasformate di Laplace
  - Reti nel dominio di Laplace
  - Applicazioni
  - Trasformate di Fourier

Introduzione

Scopi dell'Unità

Generalizzazione calcolo simbolico

- **Limiti** calcolo simbolico basato sui fasori
  - Ingressi sinusoidali

- **Generalizzazione** per ingressi arbitrari:
  - Metodo delle Trasformate di Laplace
  - Metodo delle Trasformate di Fourier

Reti nel dominio delle frequenze

Trasformate di Laplace

Trasformate di Laplace

Definizioni

Elemento analitico

- **Integrale importante** definito su un segnale arbitrario f(t) :

$$\mathrm{L}[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

  - L'intervallo comincia da zero meno per consentire la presenza di segnali impulsivi nell'origine
  - L'integrale rimane lo stesso se il segnale viene reso causale (cioè nullo per t<0)
  - **s** è una **variabile complessa** arbitraria che ha dimensioni di pulsazione $s = \sigma + j\omega$

Osservazioni 1/2

- **Non** necessariamente l'integrale esiste per tutti i valori della variabile complessa s
  - La regione del piano s dove l'integrale esiste si chiama **regione di regolarità (o di convergenza)**
  - Nella regione del piano complesso s, dove esso esiste, l'integrale rappresenta un **elemento analitico** di un funzione analitica F(s).

Osservazioni 2/2

- La funzione analitica F(s) si può definire per tutti i valori di s usando un **prolungamento analitico**

- La funzione analitica F(s) viene chiamata **trasformata di Laplace** del segnale f(t)
  - Le trasformate e le funzioni da cui derivano si indicano con la stessa lettera. In **maiuscolo** la Trasformata, in **minuscolo** la funzione da trasformare

Trasformate di Laplace

Trasformate importanti

Trasformata dell'impulso

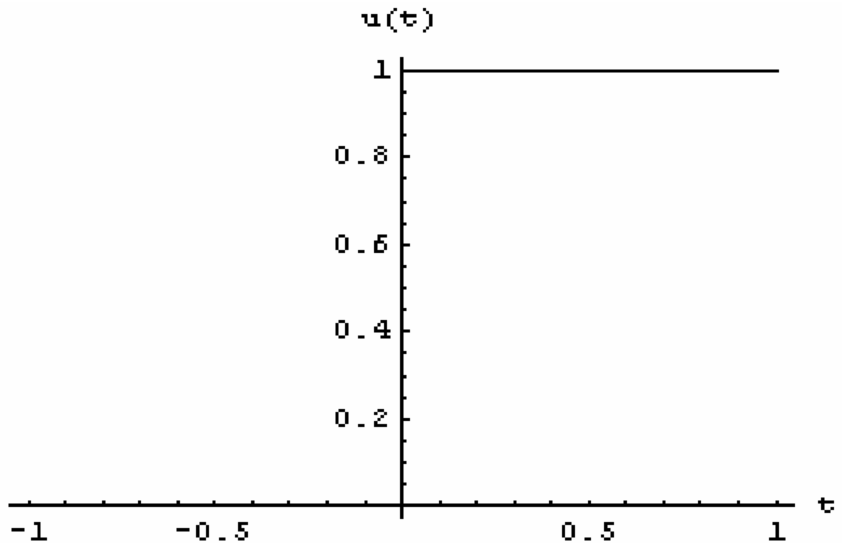
$$f(t) = \delta(t)$$

$$\mathrm{L}[\delta(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 = \Delta(s)$$

- **L'elemento analitico** definisce la trasformata di Laplace in tutto il piano complesso
  - La regione di regolarità è tutto il piano complesso

Trasformata del gradino 1/2

$$\boxed{f(t) = u(t)}$$



$$\mathrm{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}[s] > 0$$

- L'elemento analitico definisce la trasformata di Laplace per **Re[s]>0**

Trasformata del gradino 2/2

- La **regione di regolarità** è il semipiano verticale limitato dall'asse immaginario

- Il prolungamento analitico di 1/s rimane 1/s in tutto il piano complesso

- Si ha: $$\boxed{U(s) = \frac{1}{s}}$$

Trasformata di una costante

$$f(t) = c$$

- Poiché la trasformata di Laplace di una funzione coincide con la trasformata di Laplace della sua parte causale risulta immediatamente:

$$\boxed{C(s) = c\,U(s) = \frac{c}{s}}$$

Trasformate di Laplace

Proprietà delle Trasformate di Laplace

Linearità

- La trasformata di Laplace di una **combinazione lineare di segnali** è data dalla combinazione lineare delle trasformate di Laplace con gli stessi coefficienti

$$f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + ..C_n f_n(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(s) = C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s) + ..C_n F_n(s)}$$

Derivazione

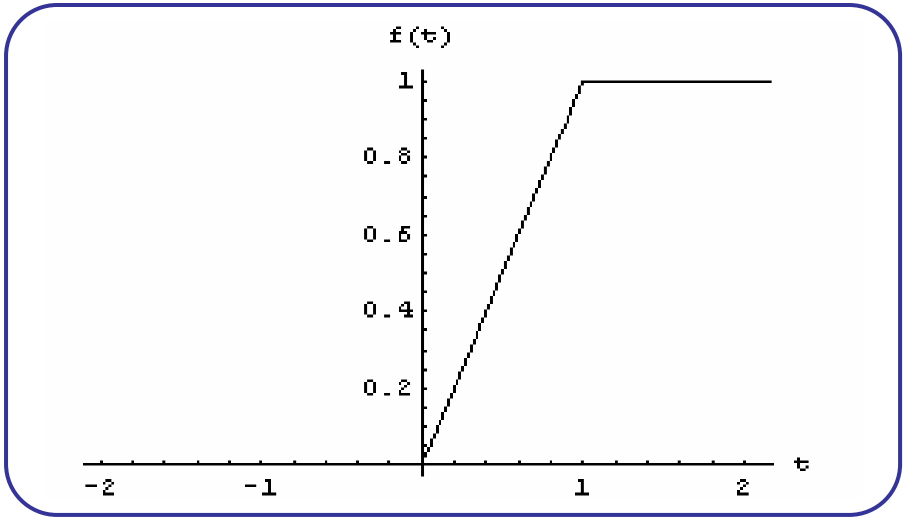
- La trasformata di Laplace **della derivata di un segnale** è (a meno di una costante legata alla condizione iniziale) proporzionale alla trasformata del segnale con fattore s

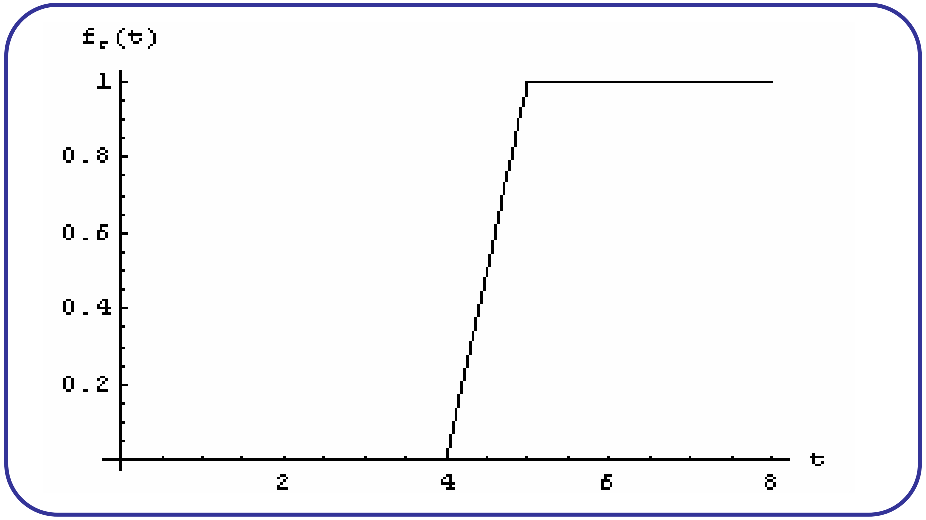
$$g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{G(s) = s\,F(s) - f(0_-)}$$

Translazione





- **funzione ritardata** $f_r(t)$

$$f(t) \quad \Rightarrow \quad f_r(t) = f(t - t_o)u(t - t_o)$$

Trasformata di Laplace funzione ritardata $f_r(t)$

$$\boxed{F_r(s) = F(s)e^{-s\,t_o}}$$

Modulazione

- **Funzione modulata** $f_m(t)$

$$f(t) \quad \Rightarrow \quad f_m(t) = f(t)e^{s_o t}$$

- **Trasformata di Laplace** funzione modulata $f_m(t)$

$$\boxed{F_m(s) = F(s - s_o)}$$

Moltiplicazione per potenze di t

- **Funzione moltiplicata** per t^n

$$f(t) \quad \Rightarrow \quad f_n(t) = t^n f(t)$$

- **Trasformata di Laplace** della funzione $f_n(t)= t^n f(t)$

$$\boxed{F_n(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{d s^n}}$$

Convoluzione di funzioni causali 1/2

- **Convoluzione** di due funzioni f(t) e g(t)

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')g(t')dt' = g * f$$

- Convoluzione w(t) di due funzioni f(t) e g(t) causali (prodotto integrale)

$$w(t) = f * g = \int_{0}^{t} f(t-t')g(t')dt' = g * f$$

Convoluzione di funzioni causali 2/2

- *Trasformata di Laplace* del prodotto integrale tra f(t) e g(t) :

$$w(t) = f * g = \int_0^t f(t-t')g(t')dt' = g * f$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W(s) = F(s)G(s)}$$

Integrazione nel tempo

- **Funzione $f_i(t)$** integrale nel tempo:

$$f(t) \quad \Rightarrow \quad f_i(t) = \int_{0_-}^{t} f(t')dt'$$

- **Trasformata di Laplace** dell' integrale $f_i(t)$

$$\boxed{F_i(s) = \frac{F(s)}{s}}$$

Divisione per t

- **Funzione g(t):**

$$g(t) = \frac{f(t)}{t}$$

- **Trasformata di Laplace** di g(t)

$$\boxed{G(s) = \int_s^{\infty} F(s')\, ds'}$$

Trasformate di Laplace

Trasformate fondamentali

Funzione esponenziale

- **Funzione esponenziale**

$$g(t) = e^{at}$$

  - La funzione esponenziale può essere concepita come la funzione 1 modulata.

- **Trasformata di Laplace** di $g(t)=1\ e^{at}$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s-a}}$$

Funzioni trigonometriche 1/2

- **Funzione coseno**:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t}$$

Usando la linearità

- **Trasformata di Laplace** del coseno:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + j\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\boxed{L[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

Funzioni trigonometriche 2/2

- **Funzione seno**:

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega t}$$

- **Trasformata di Laplace** del seno:
  - Usando la linearità

$$\frac{1}{2j} \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{1}{s + j\omega} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\boxed{L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

Funzioni cisoidali 1/2

- **Funzione cisoidale coseno**:

$$e^{-\sigma t}\cos(\omega t)$$

  – Usando la modulazione

- **Trasformata di Laplace** della cisoide coseno:

$$\boxed{L[e^{-\sigma t}\cos(\omega t)] = \frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}}$$

Funzioni cisoidali 2/2

- **Funzione cisoidale seno**:

$$e^{-\sigma t}\sin(\omega t)$$

  – Usando la modulazione

- **Trasformata di Laplace** della cisoide seno:

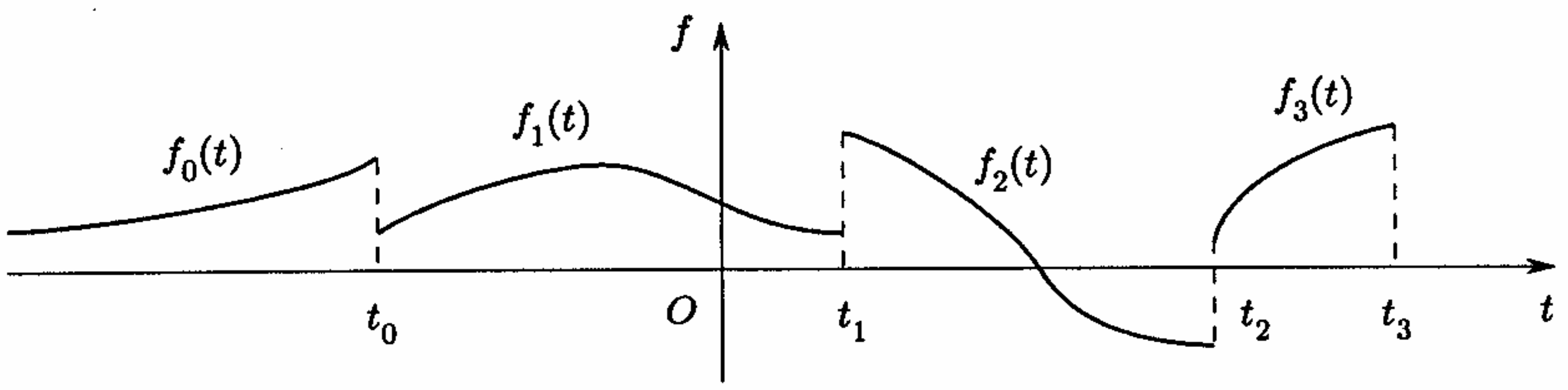
$$\boxed{L[e^{-\sigma t}\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}}$$

Trasformate di Laplace

Funzioni definite a tratti

Rappresentazione matematica 1/2

- **Le funzioni definite a tratti** presentano espressioni matematiche differenti a seconda dell’intervallo di tempo considerato:



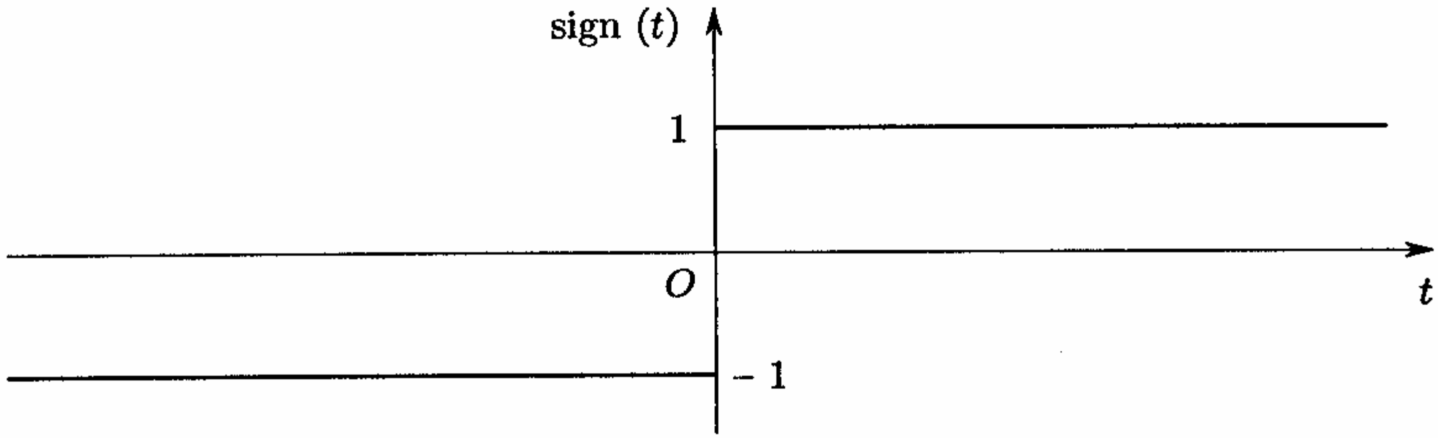
Rappresentazione matematica 2/2

- Espessione matematica valida per qualsiasi istante t:

$$f(t) = f_o(t) + [f_1(t) - f_o(t)]u(t - t_o) +$$
$$[f_2(t) - f_1(t)]u(t - t_1) + \ldots\ldots$$

Funzione segno

- Esprimere la **funzione sign(t)**



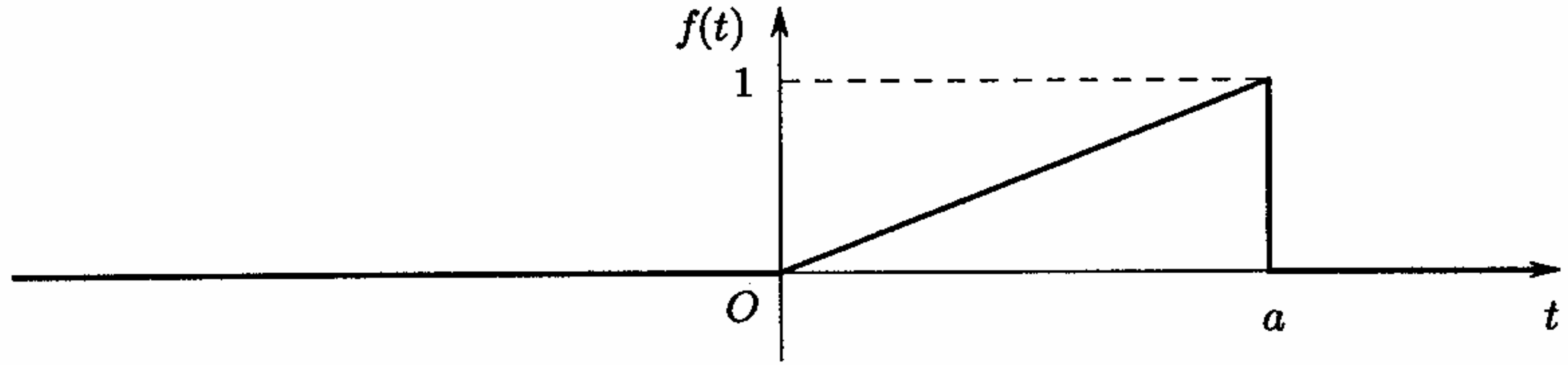
$$f_o(t) = -1, \quad f_1(t) = +1$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = -1 + [1 - (-1)]u(t) = -1 + 2u(t)$$

Impulso triangolare

- Esprimere **l'impulso triangolare**



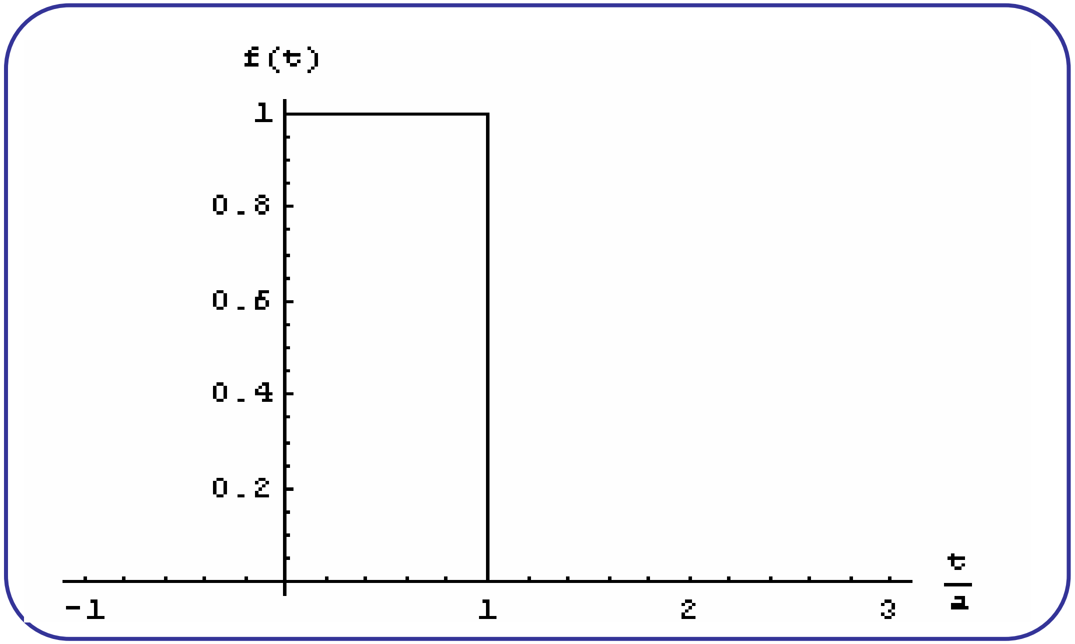
$$f_o(t)=0, \quad f_1(t)=\frac{1}{a}t, \quad f_2(t)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f(t)=\frac{t}{a}u(t)-\frac{t}{a}u(t-a)$$

Trasformata impulso rettangolare

- Calcolare la **trasformata di Laplace** dell'impulso rettangolare



$$f_o(t) = 0, \quad f_1(t) = 1, \quad f_2(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = u(t) - u(t-a)$$

$$\Downarrow$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-as}$$

Trasformate di Laplace

Caratteristiche delle Trasformate di Laplace

Regione di convergenza 1/2

- Le **singolarità** di una trasformata di Laplace sono i valori di s in cui **non esiste** la trasformata.

- Se la singolarità deriva da uno zero del denominatore, essa si chiama **polo**.

Regione di convergenza 2/2

- La **regione di regolarità** è il semipiano verticale posto a destra della singolarità più a destra.
- Un segnale definito in un intervallo limitato di tempo ha trasformata di Laplace **regolare** in tutti i punti del piano complesso s

Esempi 1/2

- **Determinare** la regione di convergenza della trasformata di Laplace della cisoide coseno

$$e^{-\sigma t}\cos(\omega t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$$

- Le singolarità sono i valori di s per cui si annulla il denominatore:

$$(s+\sigma)^2+\omega^2=0 \;\Rightarrow\; s_{1,2}=-\sigma\pm j\omega$$

- Semipiano di regolarità : Re[s]> - σ

Esempi 2/2

- **Determinare** la regione di convergenza della trasformata di Laplace dell'impulso triangolare

$$f(t) = \frac{t}{a}u(t) - \frac{t}{a}u(t-a) =$$
$$= \frac{t}{a}u(t) - \frac{t-a}{a}u(t-a) - u(t-a)$$

$$\Rightarrow \boxed{F(s) = \frac{1}{as^2} - \frac{1}{as^2}e^{-as} - \frac{1}{s}e^{-as}}$$

- La singolarità s=0 è solo **apparente**.
  - La funzione è definita su intervallo finito [0-a]

- La **regione di convergenza** è tutto il piano complesso s

Trasformate di Laplace

Antitrasformate di Laplace

Generalità 1/2

- Una funzione analitica F(s) è una trasformata di Laplace se:
  - ha un **semipiano destro di regolarità**
  - nel semipiano di regolarità ha **crescita lenta** (cresce cioè come un polinomio)

Generalità 2/2

- La funzione **causale** f(t) che ha F(s) come Trasformata di Laplace è data:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{B_r} F(s) e^{st} \, ds$$

  - B_r retta verticale arbitraria posta nel semipiano di regolarità

Esercizio

- La seguente funzione F(s) è una Trasformata di Laplace?

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s \sin(\pi s)}}$$

No. Le singolarità sono in :

$$s = n \; (n \text{ intero positivo o negativo arbitrario})$$

Non esiste semipiano destro di regolarità

Casi pratici

- **Nelle reti elettriche**, le trasformate di Laplace sono in pratica funzioni razionali di s o funzioni razionali moltiplicate per esponenziali

- Le funzioni razionali moltiplicate per esponenziali si riducono alle razionali mediante la **formula del ritardo**:

$$\boxed{F(s)e^{-as} \Rightarrow f(t-a)u(t-a)}$$

- È sempre utile utilizzare le tabelle di **antitrasformazione**

Tabella

	trasformata $F(s)$	$f(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{1}{s^n}\quad n=1,2,\ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},\quad 0!=1$
4.	$\frac{1}{s^n}\quad n>0$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
5.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
6.	$\frac{1}{(s-a)^n}\quad n=1,2,\ldots$	$\frac{t^{n-1}\,e^{at}}{(n-1)!},\quad 0!=1$
7.	$\frac{1}{(s-a)^n}\quad n>0$	$\frac{t^{n-1}\,e^{at}}{\Gamma(n)}$
8.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
9.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
10.	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{bt}\,\sin at}{a}$
11.	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\,\cos at$
12.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
13.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
14.	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{bt}\,\sinh at}{a}$
15.	$\frac{P(s)}{Q(s)}$	$\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\,e^{\alpha_k t}$

Il rigo 15 e' relativo a funzioni razionali proprie con poli semplici. Esso deriva dallo sviluppo in fratti semplici di tali funzioni:

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{R_1}{s-\alpha_1} + \frac{R_2}{s-\alpha_2} + .. = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{s-\alpha_k}$$

dove il residuo vale::

$$R_k = R(\alpha_k) = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

Antitrasformando si ottiene il rigo 15