

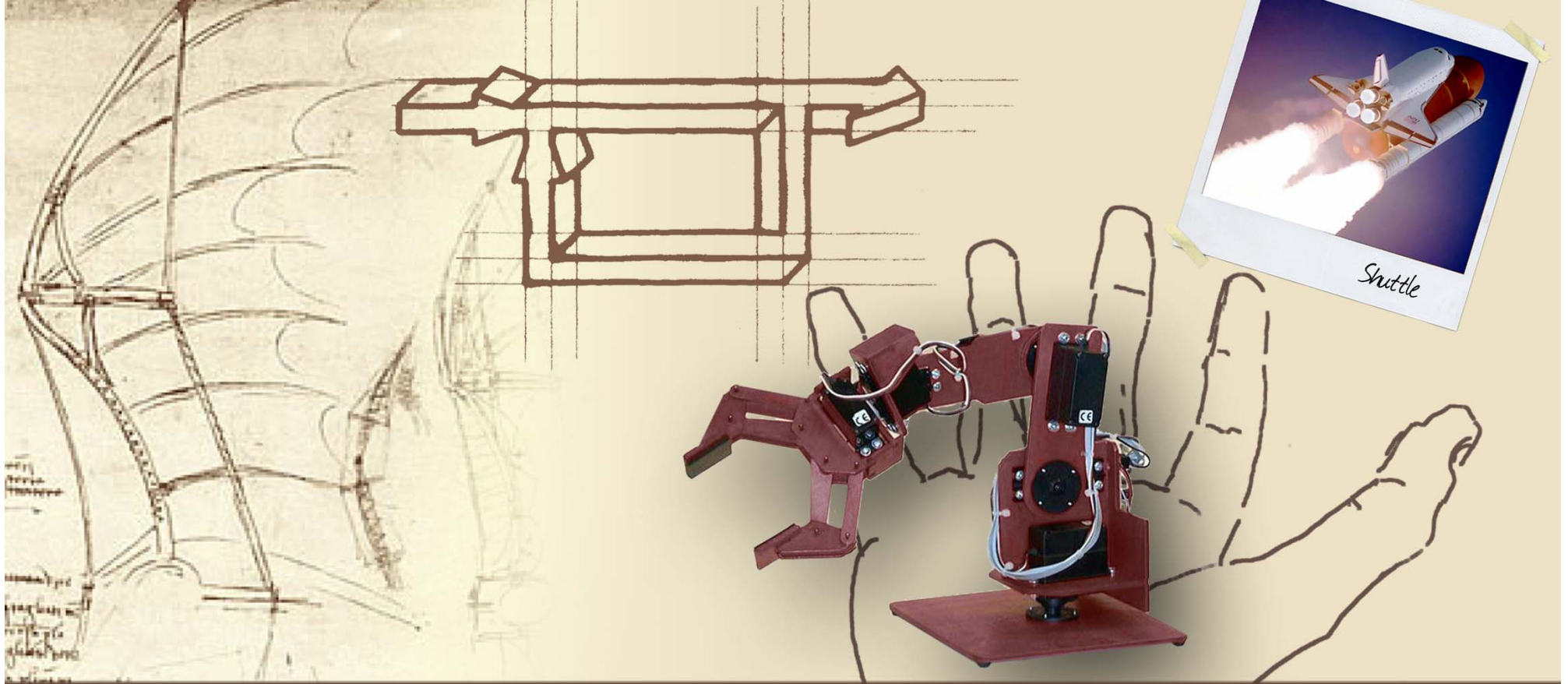
**Stabilità dei sistemi di controllo in retroazione**

**Diagrammi polari, di Nyquist e di Nichols**



# Diagrammi polari, di Nyquist e di Nichols

- Diagramma polare
- Diagramma di Nyquist
- Diagramma di Nichols



**Diagrammi polari, di Nyquist e di Nichols**

**Diagramma polare**





## Diagramma polare

- La risposta in frequenza si analizza tramite

$$\begin{aligned} G(s)|_{s=j\omega} &= G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = \\ &= M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad 0 \leq \omega < \infty \end{aligned}$$

- Un'altra rappresentazione grafica di  $G(j\omega)$  si ottiene riportando  $M(\omega)$  e  $\varphi(\omega)$  su un riferimento polare del piano complesso

**Diagramma polare di  $G(j\omega)$**

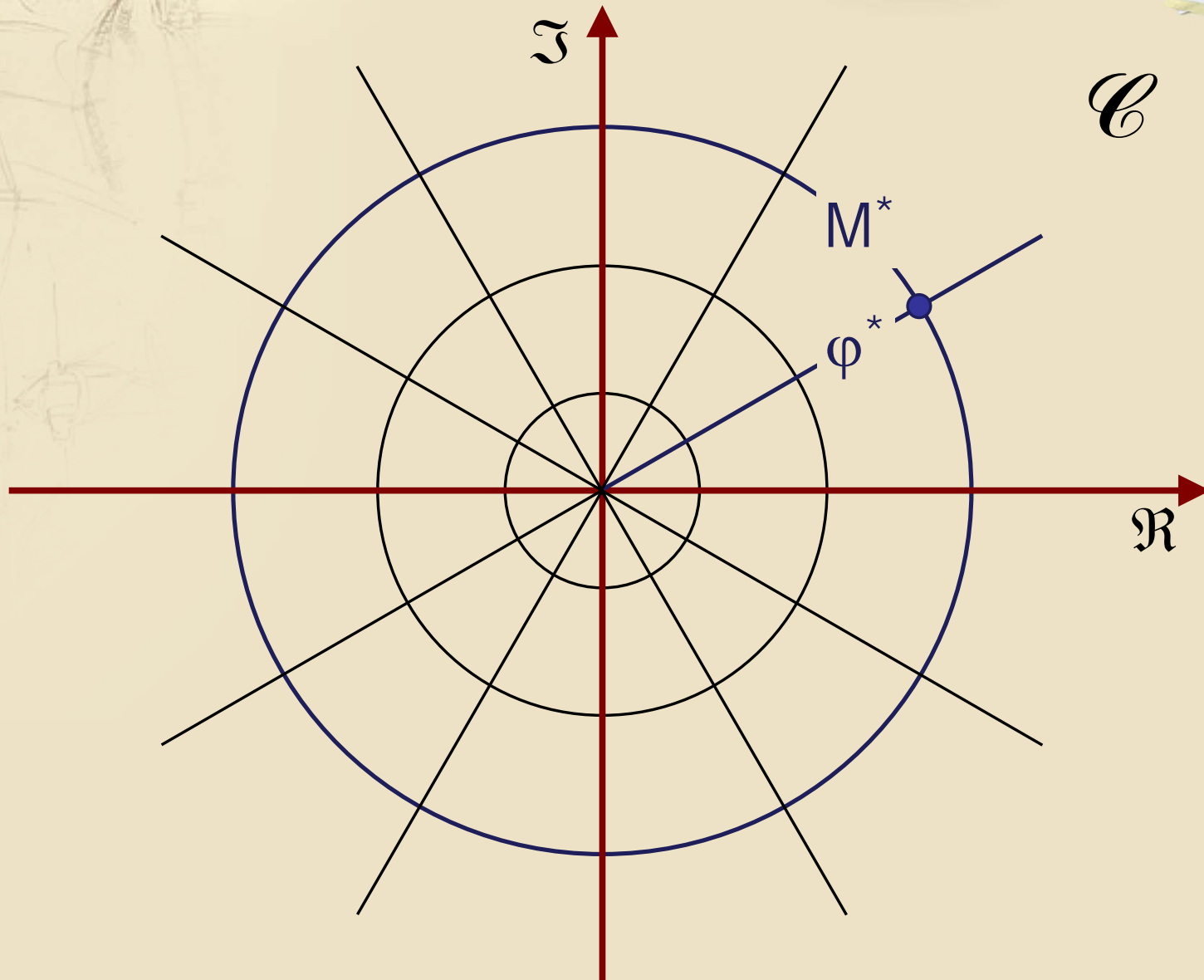


## Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (1/2)

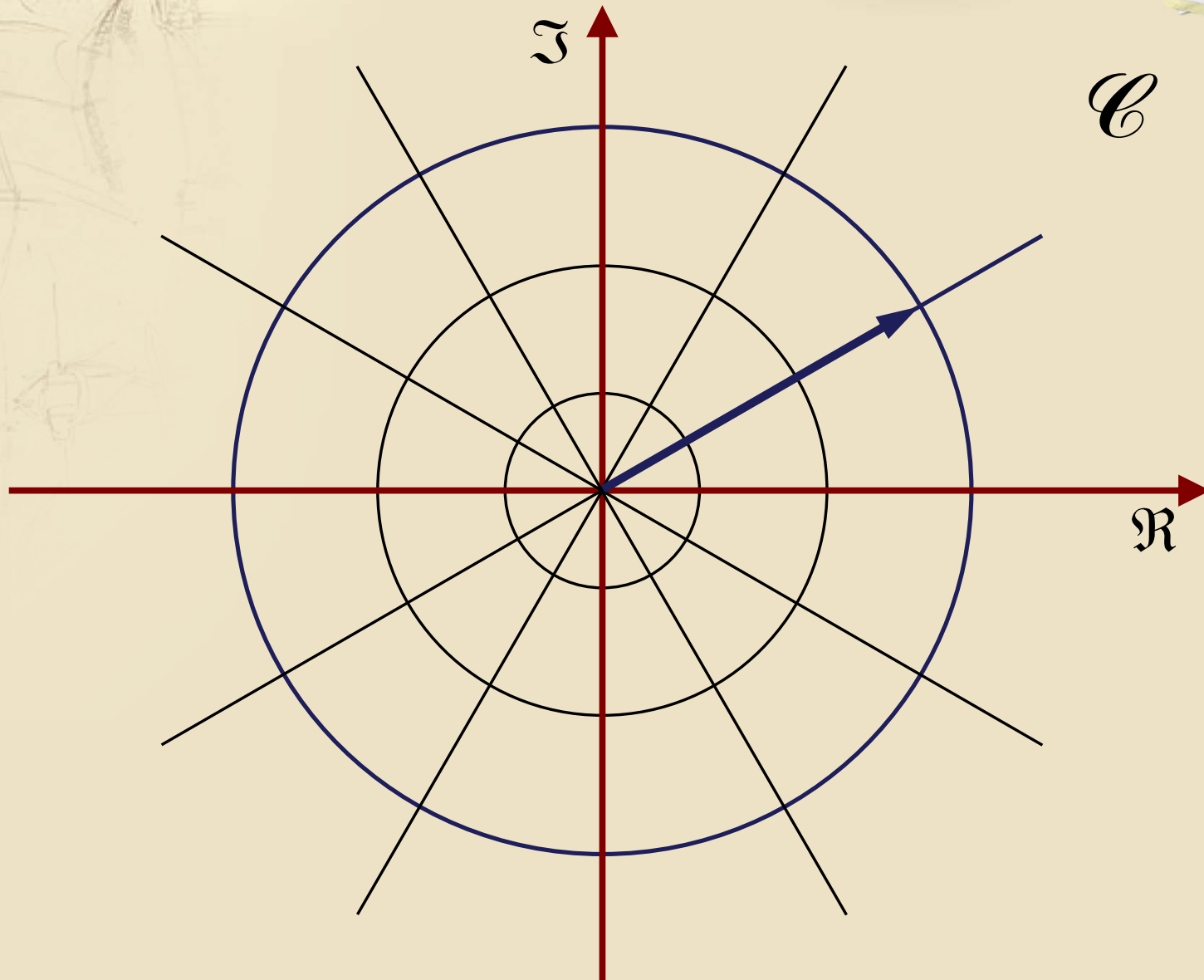
$$\begin{aligned}\Rightarrow G(j\omega)\big|_{\omega=\omega^*} &= |G(j\omega^*)| \cdot e^{j\angle G(j\omega^*)} = \\ &= M(\omega^*) \cdot e^{j\phi(\omega^*)} = \\ &= M^* \cdot e^{j\phi^*}\end{aligned}$$

**Punto sul piano complesso**

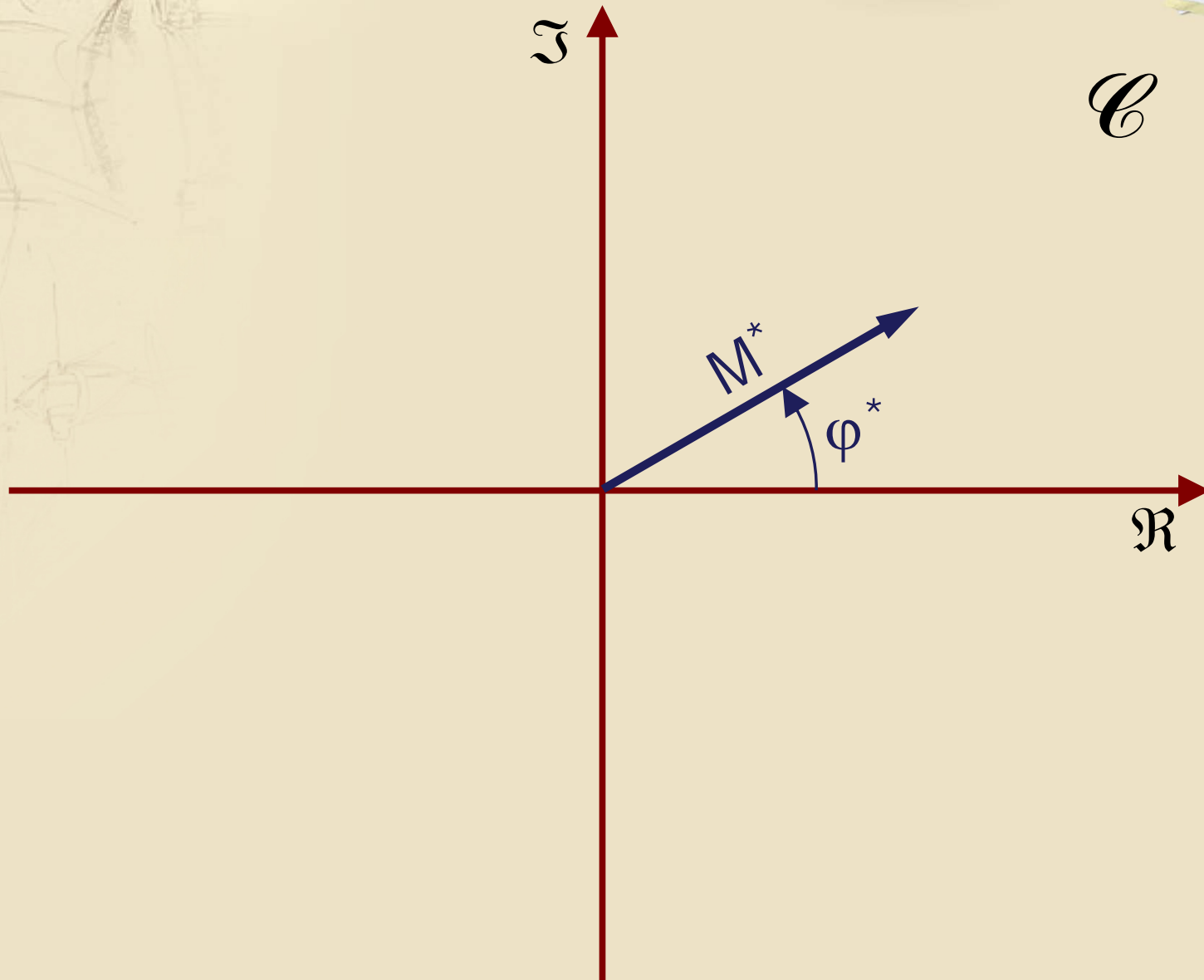
# Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (2/2)



# Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (2/2)



## Rappresentazione polare per $\omega=\omega^*$ (2/2)

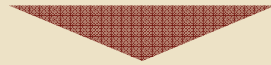






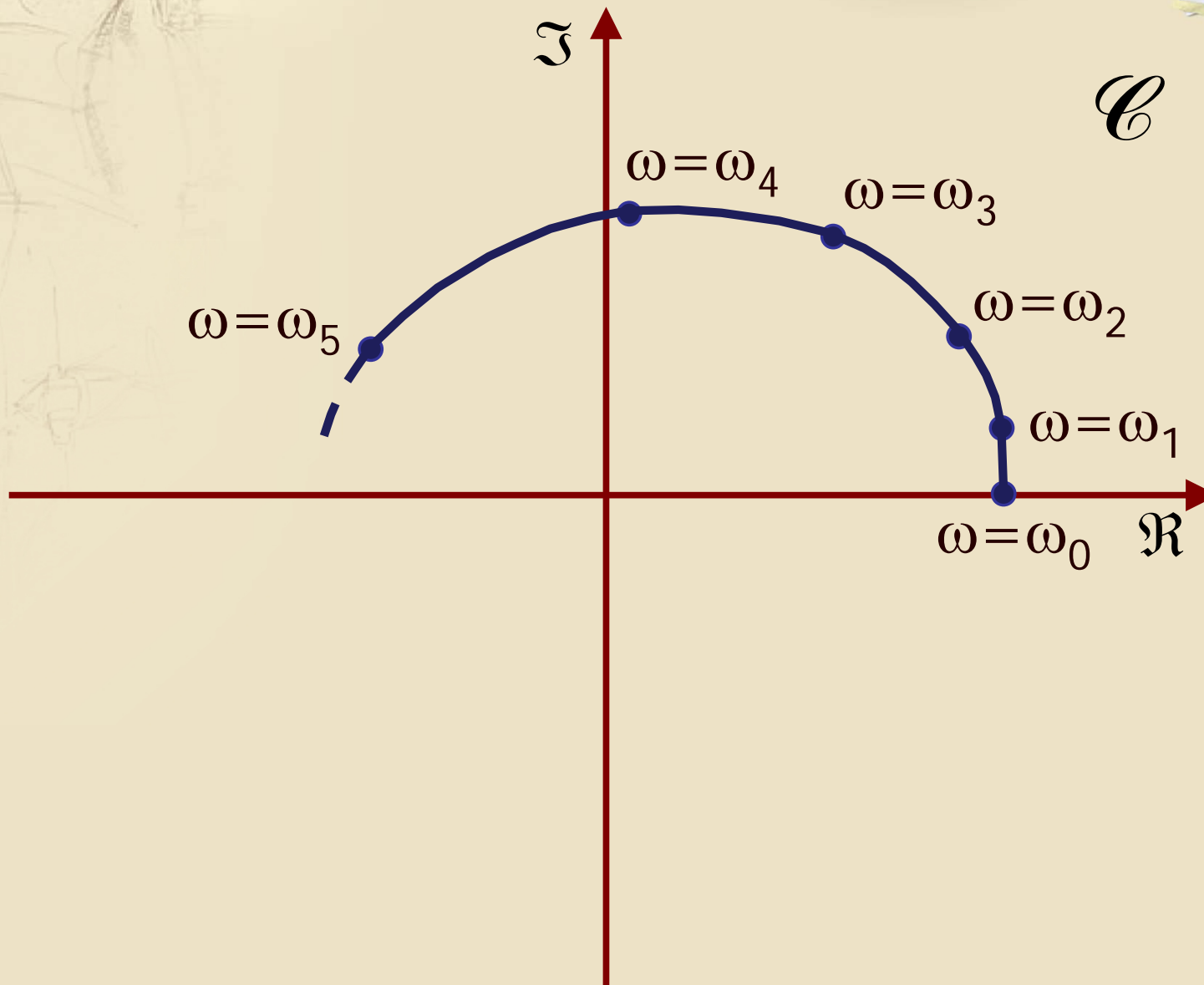
## Rappresentazione polare per $\omega \in (0, \infty)$ (1/2)

$$\begin{aligned} \blacktriangleright G(j\omega) &= |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = \\ &= M(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)} \quad \text{per } \omega \in (0, \infty) \end{aligned}$$

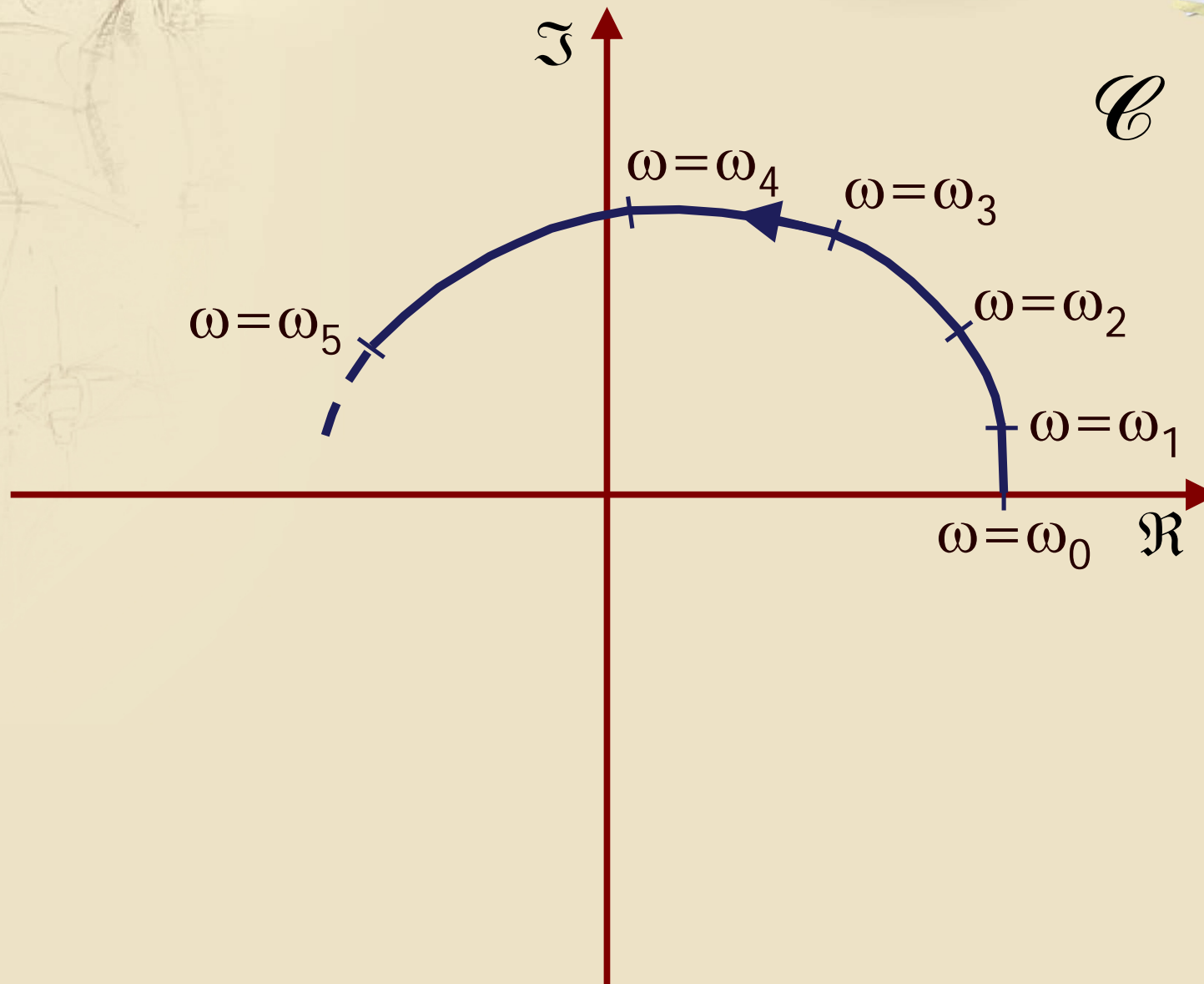


**Luogo di punti sul piano complesso**

## Rappresentazione polare per $\omega \in (0, \infty)$ (2/2)



## Rappresentazione polare per $\omega \in (0, \infty)$ (2/2)





## Proprietà importanti (1/4)

- Per sistemi senza poli nell'origine il diagramma polare parte ( $\omega \rightarrow 0^+$ ) da un punto sull'asse reale; la fdt in **BF** è infatti approssimabile con una costante
- Per sistemi con "i" poli nell'origine il diagramma polare parte da un punto infinitamente lontano dall'origine, con fase

$$\varphi|_{\omega \rightarrow 0^+} = i \cdot \frac{-\pi}{2} + \boxed{\arg(K)}$$

0 0  $\pm\pi$

la fdt in BF è infatti approssimabile con  $\frac{K}{s^i}$





## Proprietà importanti (2/4)

- Per sistemi con poli nell'origine:

$$G_a(j\omega)\big|_{\omega \rightarrow 0^+} = \Re(\omega)\big|_{\omega \rightarrow 0^+} + j\Im(\omega)\big|_{\omega \rightarrow 0^+} \cong \frac{K_{\Re}}{\omega^n} + j\frac{K_{\Im}}{\omega^m}$$

con  $n \geq 0$ ,  $m > 0$  oppure  $n > 0$ ,  $m \geq 0$

- Il quadrante di partenza ( $\omega \rightarrow 0^+$ ) dipende dai segni di  $K_{\Re}$  e di  $K_{\Im}$



## Proprietà importanti (3/4)

- Per sistemi con poli nell'origine il diagramma polare per  $\omega \rightarrow 0^+$  assume un particolare andamento asintotico. Esempi:
  - $n=0, m>0 \rightarrow$  asintoto=retta verticale,  $\Re = K_{\Re}$
  - $n>0, m=0 \rightarrow$  asintoto=retta orizzontale,  $\Im = K_{\Im}$
  - $n=4, m=2 \rightarrow$  asintoto=parabola,  $\Re = \frac{K_{\Re}}{K_{\Im}^2} \Im^2$
  - forma generale dell'asintoto:  $\Re = H \Im^{n/m}$  o  $\Im = \bar{H} \Re^{n/m}$



## Proprietà importanti (4/4)

- Per sistemi strettamente propri il diagramma polare termina ( $\omega \rightarrow \infty$ ) nell'origine (modulo nullo) con fase multipla di  $\pm 90^\circ$ ; la **fdt in AF** è infatti approssimabile con

$$\frac{H}{s^k}, \quad k \doteq \text{n.o poli} - \text{n.o zeri} > 0$$

- Per sistemi non strettamente propri il diagramma polare termina (perpendicolarmente) in un punto sull'asse reale diverso dall'origine; in tal caso la fdt in AF è infatti approssimabile con una costante



## Esempio 1 (1/4)

$$\Rightarrow G(s) = \frac{200(s + 0.1)}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s + 10)}$$

$$\Rightarrow G(s)|_{BF} \cong \frac{2}{s} \rightarrow -j \frac{2}{\omega}$$

$$\Rightarrow G(s)|_{AF} \cong \frac{200}{s^3} \rightarrow (-j)^3 \frac{200}{\omega^3}$$



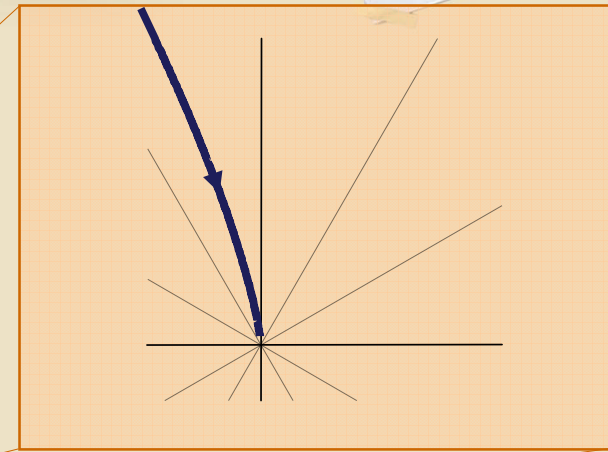
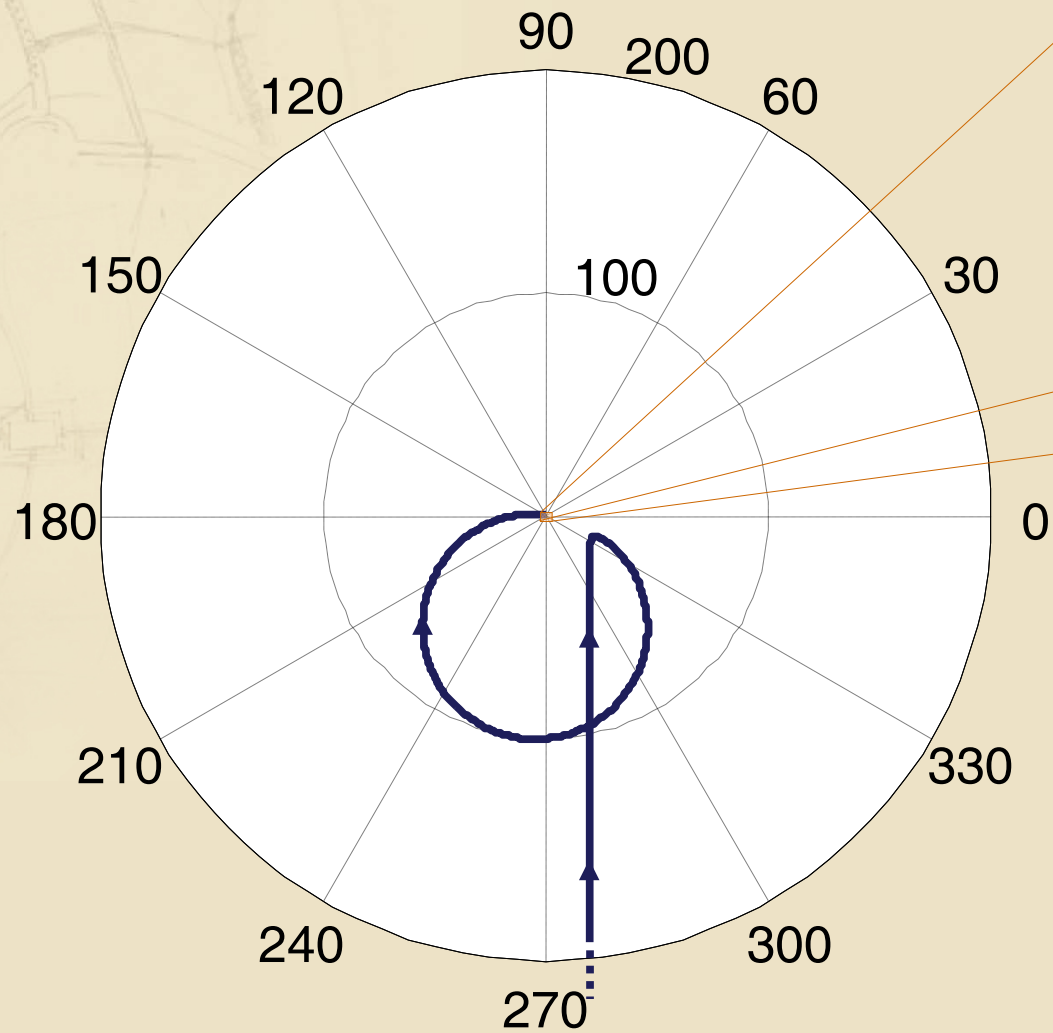


## Esempio 1 (2/4)

$$\Rightarrow G(s)|_{BF} \cong \frac{2}{s} \rightarrow -j\frac{2}{\omega} + 19.4 \rightarrow \begin{cases} n=0 & K_{\Re} = 19.4 \\ m=1 & K_{\Im} = -2 \end{cases}$$

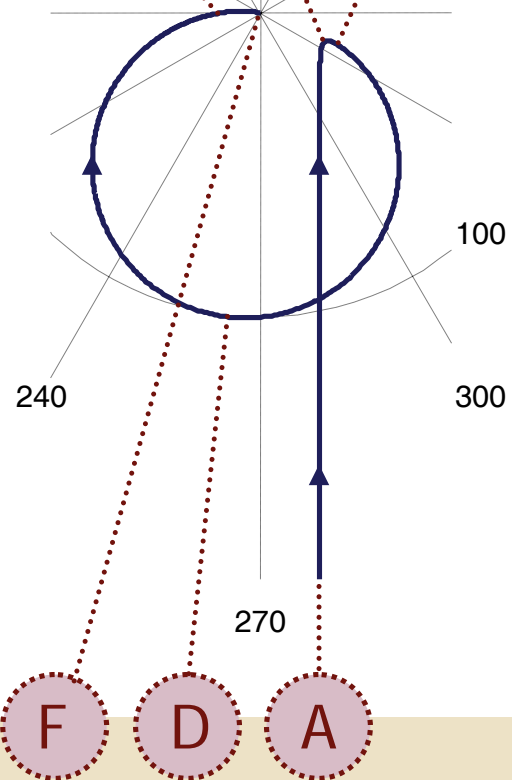
asintoto = retta verticale

## Esempio 1 (3/4)

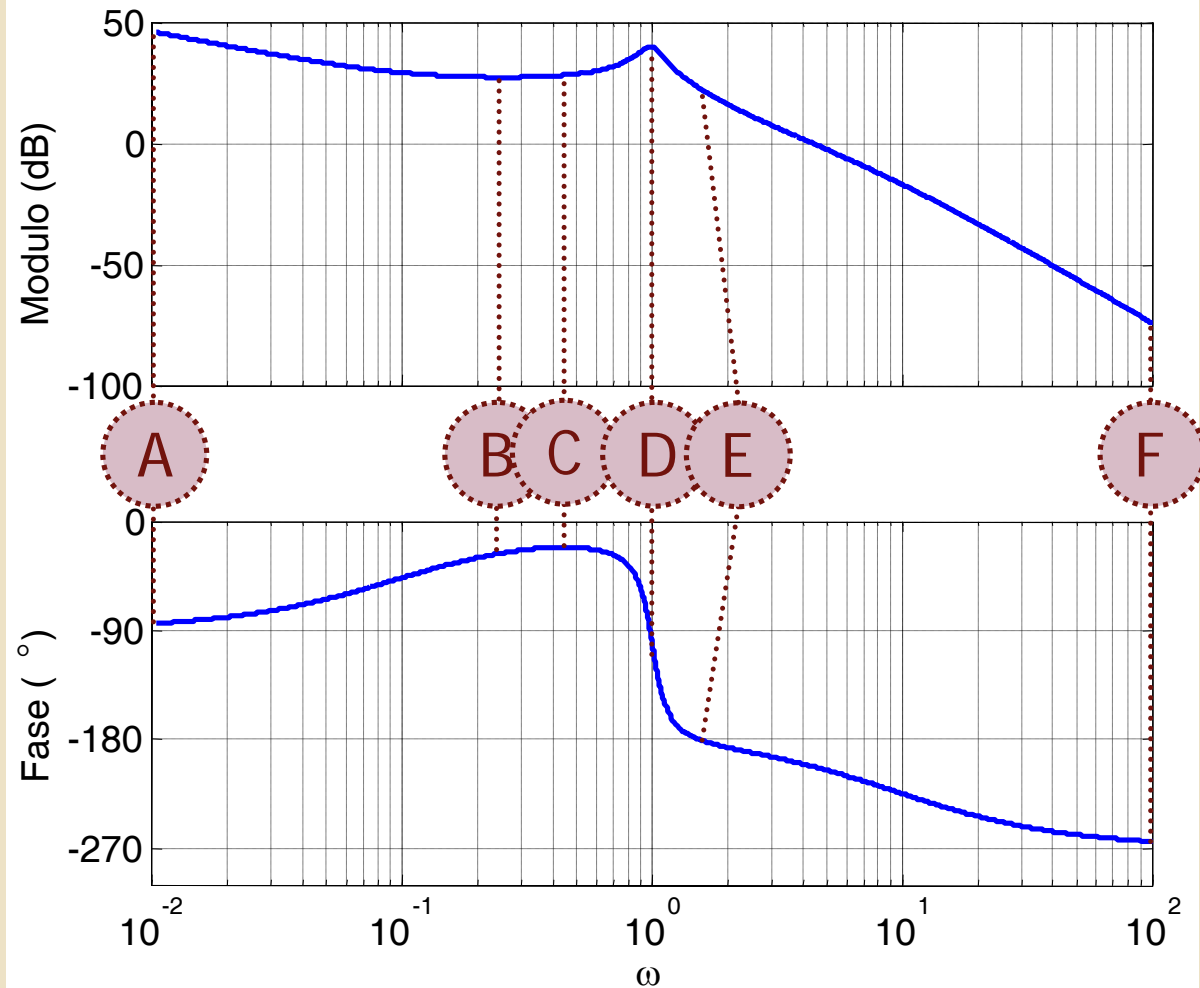


# Esempio 1 (4/4)

Esempio1 - diagramma polare



Esempio1 - DdB





## Esempio 2 (1/4)

$$\Rightarrow G(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

$$\Rightarrow G(s)|_{BF} \cong \frac{1.25}{s^2} \rightarrow (-j)^2 \frac{1.25}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow G(s)|_{AF} \cong \frac{10}{s^3} \rightarrow (-j)^3 \frac{10}{\omega^3}$$





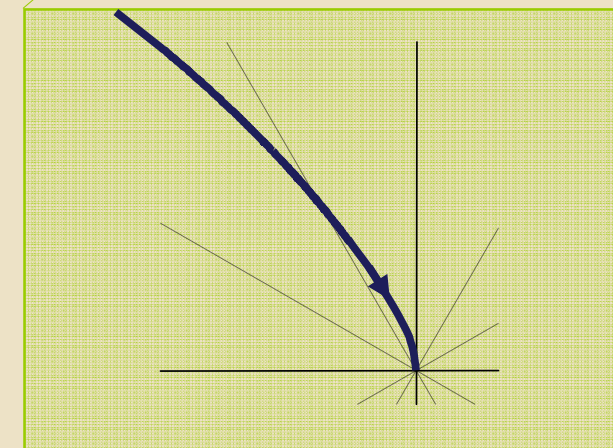
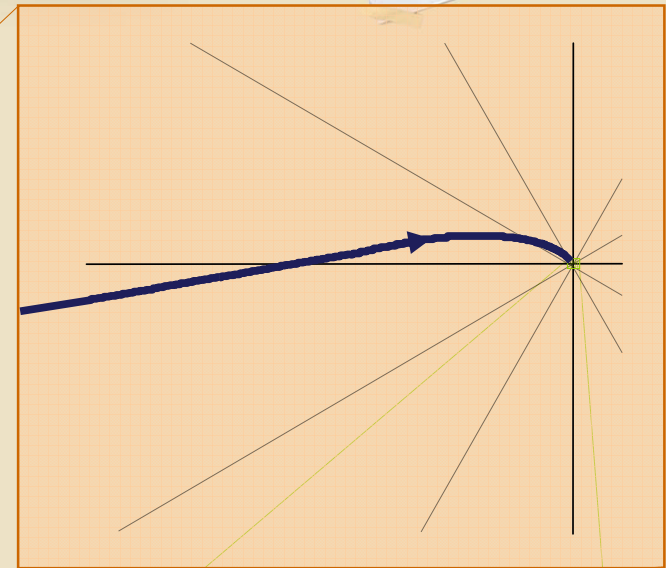
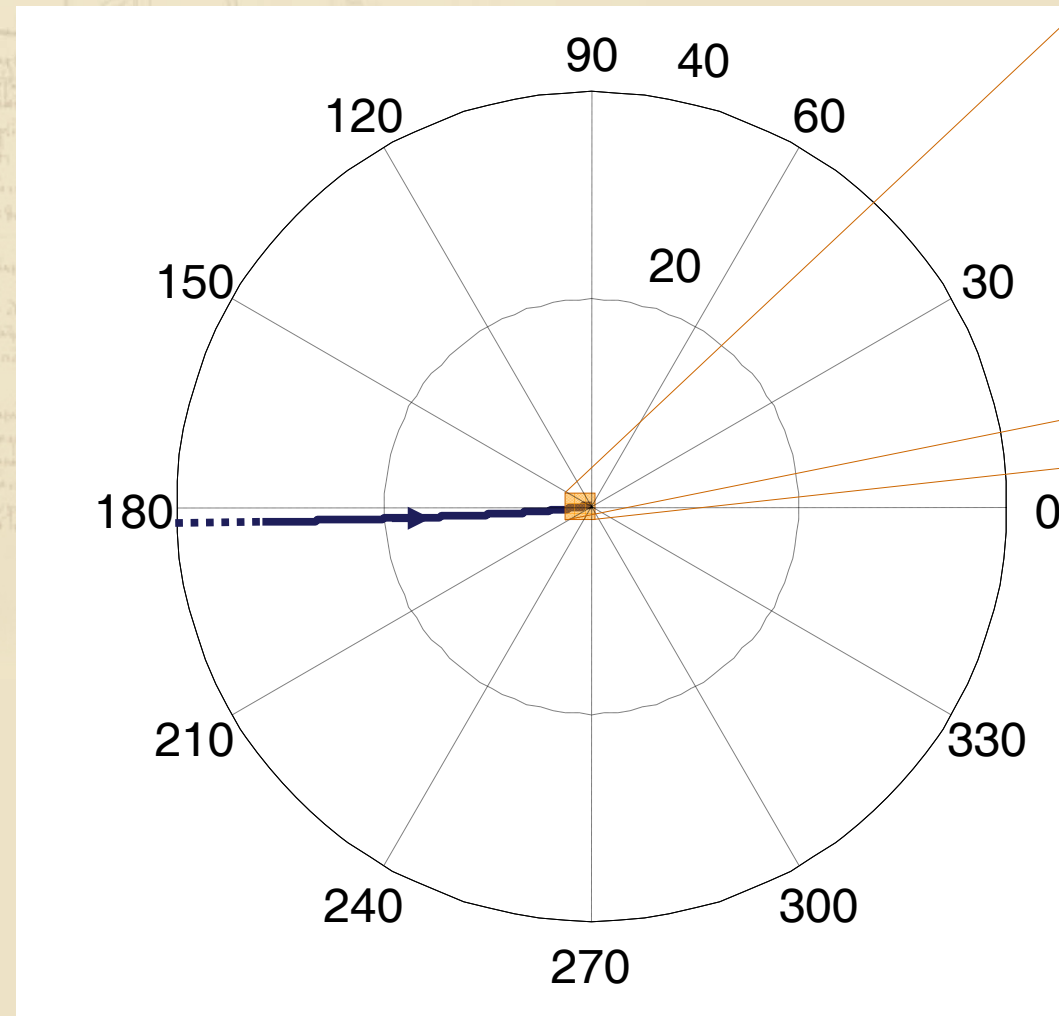
## Esempio 2 (2/4)

$$\rightarrow G(s)|_{BF} \cong \frac{1.25}{s^2} \rightarrow (-j)^2 \frac{1.25}{\omega^2} + j \frac{-1}{3.2\omega} \rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 1 \\ K_{\Re} = -1.25 \\ K_{\Im} = -1 / 3.2 \end{cases}$$

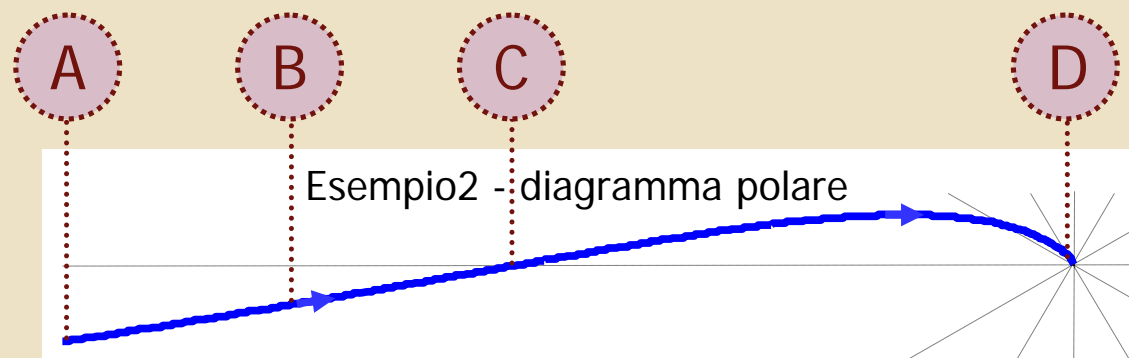
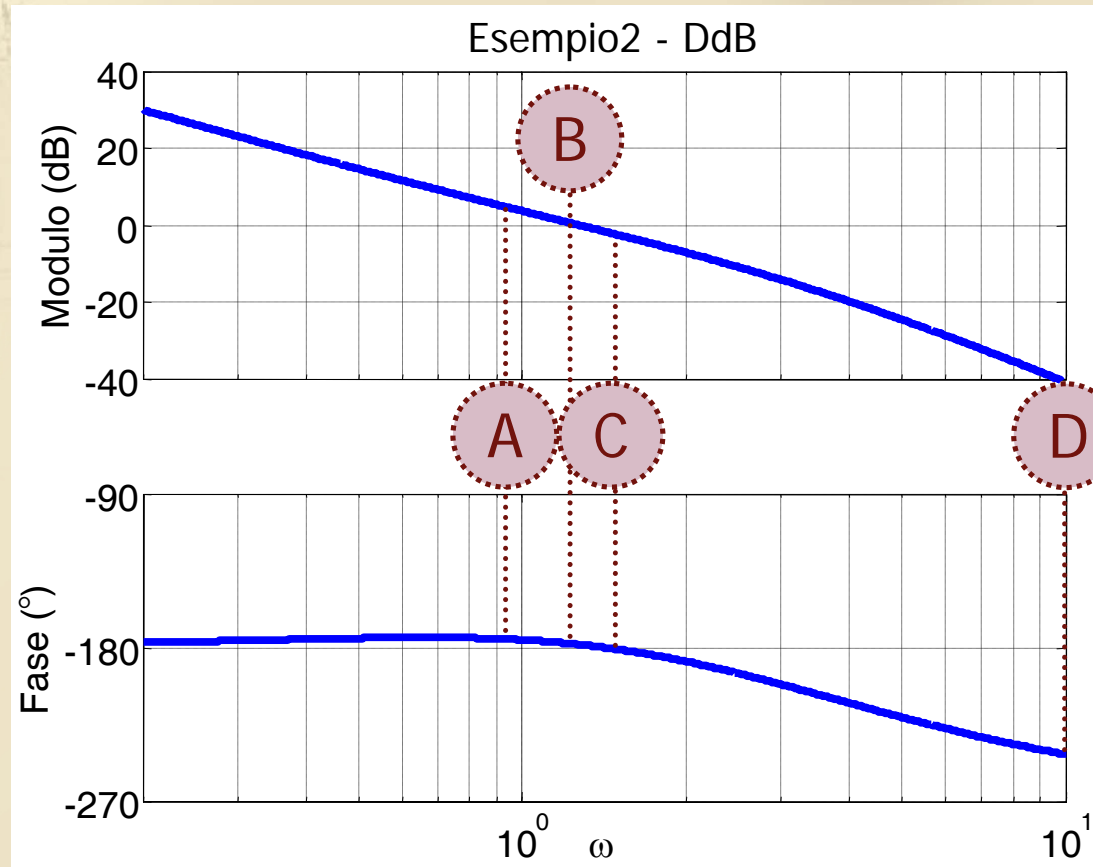
asintoto = parabola

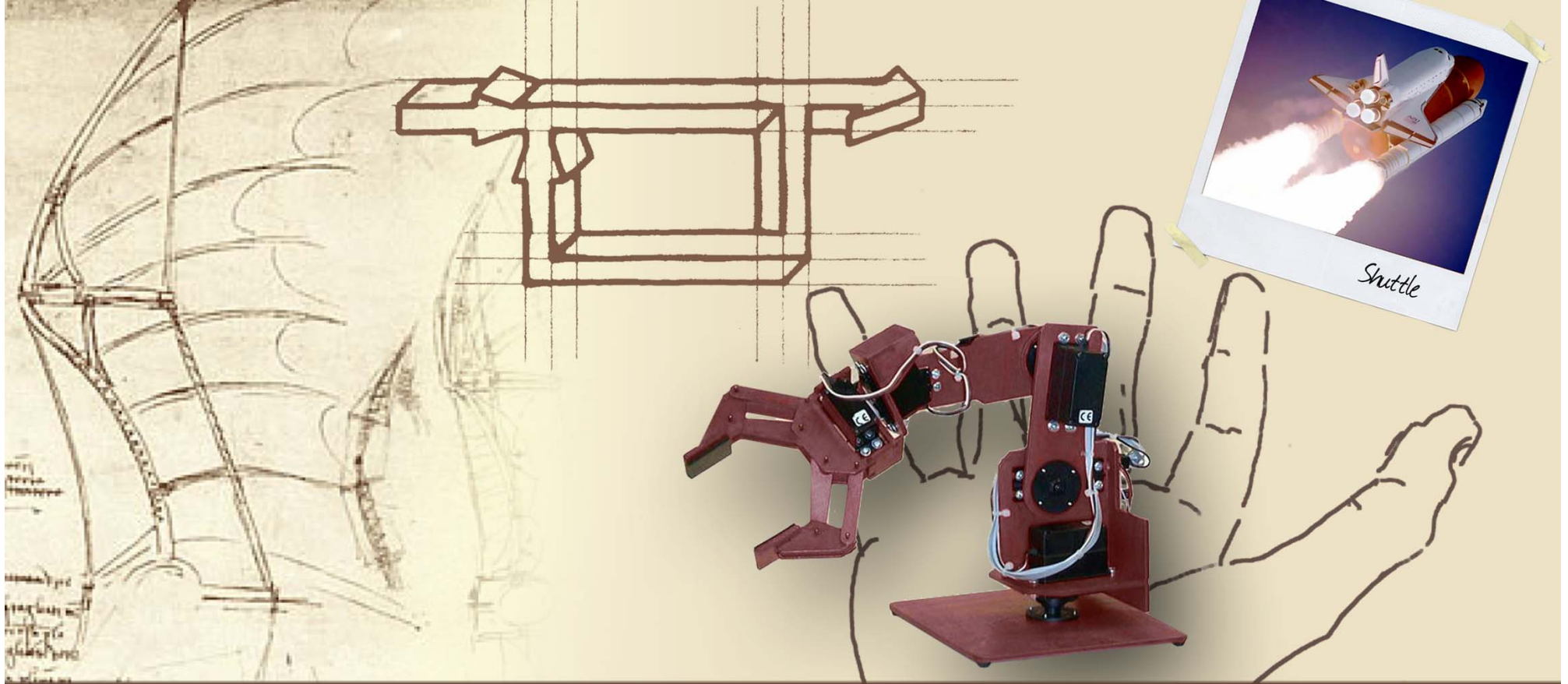
$$\Re = -12.8 \Im^2$$

## Esempio 2 (3/4)



## Esempio 2 (4/4)





## Diagrammi polari, di Nyquist e di Nichols

### Diagramma di Nyquist

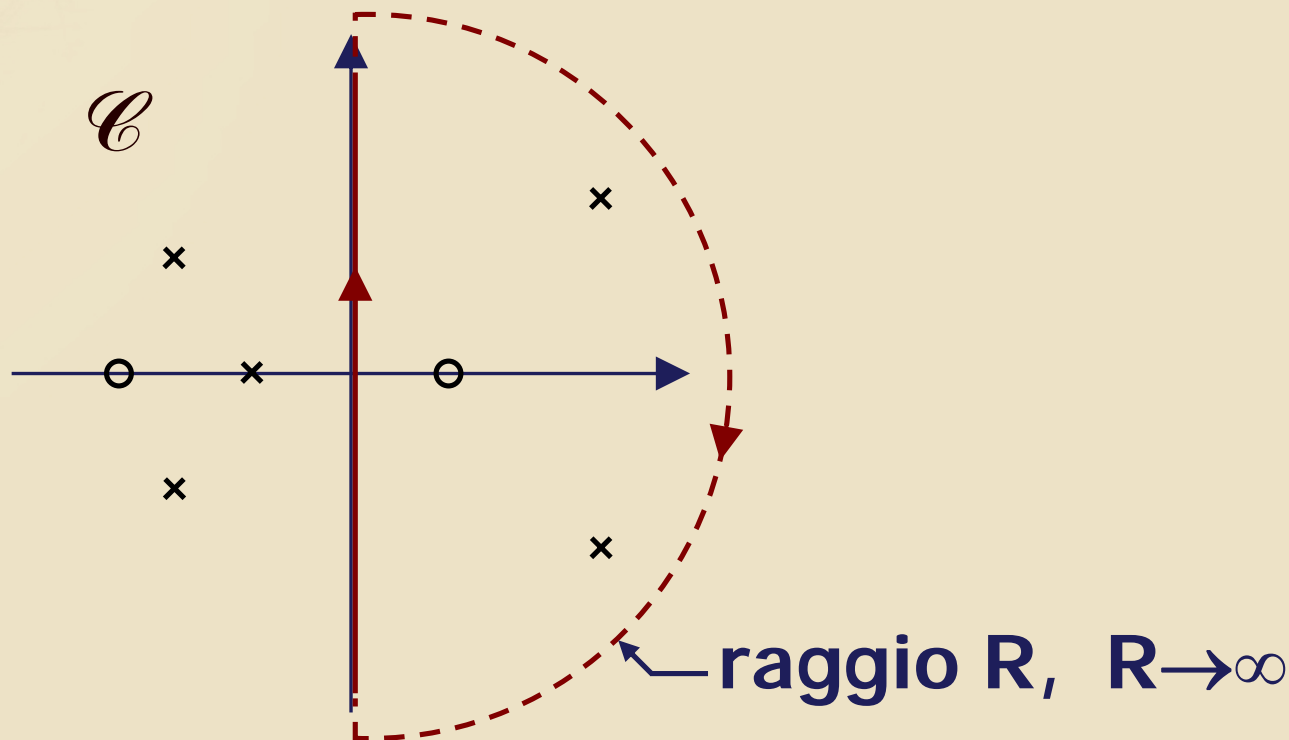


## Dominio della variabile $s$ (1/3)

- Il diagramma di Nyquist (**DdN**) di una fdt consiste nella rappresentazione grafica sul piano  $\mathcal{C}$  di

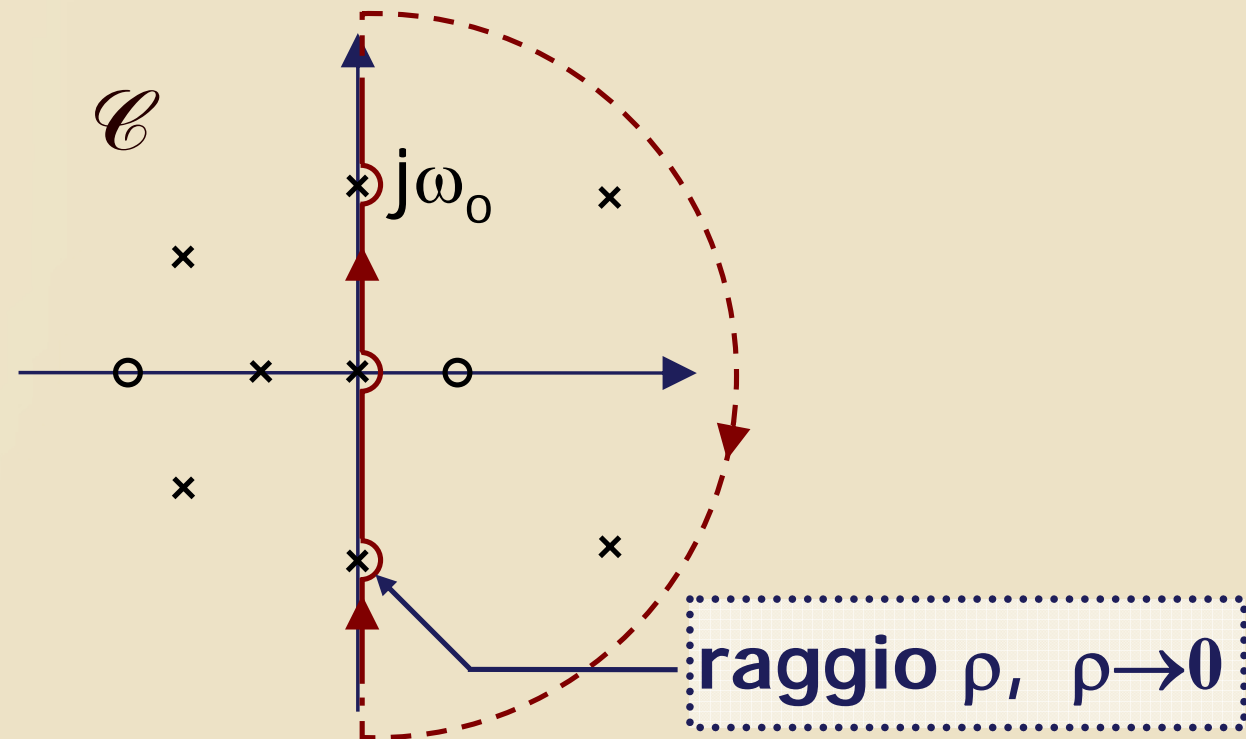
$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) \text{ per } \omega \in (-\infty, +\infty)$$

- Variazione della variabile indipendente:



## Dominio della variabile $s$ (2/3)

- Problema: presenza di poli sull'asse immaginario
- Soluzione:



- Naturalmente

$$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (j\omega_0 + \rho e^{j\alpha}), \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow G(s) \rightarrow \infty$$



## Dominio della variabile $s$ (3/3)

►  $s$  varia su un “**percorso chiuso**”



► Il **DdN** della  $G(s)$  **consiste in un luogo di punti** anche esso **chiuso**



## Poli sull'asse immaginario (1/3)

- Particolare attenzione ai punti in cui  $G(j\omega) \rightarrow \infty$  (presenza di poli sull'asse immaginario)
- Se  $s$  varia da  $j\omega_0^-$  a  $j\omega_0^+$  percorrendo una semicirconferenza di raggio infinitesimo in verso antiorario, allora ...
- $G(s)$  varia da  $G(j\omega_0^-)$  a  $G(j\omega_0^+)$  percorrendo una semicirconferenza di raggio infinito in verso orario
- Se il polo in  $j\omega_0$  ha molteplicità **i** allora da  $G(j\omega_0^-)$  a  $G(j\omega_0^+)$  verranno percorse, sempre in verso orario, **i** semicirconferenze di raggio infinito



## Poli sull'asse immaginario (2/3)

- **NB:** il percorso orario di una semicirconferenza di raggio infinito, per  $\omega$  da  $\omega_0^-$  a  $\omega_0^+$ , equivale a una rotazione di fase di  $-180^\circ$  in un intervallo infinitesimo di  $\omega \Rightarrow$  la fase di  $G(j\omega)$  presenta una discontinuità di  $-180^\circ$  in  $\omega_0$
- È facile dimostrare infatti che in presenza di fattori con poli sull'asse immaginario, del tipo

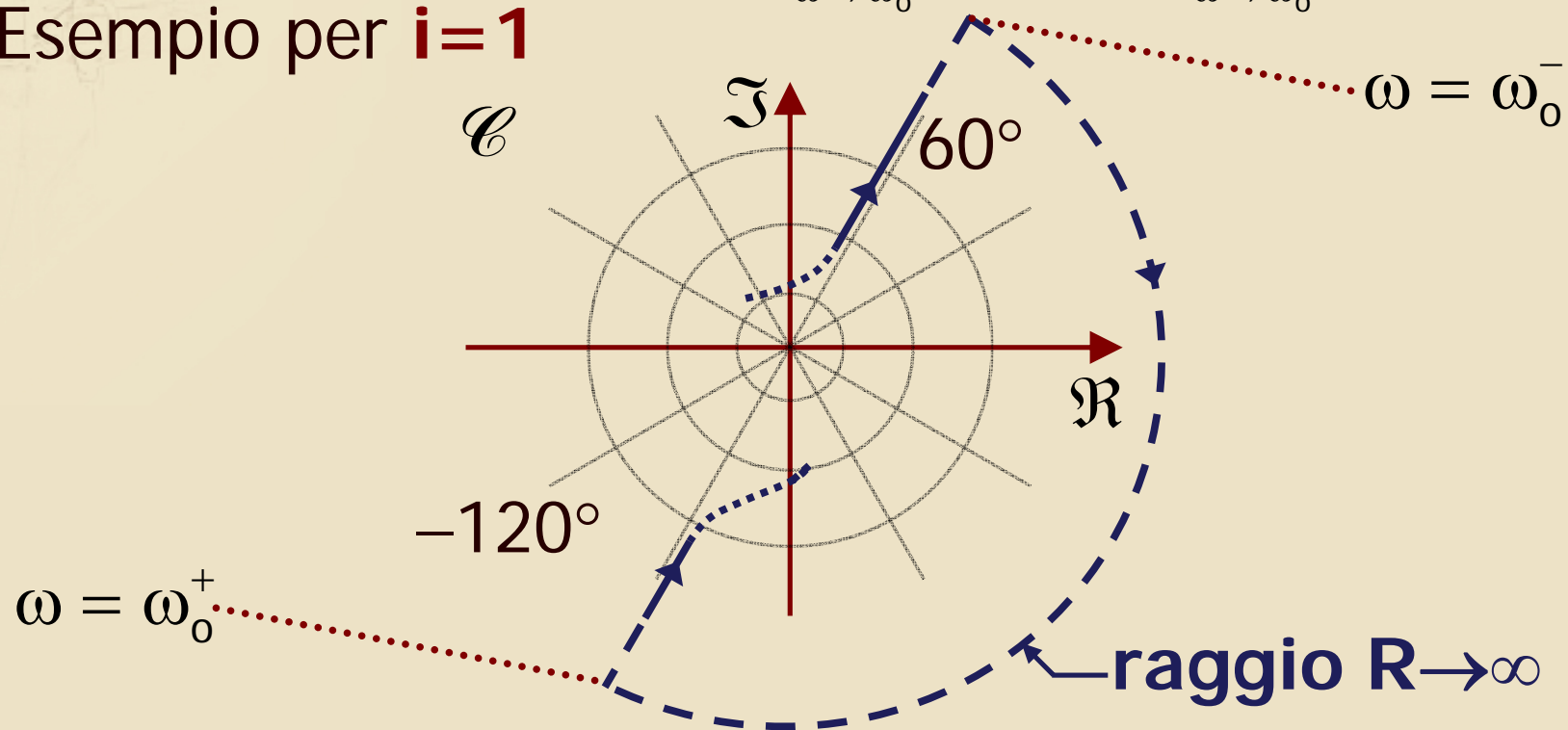
$$\frac{1}{s} \left( = \frac{1}{s + \omega_0} \text{ per } \omega_0 = 0 \right) \text{ oppure } \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \text{ per } \omega_0 \neq 0,$$

la fase presenta una discontinuità di  $-180^\circ$  da  $\omega_0^-$  a  $\omega_0^+$



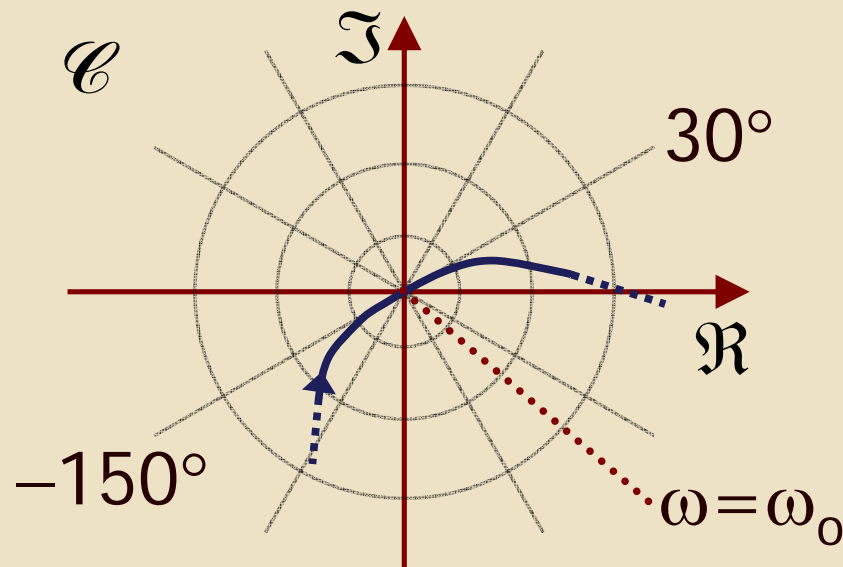
## Poli sull'asse immaginario (3/3)

- Se il polo in  $j\omega_0$  ha molteplicità  $i$  allora la fase presenterà una discontinuità di  $-i180^\circ$  in  $\omega_0$
- Per ciò che è stato fin qui detto valgono ovviamente le seguenti eguaglianze:  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0^+} |G(j\omega)| = \infty$
- Esempio per  $i=1$



## Zeri sull'asse immaginario

- La **presenza di i zeri sull'asse immaginario** (in  $j\omega_0$ ) induce in  $\omega=\omega_0$  una discontinuità di  **$+i180^\circ$**  nella fase e un modulo nullo ( $-\infty$  dB)  $\Rightarrow$  **il DdN attraversa l'origine del piano complesso proprio per  $\omega=\omega_0$**





## Costruzione del DdN (1/4)

► Risultato importante:

sia definito  $\bar{x} \doteq \text{coniugato}(x)$

$$G(\bar{s}) = \overline{G(s)} = \bar{G}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |G(-j\omega)| = |G(j\omega)| \\ \angle G(-j\omega) = -\angle G(j\omega) \end{cases}$$



## Costruzione del DdN (2/4)

- $G(j\omega)$  per  $\omega \in (-\infty, 0)$  coincide con  
 $G(-j\omega)$  per  $\omega \in (\infty, 0)$  ovvero con  
 $\overline{G(j\omega)}$  per  $\omega \in (\infty, 0)$
- Sia  $\omega \in (0, \infty)$ ; il luogo dei punti  $G(-j\omega)$  sul piano complesso  $\mathcal{C}$  è il luogo simmetrico, rispetto all'asse reale, a quello dei punti  $G(j\omega)$
- **NB:** non è difficile dimostrare che  $G(-j\infty) \equiv G(j\infty)$





## Costruzione del DdN (3/4)

- Per tracciare il DdN di una fdt  $G(s)$  è sufficiente seguire poche regole pratiche
  - tracciare il diagramma polare di  $G(j\omega)$
  - tracciare il diagramma simmetrico al precedente rispetto all'asse reale (basta "ribaltare" il diagramma polare rispetto all'asse reale)
  - nel caso siano presenti rami all'infinito ovvero poli sull'asse immaginario, congiungere i rami all'infinito con un opportuno numero di semicirconferenze orarie di raggio  $R \rightarrow \infty$  così come illustrato nelle diapositive precedenti



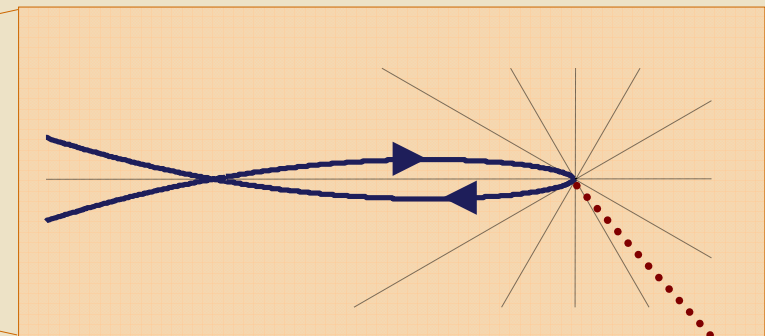
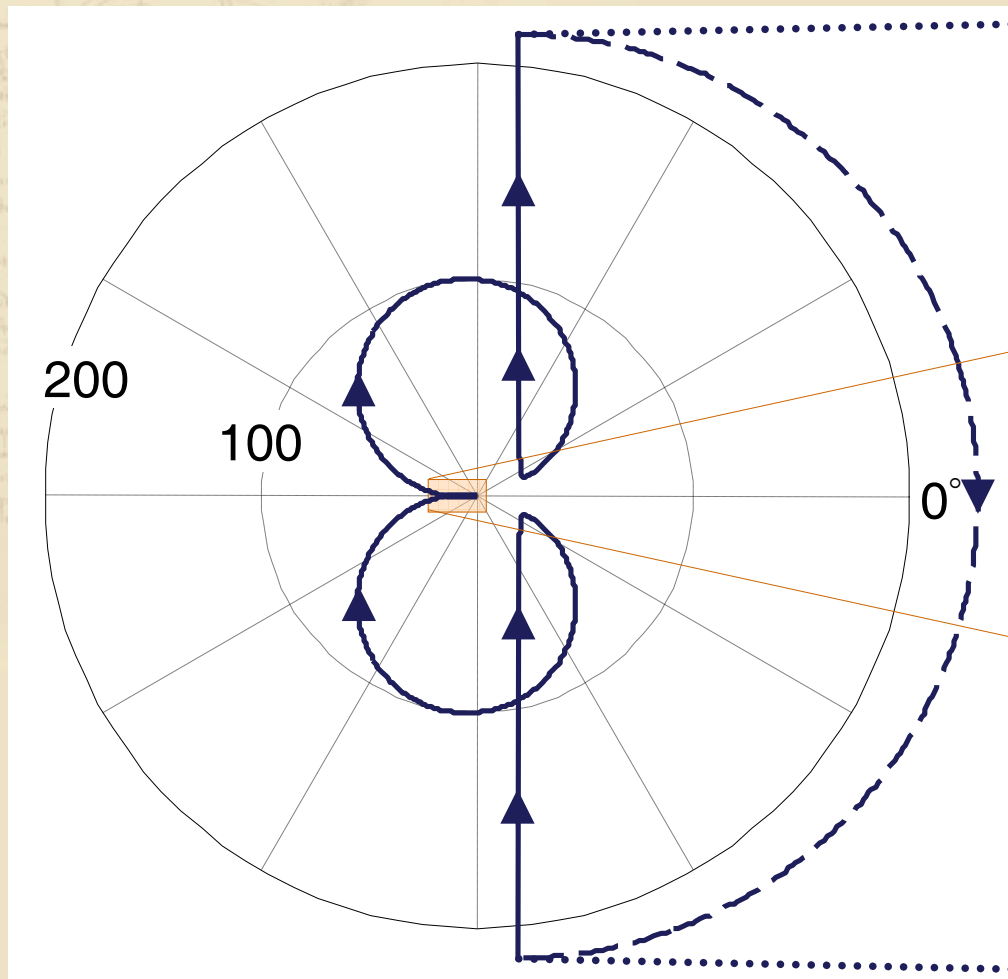


## Costruzione del DdN (4/4)

- mettere in evidenza il verso di percorrenza (da  $\omega=0^+$  a  $\omega=+\infty/-\infty$  a  $\omega=0^-$ )
- verificare che il DdN sia costituito da una curva chiusa

## Esempio 1 (1/2)

$$G(s) = \frac{200(s + 0.1)}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s + 10)}$$



$\omega = 0^-$

$\omega = \pm\infty$

$\omega = 0^+$



## Esempio 1 in Matlab (1/3)

- Il DdN può essere tracciato in ambiente Matlab utilizzando il comando **nyquist** (per la sintassi consultare il relativo help)
- Nel caso della fdt precedente, ad esempio, i comandi Matlab che permettono di tracciare il DdN nel modo più semplice sono i seguenti:

```
>> s=tf('s')  
>> G=200*(s+0.1)/s/(s^2+0.2*s+1)/(s+10)  
>> nyquist(G)  
>> axis equal
```

## Esempio 1 in Matlab (2/3)

```
>> s=tf('s')
```

Transfer function:

$s$

```
>> G=200*(s+0.1)/s/(s^2+0.2*s+1)/(s+10)
```

Transfer function:

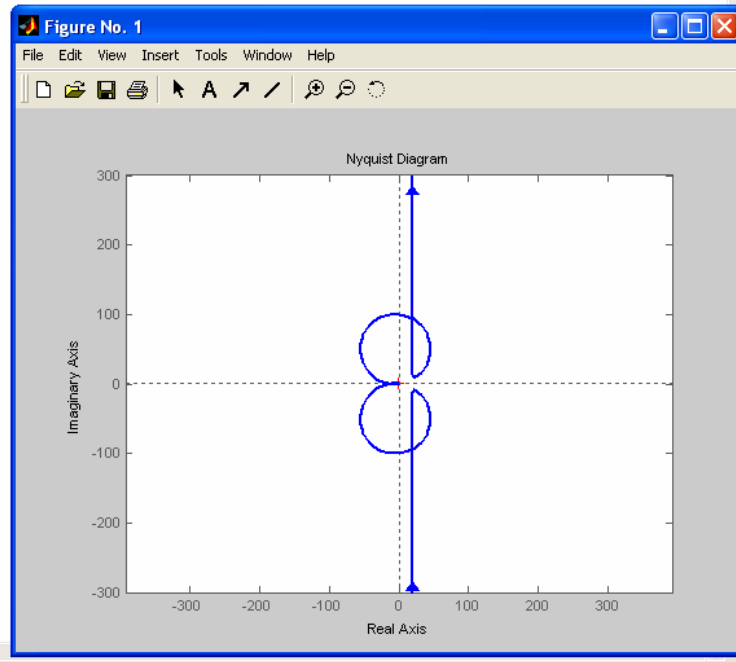
$200 s + 20$

-----  
 $s^4 + 10.2 s^3 + 3 s^2 + 10 s$

```
>> nyquist(G)
```

```
>> axis equal
```

```
>>
```





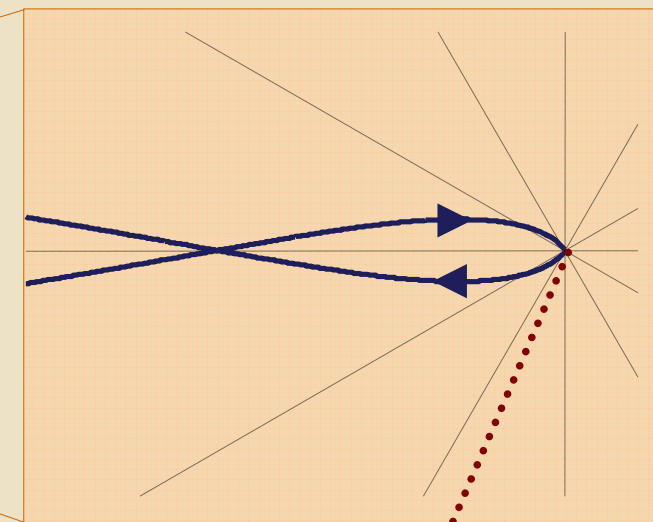
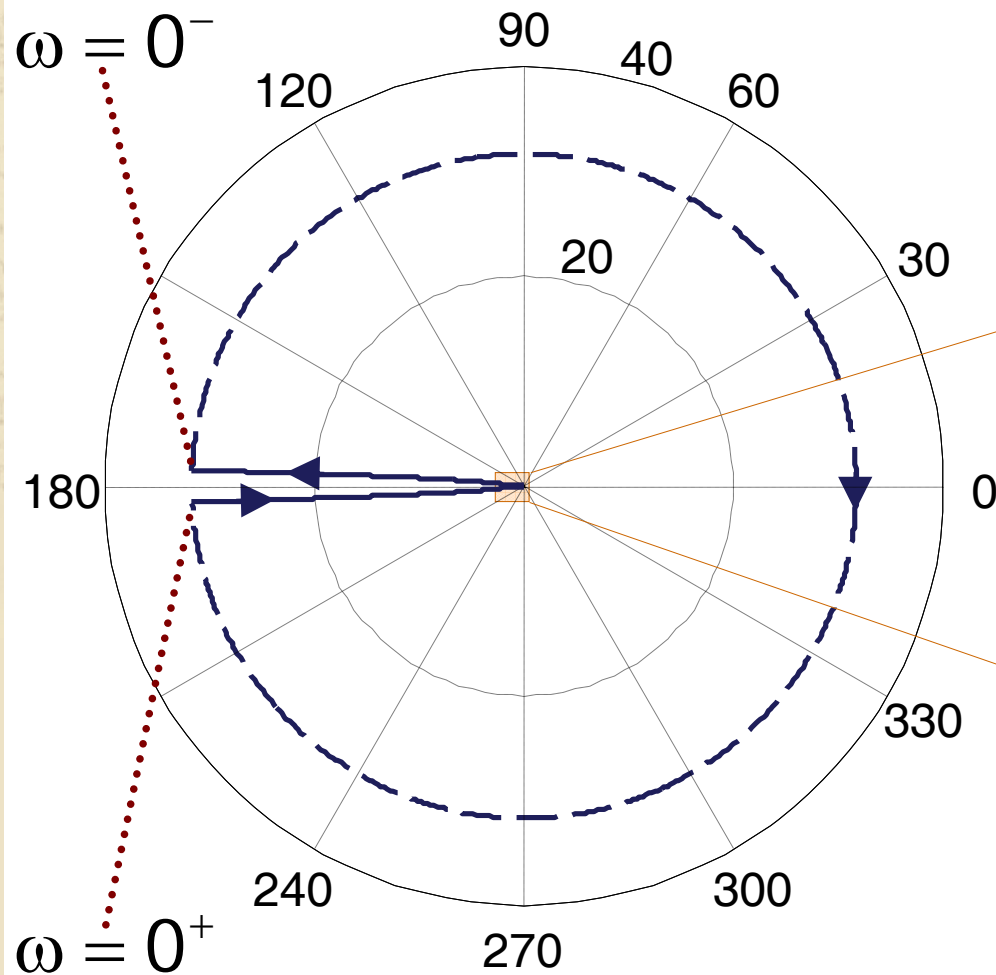
## Esempio 1 in Matlab (3/3)

- Si noti che in ambiente Matlab i DdN possono non essere completi perché mancanti delle eventuali semicirconferenze all'infinito
- I dettagli del DdN possono essere meglio analizzati con successive operazioni di zoom sul diagramma stesso



## Esempio 2 (1/2)

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$



$\omega = \pm\infty$



## Esempio 2 in Matlab (1/3)

- I comandi Matlab che permettono di tracciare il DdN nel modo più semplice sono i seguenti:

```
>> s=tf('s')
```

```
>> G=10*(s+1)/s^2/(s+2)/(s+4)
```

```
>> nyquist(G)
```

```
>> axis equal
```

## Esempio 2 in Matlab (2/3)

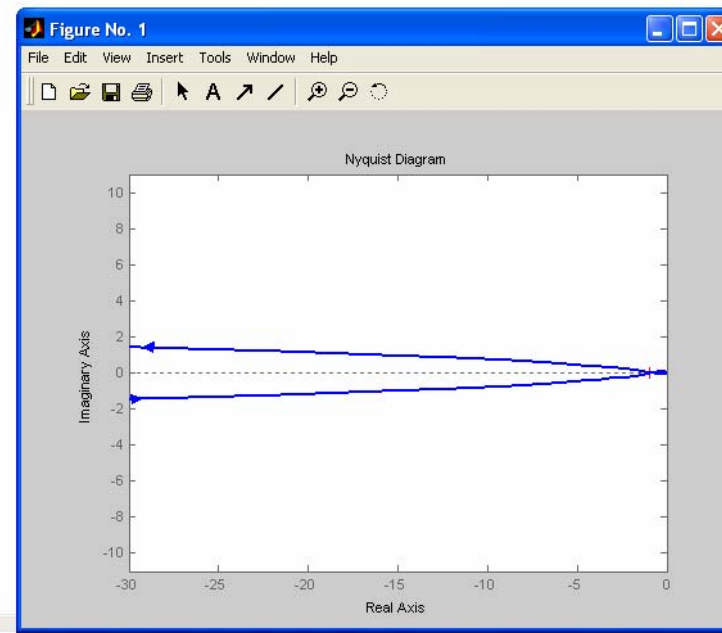
```
>> s=tf('s')
```

Transfer function:  
s

```
>> G=10*(s+1)/s^2/(s+2)/(s+4)
```

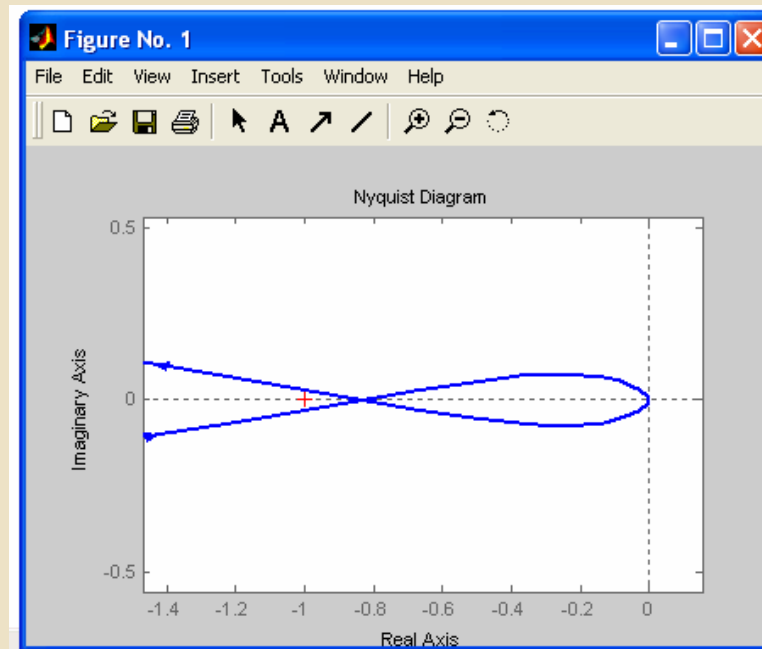
Transfer function:  
10 s + 10  
-----  
s^4 + 6 s^3 + 8 s^2

```
>> nyquist(G)  
>> axis equal  
>>
```



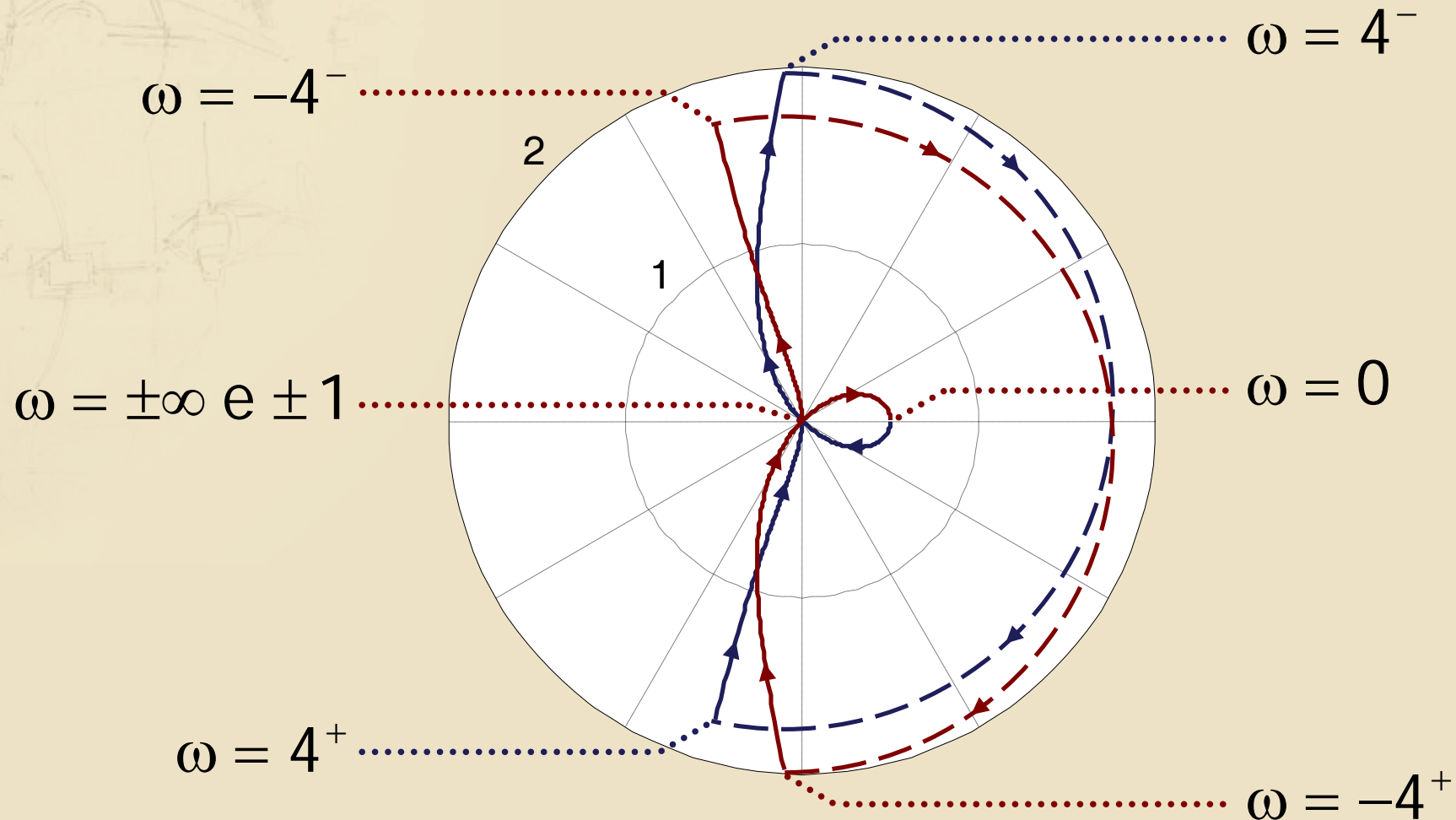
## Esempio 2 in Matlab (3/3)

- Anche in questo caso il DdN non è completo perché mancante delle semicirconferenze all'infinito
- I dettagli del DdN possono essere meglio analizzati con successive operazioni di zoom sul diagramma stesso



## Esempio 3 (1/2)

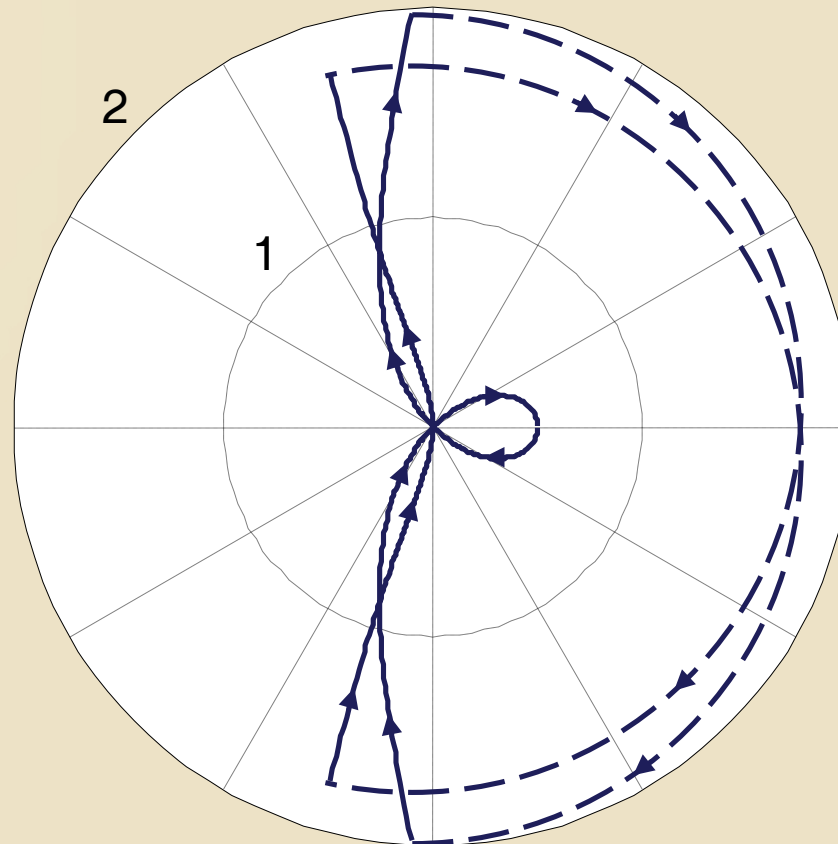
$$G(s) = \frac{4(s^2 + 1^2)(s + 8)}{(s + 2)^2(s^2 + 4^2)}, \quad G_{BF} = 0.5, \quad G_{AF} = \frac{4}{s}$$





## Esempio 3 (2/2)

$$G(s) = \frac{4(s^2 + 1^2)(s + 8)}{(s + 2)^2(s^2 + 4^2)}, \quad G_{BF} = 0.5, \quad G_{AF} = \frac{4}{s}$$





## Esempio 3 in Matlab (1/3)

- I comandi Matlab che permettono di tracciare il DdN nel modo più semplice sono i seguenti:

```
>> s=tf('s')
```

```
>>
```

```
G=4*(s^2+1^2)*(s+8)/(s+2)^2/(s^2+4^2)
```

```
>> nyquist(G)
```

```
>> axis equal
```

## Esempio 3 in Matlab (2/3)

```
>> s=tf('s')
```

Transfer function:

s

```
>> G=4*(s^2+1)*(s+8)/(s+2)^2/(s^2+4^2)
```

Transfer function:

$$4 s^3 + 32 s^2 + 4 s + 32$$

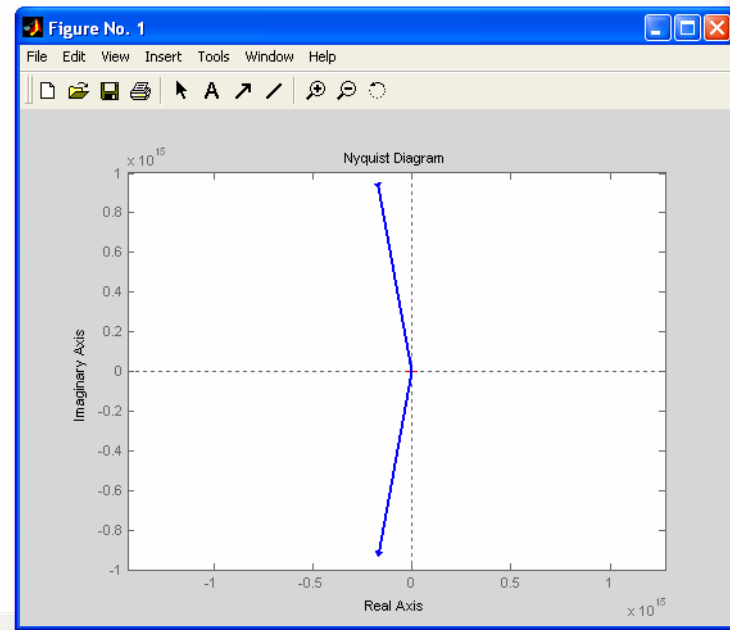
---

$$s^4 + 4 s^3 + 20 s^2 + 64 s + 64$$

```
>> nyquist(G)
```

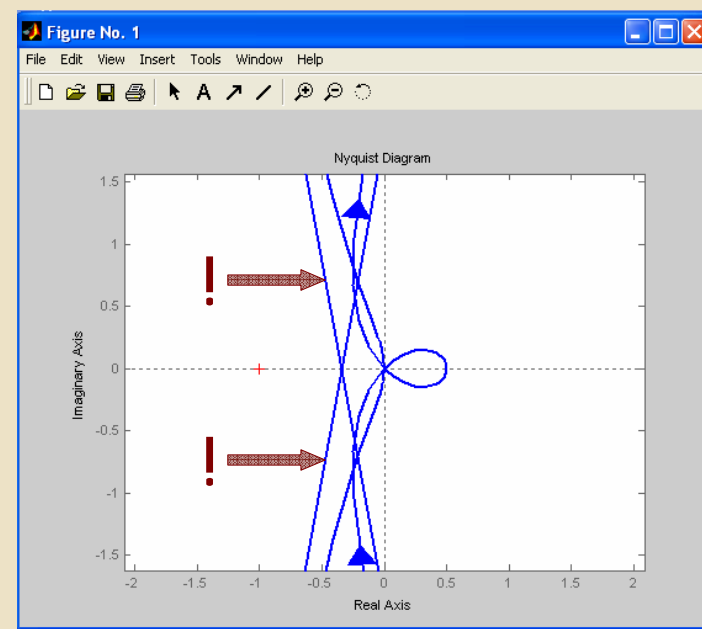
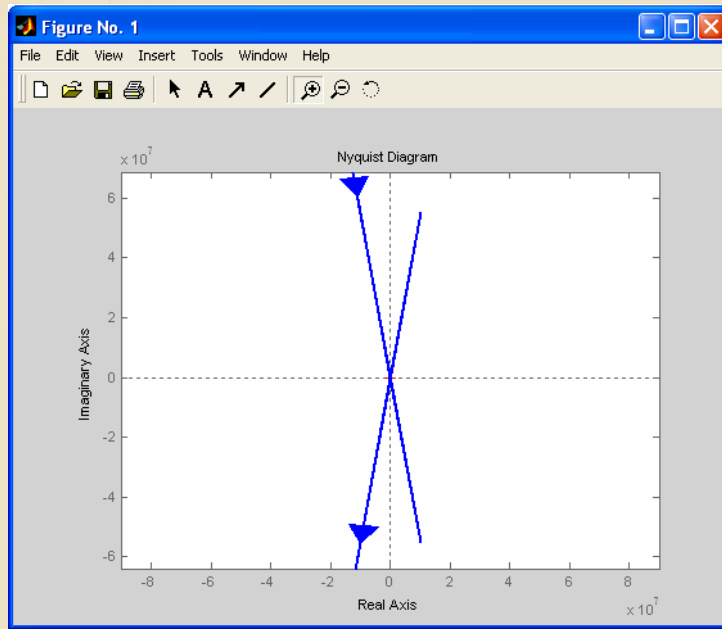
```
>> axis equal
```

```
>>
```

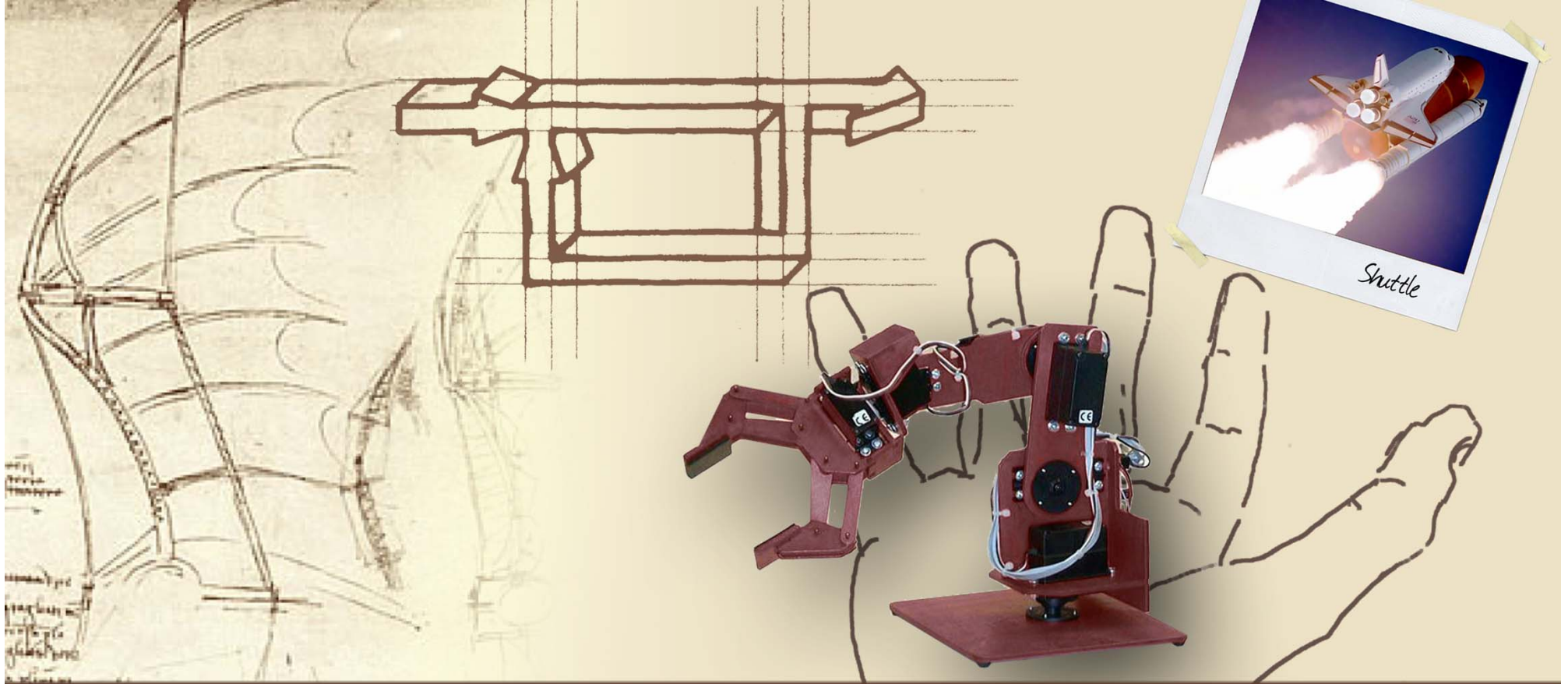


## Esempio 3 in Matlab (3/3)

- Anche in questo caso il DdN non è completo perché mancante delle semicirconferenze all'infinito
- I dettagli possono essere meglio analizzati con successive operazioni di zoom sul diagramma







**Diagrammi polari, di Nyquist e di Nichols**

**Diagramma di Nichols**





## Definizione (1/2)

- Il diagramma di Nichols (**DdNic**) di una fdt consiste nella rappresentazione grafica di

$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \text{ per } \omega \in (0, \infty)$$

sul piano cartesiano

$$\varphi_{\text{gradi}} \otimes M_{\text{dB}}$$

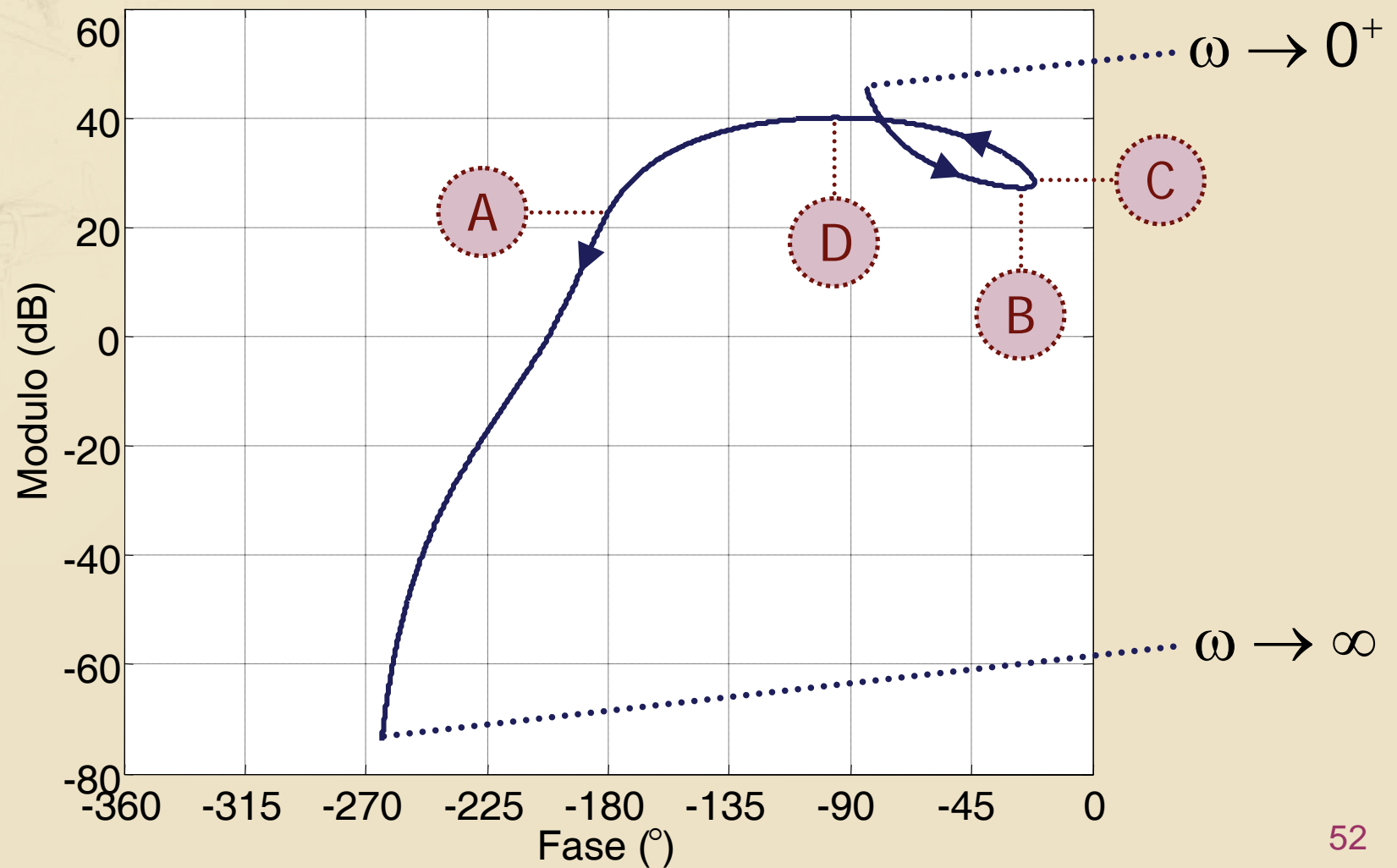


## Definizione (2/2)

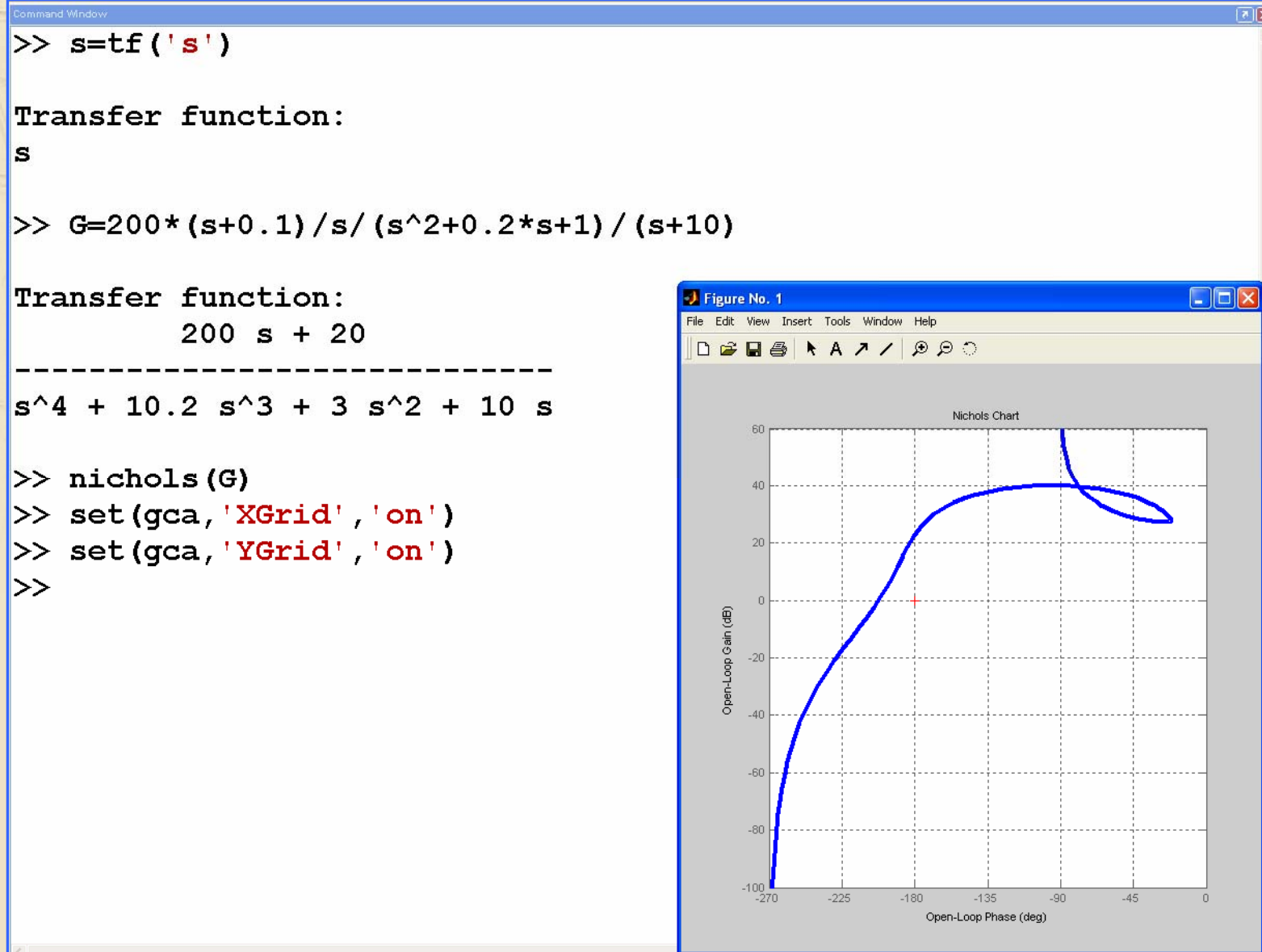
- Nel DdNic la variabile indipendente  $\omega$  diventa la coordinata curvilinea (un punto sul piano  $\varphi \otimes M$  per ciascun valore di  $\omega$ )
- **Per ovvi motivi i valori dell'ascissa possono essere limitati** (ma non è obbligatorio) tra  $-180^\circ$  e  $+180^\circ$  oppure tra  $0^\circ$  e  $+360^\circ$  oppure **tra  $-360^\circ$  e  $0^\circ$** ; nel prosieguo si opterà preferibilmente per l'intervallo  $-360^\circ \div 0^\circ$

## Esempio 1 (1/2)

$$G(s) = \frac{200(s + 0.1)}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s + 10)}$$

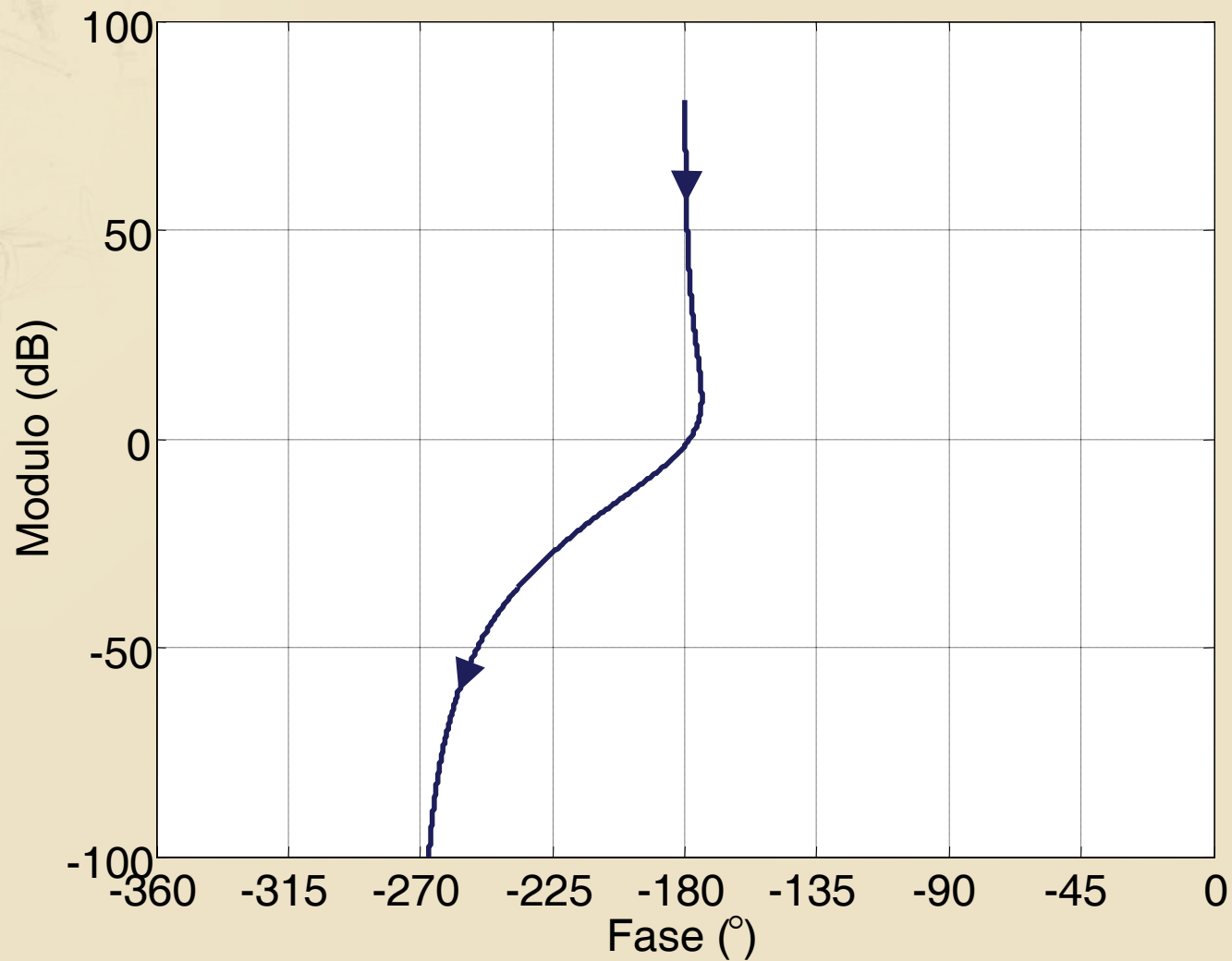


# Esempio 1 in Matlab



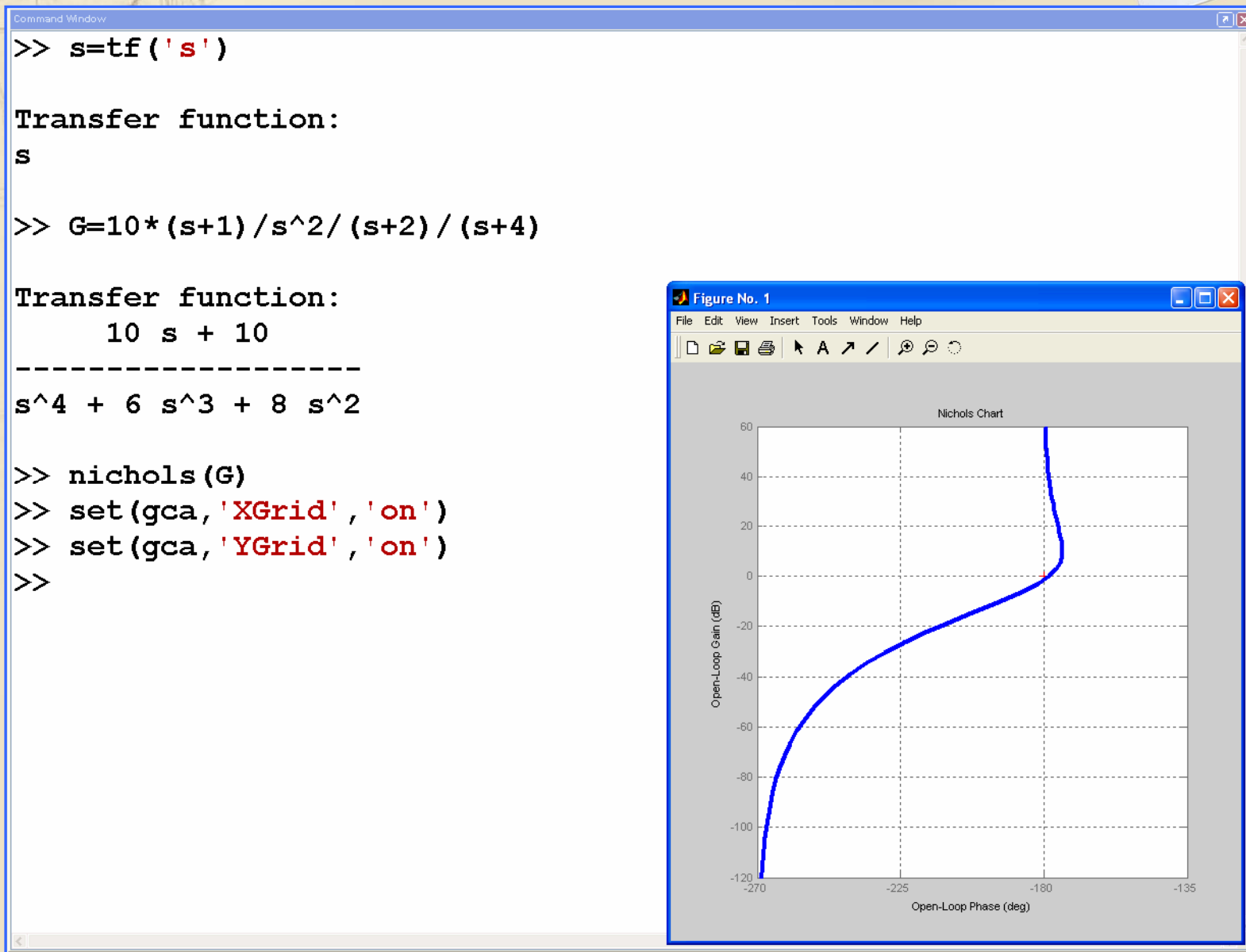
## Esempio 2 (1/2)

$$G(s) = \frac{10(s + 1)}{s^2(s + 2)(s + 4)}$$



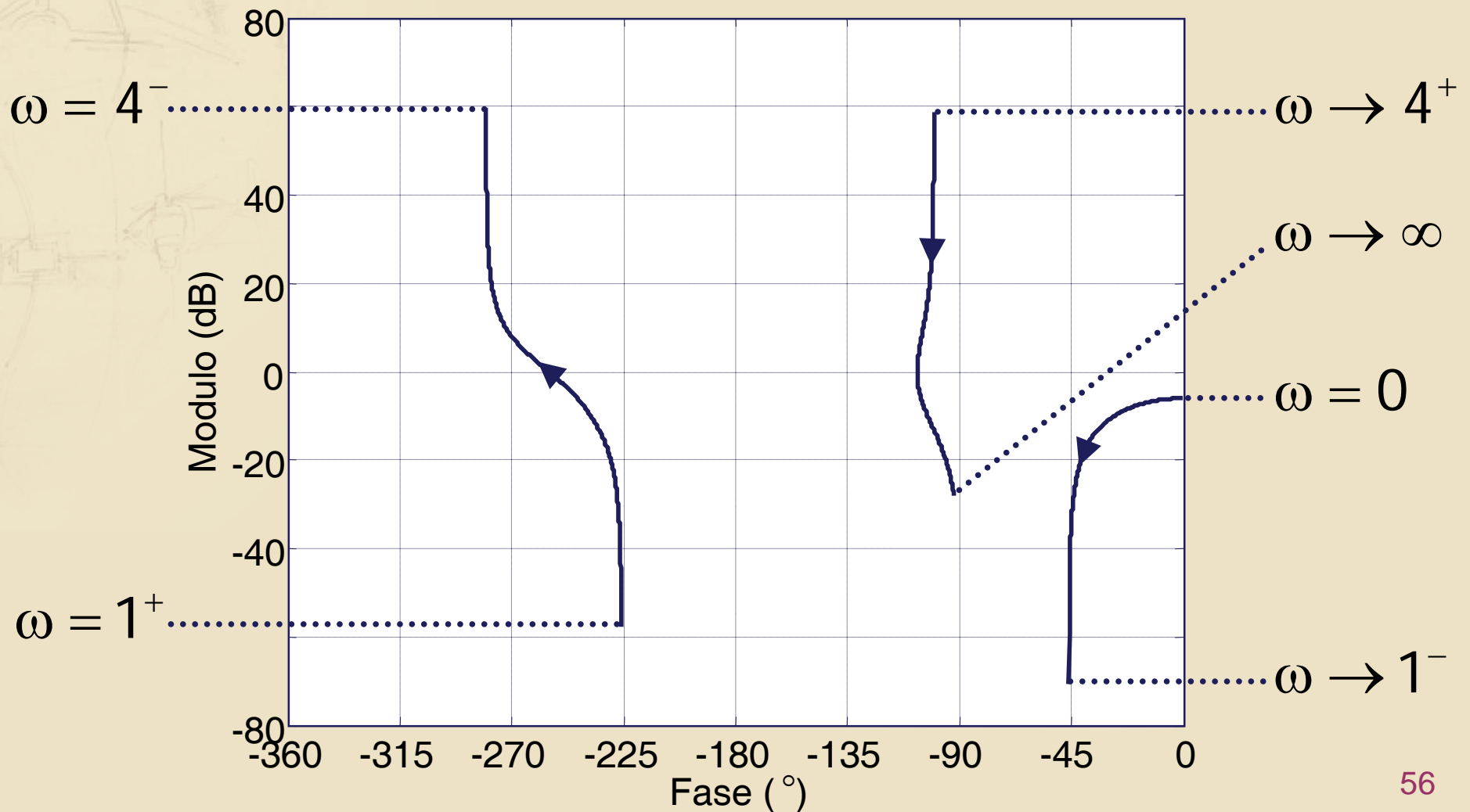


# Esempio 2 in Matlab



## Esempio 3 (1/2)

$$G(s) = \frac{4(s^2 + 1^2)(s + 8)}{(s + 2)^2(s^2 + 4^2)}$$



# Esempio 3 in Matlab

```
Command Window
>> s=tf('s')

Transfer function:
s

>> G=4*(s^2+1)*(s+8)/(s+2)^2/(s^2+4^2)

Transfer function:
      4 s^3 + 32 s^2 + 4 s + 32
-----
s^4 + 4 s^3 + 20 s^2 + 64 s + 64

>> nichols(G)
>> set(gca,'XGrid','on')
>> set(gca,'YGrid','on')
>>
```

