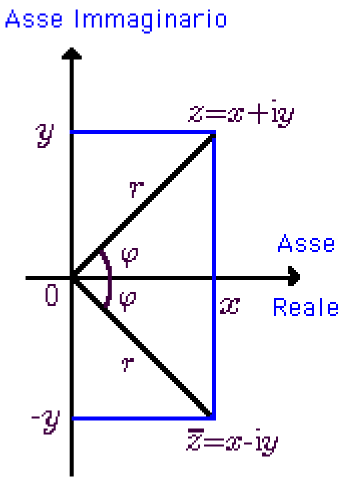
Tracciamento diagrammi di Nyquist

Prerequisiti – Due Amenità sui numeri complessi



$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

Formula di Eulero:
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

<u>Motivazione</u>

Un alternativa ai diagrammi di Bode per la rappresentazione della funzione di risposta armonica sono i cosiddetti **diagrammi polari** o di Nyquist. Essi sono di grande importanza per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione: su di essi si basa il fondamentale **criterio di stabilità di Nyquist.**

Sia la funzione di risposta armonica nella seguente forma fattorizzata:

$$G(j\omega) = K \frac{\prod_{u=1}^{m} \left(1 \pm j\omega\tau_{z_i}\right)}{(j\omega)^h \prod_{j=h+1}^{n} \left(1 \pm j\omega\tau_{p_j}\right)}$$

Spesso, quando il diagramma di Nyquist viene usato per l'analisi della stabilità, è sufficiente la conoscenza qualitativa dell'andamento del diagramma stesso.

<u>Primi elementi sul tracciamento</u>

Si noti che G(jω): R→C e che il diagramma viene tracciato sul piano complesso G(jω) per ω=(-∞,+∞).

Una importante proprietà ai fini del tracciamento è la seguente:

<u>PROP.</u> $G^*(j\omega)=G((j\omega)^*)= G(-j\omega)$

<u>CONSEGUENZA:</u> Nel tracciare il diagramma di Nyquist possiamo tracciarlo per ω∈(0,∞) e poi ribaltarlo rispetto all'asse delle ascisse.

<u>N.B.</u> Una cosa importante da tenere in conto è che il diagramma di Nyquist forma una **curva chiusa** sul piango G(jω). Gli asintoti si chiudono all'infinito (da 0_- a 0_+ in senso orario). Tale curva chiusa è nota come **curva di Cauchy** e fa un **numero di giri** quanti sono necessari per raccordare la fase tra $G(j0_-)$ e $G(j0_+)$, ovvero un numero di rotazioni di 180° in senso orario per quanti sono i poli nell'origine.

<u>Procedura di Tracciamento</u>

Per avere un andamento qualitativo del diagramma di Nyquist facciamo i seguenti5 passi:

1) Analisi asintotica ω∈(0,∞), ovvero calcolare

$$\begin{cases} \lim_{\omega\to 0_+} |G(j\omega)| \\ \lim_{\omega\to 0_+} \angle G(j\omega) \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{\omega\to \infty} |G(j\omega)| \\ \lim_{\omega\to \infty} \angle G(j\omega) \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{\omega\to 0_+} \mathrm{Re}[G(j\omega)] \\ \lim_{\omega\to 0_+} \mathrm{Im}[G(j\omega)] \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{\omega\to \infty} \mathrm{Re}[G(j\omega)] \\ \lim_{\omega\to \infty} \mathrm{Im}[G(j\omega)] \end{cases}$$

2) Calcolare eventuali intersezioni con gli assi
3) Fare Diagramma di Bode delle fasi di G(jω) per eliminare ambiguità
4) Proprietà $G^*(j\omega)=G(-j\omega)$
5) Eventuale chiusura ad infinito (fare tanti "mezzi giri" ovvero rotazioni di 180° in senso orario chiuse da 0_- a 0_+ ad infinito quanti sono i poli nell'origine)

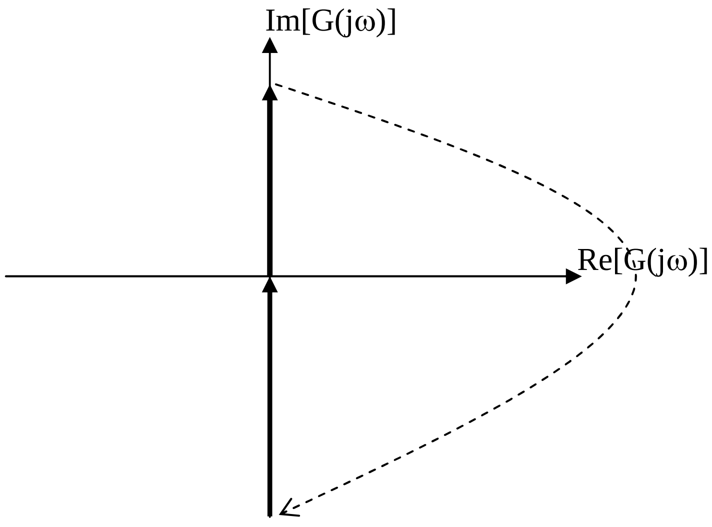
Combinando queste informazioni si ottiene un diagramma di Nyquist qualitativamente corretto.

Esercizio 1: L'integratore

$G(s) = \frac{1}{s}$

$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega}$

$\mathrm{Re}[G(j\omega)] = 0 \quad \forall\omega$



Pertanto:

$\lim_{\omega\to 0} |G(j\omega)| = \infty$

$\lim_{\omega\to 0} \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{\omega\to 0} \mathrm{Im}[G(j\omega)] = -\infty$

$\lim_{\omega\to\infty} |G(j\omega)| = 0$

$\lim_{\omega\to\infty} \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{\omega\to 0} \mathrm{Im}[G(j\omega)] = 0^-$

Esercizio 2: Polo stabile

$G(s) = \frac{1}{s\tau + 1}$

$G(s) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} = \frac{1}{j\omega\tau + 1}\frac{-j\omega\tau + 1}{-j\omega\tau + 1} = \frac{-j\omega\tau + 1}{\omega^2\tau^2 + 1} = \frac{1}{\omega^2\tau^2 + 1} - j\frac{\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}$

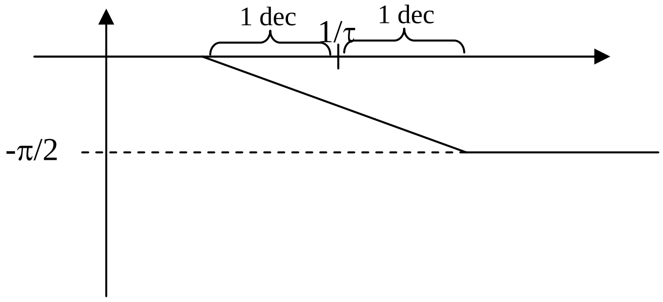
$\lim_{\omega\to 0} |G(j\omega)| = 1$

$\lim_{\omega\to 0} \angle G(j\omega) = 0$

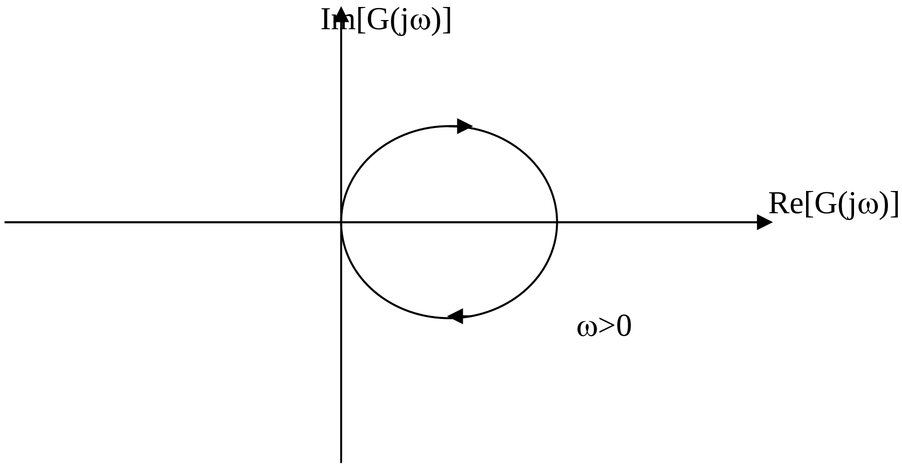
$\lim_{\omega\to\infty} |G(j\omega)| = 0$

$\lim_{\omega\to\infty} \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$

Non abbiamo intersezione con l'asse, vediamo dove vanno i vari limiti. Ci rimane da capire cosa fa la fase, vediamone l'andamento, che è monotono



Quindi infine abbiamo:



<u>*Esercizio 3: Polo instabile*</u>

$G(s)=\dfrac{K}{s\tau-1}$ con K>0

$$G(j\omega)=-\frac{K}{1-j\omega\tau}=-\frac{K}{j\omega\tau-1}\frac{-j\omega\tau-1}{-j\omega\tau-1}=K\frac{-j\omega\tau-1}{\omega^2\tau^2+1}=-\frac{K}{\omega^2\tau^2+1}-j\frac{K\omega\tau}{\omega^2\tau^2+1}$$

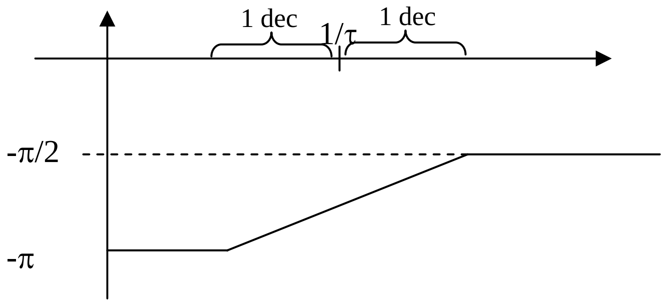
$$\lim_{\omega\to 0}|G(j\omega)|=K$$

$$\lim_{\omega\to 0}\angle G(j\omega)=-\pi$$

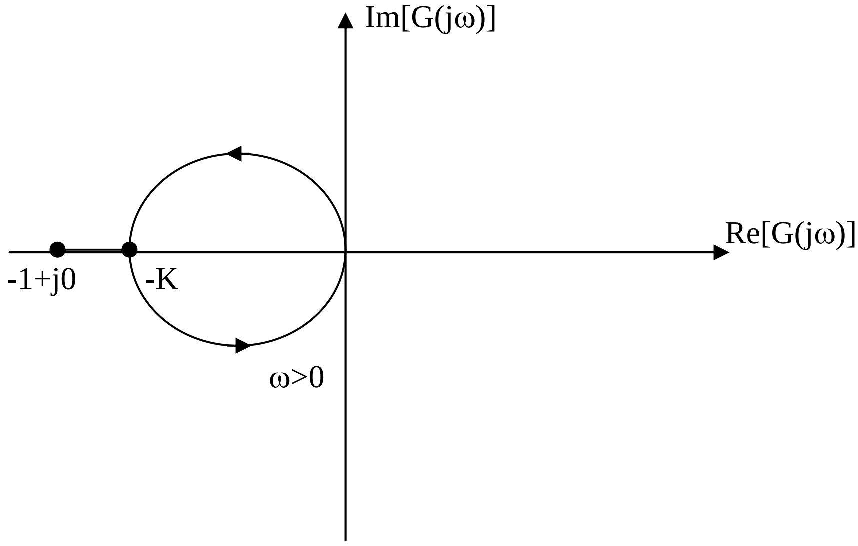
$$\lim_{\omega\to\infty}|G(j\omega)|=0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\angle G(j\omega)=-\frac{\pi}{2}$$

Le considerazioni sulla monotonicità della fase sono le stesse:



Pertanto:



<u>N.B.</u> Si noti come per K>1, il sistema ad anello chiuso è instabile !

<u>*Esercizio 4*</u>

$$G(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

$$G(j\omega)=\frac{10}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

Fattorizziamo in parte reale e parte immaginaria:

$$G(j\omega)=\frac{10}{(j\omega+1)(j\omega+2)}\frac{(1-j\omega)(2-j\omega)}{(1-j\omega)(2-j\omega)}=\frac{10\left(2-\omega^2-3j\omega\right)}{\left(\omega^2+1\right)\left(\omega^2+4\right)}=\frac{10\left(2-\omega^2\right)}{\left(\omega^2+1\right)\left(\omega^2+4\right)}-\frac{10(3j\omega)}{\left(\omega^2+1\right)\left(\omega^2+4\right)}$$

$$\lim_{\omega\to 0}|G(j\omega)|=5$$
$$\lim_{\omega\to 0}\angle G(j\omega)=0$$
$$\lim_{\omega\to \infty}|G(j\omega)|=0$$
$$\lim_{\omega\to \infty}\angle G(j\omega)=-\pi$$

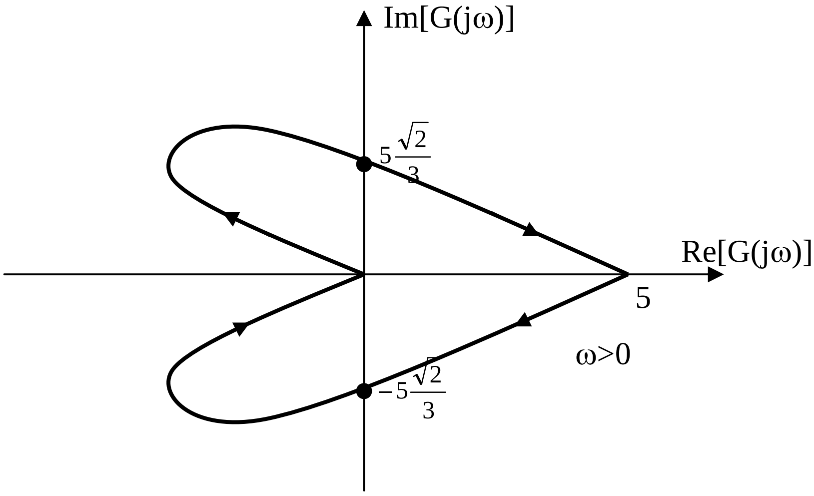
Si noti come da questo risulta che essa avrà una intersezione con l'asse reale. Vediamo dove essa avviene:

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)]=0$$
$$10\left(2-\omega^2\right)=0\Rightarrow\omega=\pm\sqrt{2}$$

Prendiamo $\omega=+\sqrt{2}$ visto che ci interessa ω>0, allora, vediamo che l'intesezione avviene per un valore dell'asse immaginario:

$$\mathrm{Im}[G(j\omega)]=-\frac{10(3\omega)}{\left(\omega^2+1\right)\left(\omega^2+4\right)}=-\frac{10\left(3\sqrt{2}\right)}{(2+1)(2+4)}=-\frac{5\left(\sqrt{2}\right)}{3}$$

Possiamo quindi tracciare, notando la monotonicità dei diagrammi di Bode:



<u>*Esercizio 5*</u>

$$G(s)=\frac{(s+1)}{s(s+2)}$$

$$G(j\omega)=\frac{(j\omega+1)}{j\omega(j\omega+2)}=\frac{(j\omega+1)}{j\omega(j\omega+2)}\frac{-j(-j\omega+2)}{-j(-j\omega+2)}=\frac{-j(j\omega+1)(-j\omega+2)}{\omega(\omega^2+4)}=\frac{-j\omega(j\omega+1)(-j\omega+2)}{(\omega^3+4\omega)}=\frac{(-j\omega^2-j2+\omega)}{(\omega^3+4\omega)}$$

e infine:

$$G(j\omega)=\frac{\omega}{\omega(\omega^2+4)}+j\frac{(-\omega^2-2)}{(\omega^3+4\omega)}$$

$$\lim_{\omega\to 0}|G(j\omega)|=\infty$$

$$\lim_{\omega\to 0}\angle G(j\omega)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega\to \infty}|G(j\omega)|=0$$

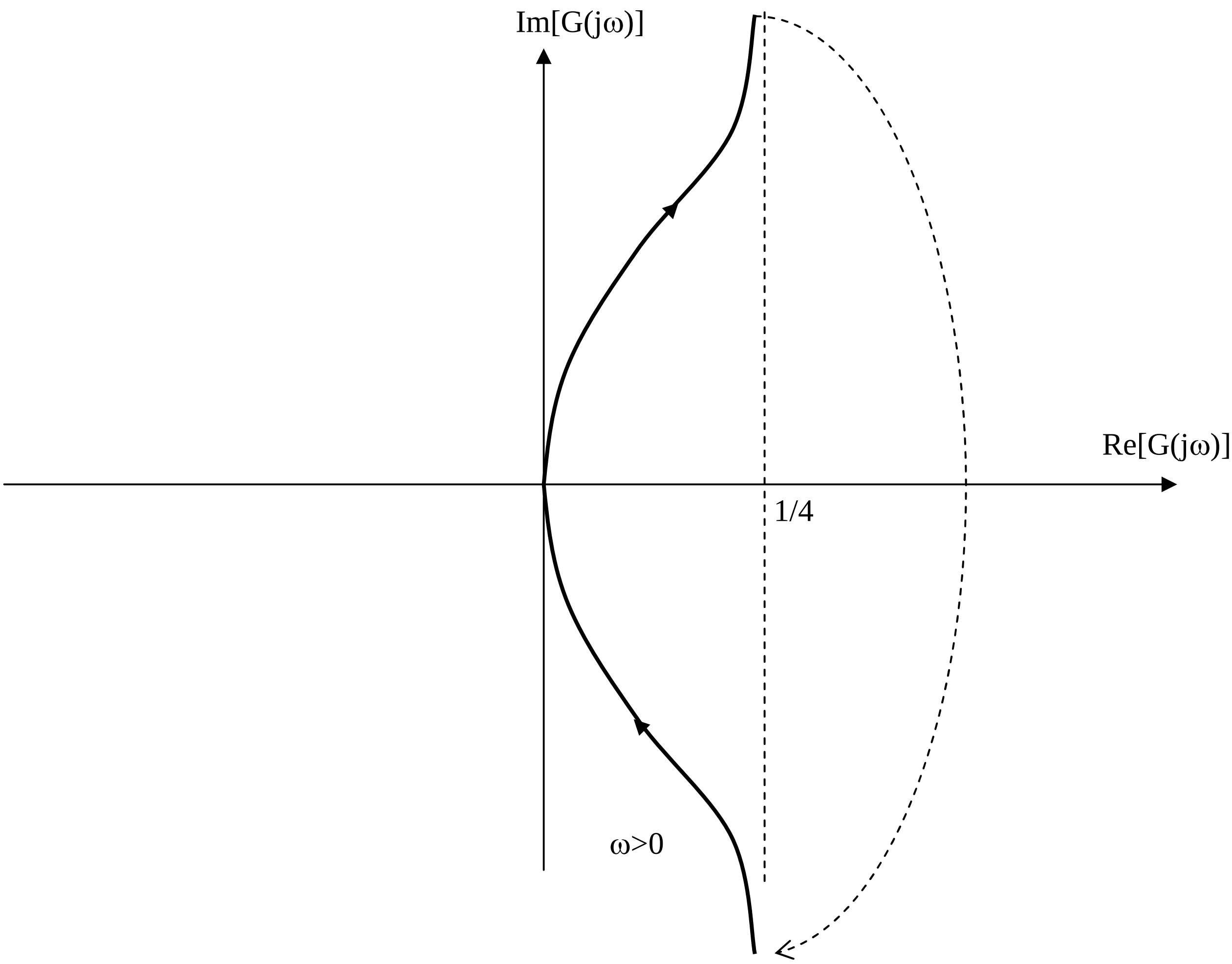
$$\lim_{\omega\to \infty}\angle G(j\omega)=-\frac{\pi}{2}$$

E' facile vedere come non ci siano intersezioni con gli assi, in quanto la parte reale è sempre positiva e quella immaginaria sempre negativa (per ω>0).

Si noti inoltre che

$$\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}[G(j\omega)]=\frac{1}{4}$$

Il diagramma sarà quindi:



<u>*Esercizio 6*</u>

$$G(s)=\frac{10}{s(s-1)}$$

Diventa

$$G(s)=\frac{10}{j\omega(j\omega-1)}=-\frac{10}{j\omega(1-j\omega)}=j\frac{10}{\omega(1-j\omega)}\frac{(1+j\omega)}{(1+j\omega)}=j\frac{10(1+j\omega)}{\omega(1+\omega^2)}=-\frac{10}{(1+\omega^2)}+j\frac{10}{\omega(1+\omega^2)}$$

$$\lim_{\omega\to 0}|G(j\omega)|=\infty$$

$$\lim_{\omega\to 0}\angle G(j\omega)=-\frac{3}{2}\pi$$

$$\lim_{\omega\to \infty}|G(j\omega)|=0$$

$$\lim_{\omega\to \infty}\angle G(j\omega)=-\pi$$

$$\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}[G(j\omega)]=-10$$

$$\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Im}[G(j\omega)]=+\infty$$

$$\lim_{\omega\to \infty}\mathrm{Re}[G(j\omega)]=0_-$$

$$\lim_{\omega\to \infty}\mathrm{Im}[G(j\omega)]=0_+$$

\