2) Il circuito di Fig. 2 con generatori costanti è così assegnato:

$A_s = 5\,\mathrm{A}$	$R_3 = 4\Omega$
$E = 13\,\mathrm{V}$	$R_4 = 8\Omega$
$R_1 = 3\Omega$	$L = 0{,}1\,\mathrm{H}$
$R_2 = 5\Omega$	$C = 7\,\mathrm{mF}$

In esso l'interruttore S è aperto da un tempo infinito.
Determinare alla chiusura dell'interruttore S (compiuta nell'istante t=0):
- il sistema di stato associato alla rete di Fig. 2;
- gli autovalori ad esso associato;
- l'andamento nel tempo tra 0^- e $+\infty$ della tensione ai capi del condensatore.

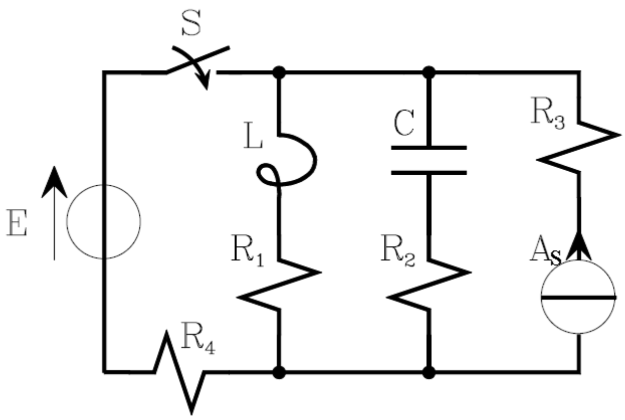
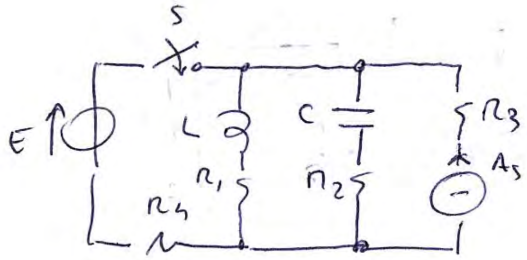


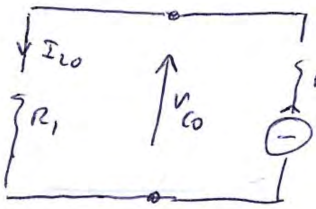
Fig. 2.

27. 6. 2005



$A_S = 5A$ $\quad R_3 = 4\Omega$
$E = 13V$ $\quad R_4 = 8\Omega$
$R_1 = 3\Omega$ $\quad L = 0{,}1\,H$
$R_2 = 5\Omega$ $\quad C = 7\,mF$

C. IN. $\quad t = 0^-$

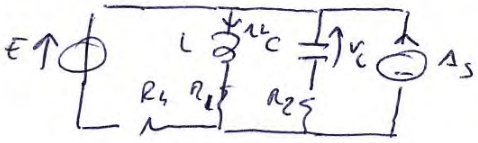


$I_{L0} = A_S = 5A$

$V_{C0} = R_1 A_S = 15V$

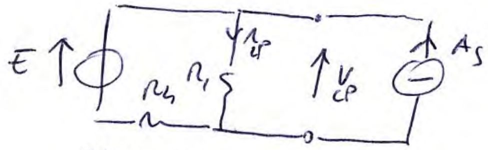
INVERTIRE! PRIMA INDIVIDUARE LE VdS. e l'ORDINE DEL SIST. POI I VALORI INIZIALI

$t = 0^+$



VdS $\begin{cases} i_L \\ v_C \end{cases}$

REGIME $\quad t \to \infty$

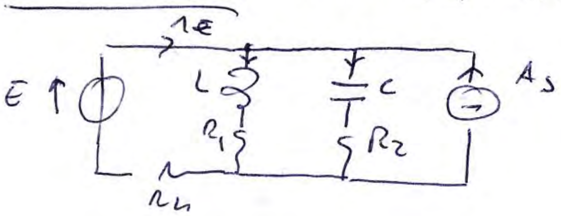


$$v_{Cp} = \frac{\frac{E}{R_4} + A_S}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1}} = 14{,}4545\ V$$

$$i_{Lp} = \frac{V_{Cp}}{R_1} = 4{,}8182\ A$$

oppure $\begin{cases} I_{Lp} = \frac{E}{R_1+R_4} + \frac{A_S \cdot R_4}{R_1+R_4} = \frac{13}{11} + \frac{40}{11} = 4{,}8182A \\ V_{Cp} = R_1 I_{Lp} = 14{,}4545\ V \end{cases}$

SIST. DI STATO



$$\begin{cases} i_E = i_L + i_C - A_S \\ E - R_4 i_E = v_C + R_2 i_C \\ v_L + R_1 i_L = v_C + R_2 i_C \end{cases}$$

$$E - R_4 i_L - R_4 i_C + R_4 A_S - v_C - R_2 i_C = 0 \quad \to$$

$$(R_2 + R_4)\, i_C = -R_4 i_L - v_C + E + R_4 A_S \quad \to$$

$$i_C = -\frac{R_4 i_L}{R_2+R_4} - \frac{1}{R_2+R_4} v_C + \frac{E}{R_2+R_4} + \frac{R_4}{R_2+R_4} A_S = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$v_L = -R_1 i_L + v_C + R_2\left(-\frac{R_4}{R_2+R_4} i_L - \frac{1}{R_2+R_4} v_C + \frac{E}{R_2+R_4} + \frac{R_4}{R_2+R_4} A_S\right) \to$$

$$v_L = -\underbrace{\left(R_1 + \frac{R_2 R_4}{R_2+R_4}\right)}_{\frac{R_1R_2+R_1R_4+R_2R_4}{R_2+R_4} = \frac{R^2}{R_2+R_4}} i_L + \underbrace{\left(1 - \frac{R_2}{R_2+R_4}\right)}_{\frac{R_2+R_4-R_2}{R_2+R_4} = \frac{R_4}{R_2+R_4}} v_C + \frac{E\,R_2}{R_2+R_4} + \frac{R_2R_4}{R_2+R_4} A_S = L\frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{-\frac{790}{13}}{-\frac{1}{L}\frac{R^2}{R_2+R_4}} & \overset{\frac{80}{13}}{\frac{1}{L}\frac{R_4}{R_2+R_4}} \\ \underset{-\frac{8000}{91}}{-\frac{1}{C}\frac{R_4}{R_2+R_4}} & \underset{-\frac{1000}{91}}{-\frac{1}{C}\frac{1}{R_2+R_4}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\frac{R_2}{R_2+R_4} & \frac{1}{L}\frac{R_2R_4}{R_2+R_4} \\ \frac{1}{C}\frac{1}{R_2+R_4} & \frac{1}{C}\frac{R_4}{R_2+R_4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ A_S \end{bmatrix}$$

AUTOVALORI

$$\det[\lambda I - A] = 0 \quad \left(\lambda + \frac{R^2}{L(R_2+R_4)}\right)\left(\lambda + \frac{1}{C(R_2+R_4)}\right) + \frac{R_4^2}{LC(R_2+R_4)^2} = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{790}{13}\right)\left(\lambda + \frac{1000}{91}\right) + \frac{80}{13}\cdot\frac{8000}{91} = 0$$

$$\lambda^2 + 71{,}7582\,\lambda +$$

$$\lambda_1 = -27{,}018\ s^{-1} \qquad \lambda_2 = -44{,}7403\ s^{-1}$$

~~EVOLUZIONE LIBERA~~ TRANSITORIO SIST. AUTON.

$$v_{Cf}(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \qquad v_{Cf}(0) = A + B$$

$$\frac{d v_{Cf}(t)}{dt} = \lambda_1 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 t} \qquad \frac{d v_{Cf}}{dt}(0) = \lambda_1 A + \lambda_2 B$$

(EVOLUZ. LIBERA: è la risposta con forzanti nulle e dipende solo dalle condizioni iniziali
RISPOSTA FORZATA: è la risposta allo stato zero - in genere è la somma di un termine di regime + 1 transitorio
Qui il transitorio dipende anche dalle forzanti (i due transitori sono inglobati in un unico termine) —

C. IN. SIST. AUT.

$$i_{Lf}(0) = I_0 - I_{Lp} = 5 - 4{,}8182 = 0{,}1818\ A$$

$$v_{Cf}(0) = V_{C0} - V_{Cp} = 15 - 14{,}4545 = 0{,}5455\ V = K_1$$

$$\frac{d}{dt} v_{Cf}(0) = -\frac{1}{C}\frac{R_4}{R_2+R_4}\cdot i_{Lf}(0) - \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{R_2+R_4}\cdot v_{Cf}(0) = \overset{-21{,}9769}{\cancel{9{,}9879\ V/s}} = K_2$$

$$= -\frac{8000}{91}\cdot 0{,}1818 - \frac{1000}{91}\cdot 0{,}5455 = 15{,}9824 - 5{,}9945 = \cancel{9{,}9879} \quad -21{,}9769\ V/s$$

COSTANTI

$$A + B = K_1$$
$$\lambda_1 A + \lambda_2 B = K_2$$

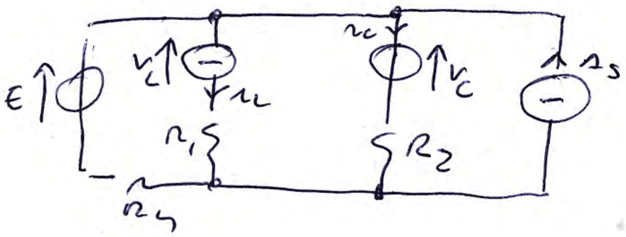
$$\Rightarrow \cancel{A = 1{,}9407\ V} \quad \cancel{B = -1{,}3952\ V} \qquad A = 0{,}1371\ V \quad B = 0{,}4084\ V$$

$v_C(t)$

$$v_C(t) = v_{Cf}(t) + V_{Cp}(t) = \overset{0{,}1371}{\cancel{1{,}9407}} e^{\lambda_1 t} \overset{+\,0{,}4084}{\cancel{-1{,}3952}} e^{\lambda_2 t} + 14{,}4545\ V$$

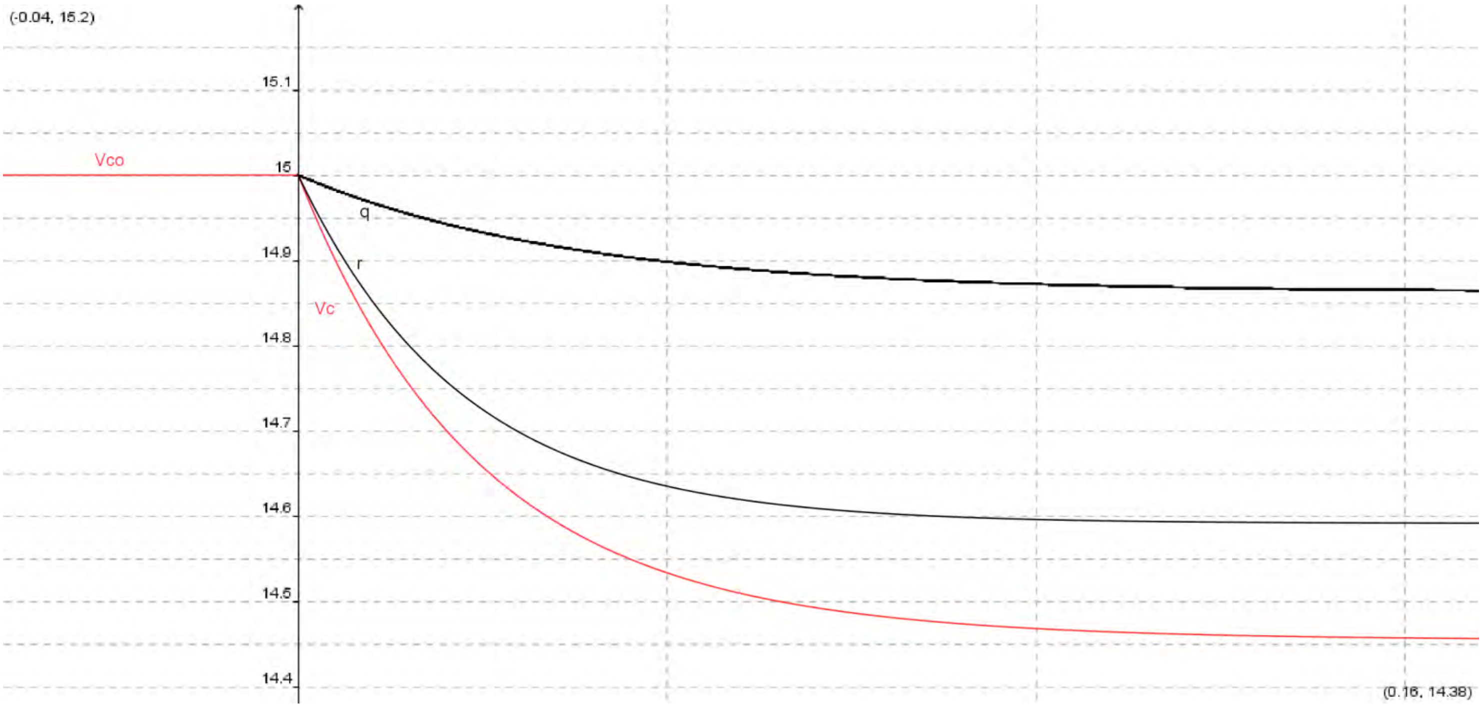
per $t=0$ $\quad v_C(0) = v_{Cf}(0) + V_{Cp} = 15\,V$

RETE RESISTIVA ASSOCIATA



$$v_L = -\left(R_1 + \frac{R_2R_4}{R_2+R_4}\right) i_L + \left(\frac{R_4}{R_2+R_4}\right) v_C + \frac{E R_2}{R_2+R_4} + \frac{A_S R_2R_4}{R_2+R_4}$$

$$i_C = -\frac{v_C}{R_2+R_4} - i_L \frac{R_4}{R_2+R_4} + \frac{E}{R_2+R_4} + A_S\cdot\frac{R_4}{R_2+R_4}$$



- Vc(x) = 0.1371 * 2.7183^(-27.018 x) + 0.4084 * 2.7183^(-44.7403 x) + 14.4545
- Vco(x) = 15
- q(x) = 15 - 0.1371 + 0.1371 * 2.7183^(-27.018 x)
- r(x) = 15 - 0.4084 + 0.4084 * 2.7183^(-44.7403 x)