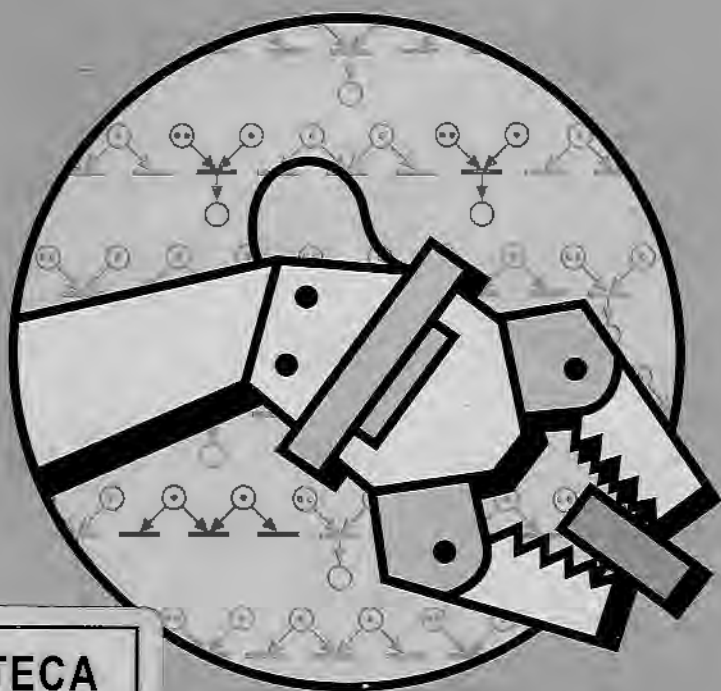


Luca Ferrarini – Luigi Piroddi

Esercizi di CONTROLLO LOGICO CON RETI DI PETRI



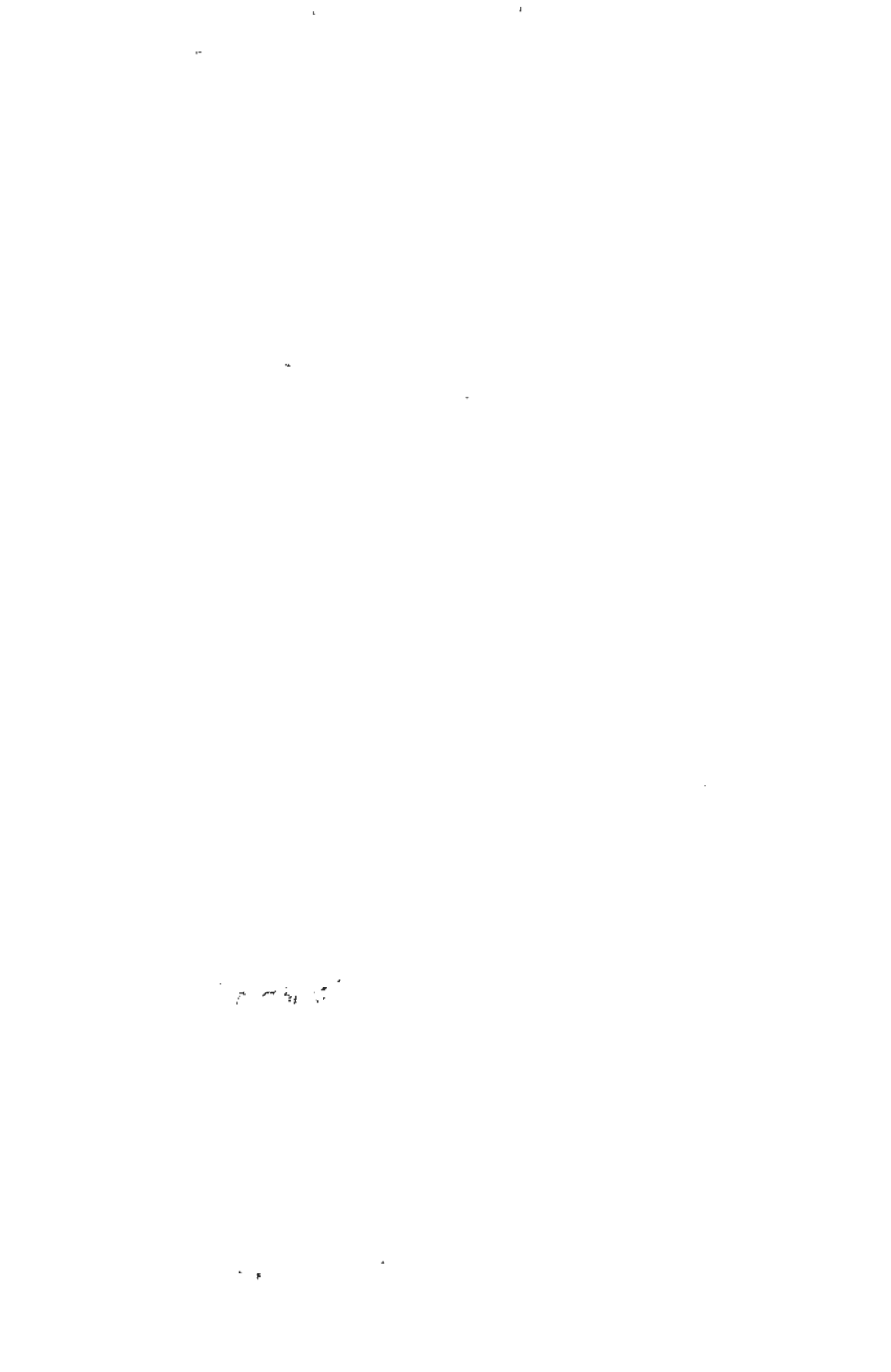
BIBLIOTECA

CENTRALE

INGEGNERIA



gora Editrice Bologna



Luca Ferrarini – Luigi Piroddi

Esercizi di CONTROLLO LOGICO CON RETI DI PETRI



Biblioteca Centrale
Facoltà Ingegneria

050538



Pitagora Editrice Bologna



ISBN 88-371-1340-4

© Copyright 2002 by Pitagora Editrice S.r.l., Via del Legatore 3, Bologna, Italy.

Tutti i diritti sono riservati, nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta, memorizzata o trasmessa per mezzo elettronico, elettrostatico, fotocopia permesso dell'Editore.

Stampa: Tecnoprint S.n.c., Via del Legatore 3, Bologna.

Codice: 37/193

<http://www.pitagoragroup.it>
e-mail: pited@pitagoragroup.it

**POLITECN
BIBL. FAC.
INGEGNER**

**AZ
487**

A Laura (Luca)

Ai miei genitori (Luigi)

PREFAZIONE

Il presente volume contiene una serie di esercizi ed esempi ampiamente discussi sull'utilizzo delle reti di Petri ordinarie per la soluzione di problematiche di controllo logico. Esso nasce come complemento del libro di testo "Automazione Industriale: controllo logico con reti di Petri" della stessa casa editrice.

Le problematiche di controllo logico infatti nascono tipicamente in applicazioni di automazione industriale, ove vi sono problemi che vanno dalla sequenzializzazione di operazioni di avviamento e spegnimento di macchinari, alla sincronizzazione di dispositivi per la movimentazione di prodotti, al coordinamento e supervisione di impianti industriali. Un modo efficace di trattare tali problemi di controllo passa attraverso l'utilizzo di strumenti matematici che fanno capo ai *sistemi dinamici ad eventi discreti*, di cui le reti di Petri rappresentano uno dei più diffusi modelli.

Lo scopo principale del testo non è tanto di rendere disponibile un numero elevato di esempi descritti in modo sintetico, ma al contrario è di discutere criticamente i risultati noti in letteratura, al fine di permettere allo studente di incrementare la padronanza delle principali tecniche modellistiche ed analitiche. Proprio per questo motivo, ogni esercizio viene svolto con dovizia di particolari, con discussioni su vantaggi e svantaggi tra proposte alternative, con approfondimenti sul concetto di stato, di evento, di specifica, e, in più casi, mostrando "passo passo" la soluzione del problema.

In particolare, gli approfondimenti e le discussioni proposte sono utili a coloro che muovono i primi passi nella progettazione delle logiche di controllo di macchine e impianti, e vogliono familiarizzare con tecniche e strumenti formali, indispensabili per dare rigore e sistematicità a tutta la fase progettuale. Pertanto, il testo è particolarmente adatto agli studenti di

primo livello per corsi di automazione industriale e modellistica e controllo di sistemi ad eventi discreti, presenti nei corsi di laurea in ingegneria dell'automazione, informatica, elettronica, elettrica, gestionale, meccanica e chimica.

Il volume è diviso in 5 capitoli. Il primo capitolo è dedicato alle principali proprietà comportamentali e alle regole di evoluzione delle reti di Petri. Il capitolo 2 illustra invece le principali tecniche di analisi formale e strutturale. Nel capitolo 3 si affrontano problemi di modellistica, ovvero problemi in cui si deve "costruire" il modello di un sistema, rappresentandone il comportamento dinamico con reti di Petri. Il capitolo 4 discute le tecniche di sintesi del controllore basate su P-invarianti, mentre il capitolo 5 illustra sinteticamente possibili utilizzi delle reti come specifiche per codice di controllo e quindi mostra come giungere all'implementazione di un programma scritto in uno dei 5 linguaggi della normativa IEC 61131, ovvero il Ladder Diagram.

INDICE

CAPITOLO 1 – EVOLUZIONE E PROPRIETÀ

ESERCIZIO 1	1.1
ESERCIZIO 2	1.5
ESERCIZIO 3	1.9
ESERCIZIO 4	1.13
ESERCIZIO 5	1.17

CAPITOLO 2 – ANALISI STRUTTURALE

ESERCIZIO 1	2.1
ESERCIZIO 2	2.5
ESERCIZIO 3	2.11
ESERCIZIO 4	2.15

CAPITOLO 3 – MODELLISTICA

ESERCIZIO 1	3.1
ESERCIZIO 2	3.3
ESERCIZIO 3	3.8
ESERCIZIO 4	3.12
ESERCIZIO 5	3.15

CAPITOLO 4 – SINTESI DEL CONTROLLORE CON P-INVARIANTI

ESERCIZIO 1	4.1
ESERCIZIO 2	4.10
ESERCIZIO 3	4.17
ESERCIZIO 4	4.29
ESERCIZIO 5	4.33

CAPITOLO 5 – IMPLEMENTAZIONE

ESERCIZIO 1	5.1
-------------------	-----

CAPITOLO 1

EVOLUZIONE E PROPRIETÀ

ESERCIZIO 1

Si consideri la rete di posti-transizioni rappresentata in Fig. 1.1.

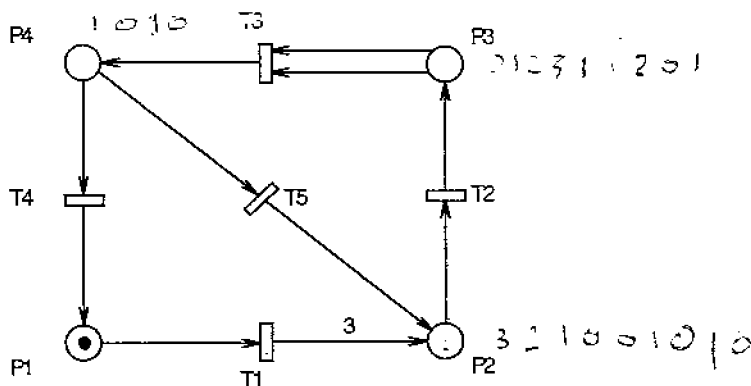


Fig. 1.1

- 1.1) Si definisca la rete come quintupla $(P, T; F, W, M_0)$.
- 1.2) Si determinino i preset e i postset di ogni elemento $x \in X = P \cup T$.
- 1.3) Si dica se la rete di Petri è
 - a) sicura
 - b) limitata
 - c) viva

Si consideri ora la stessa rete con la marcatura iniziale rappresentata in Fig. 1.2.

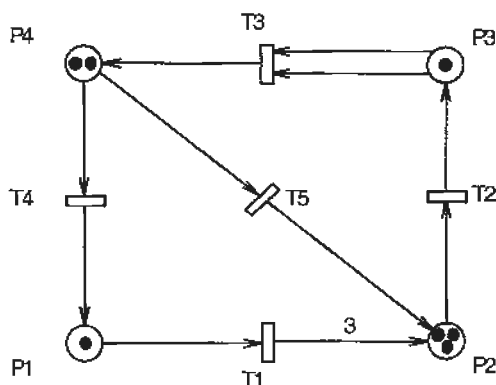


Fig. 1.2

- 1.4) Si dica quali sono le transizioni abilitate nella marcatura riportata in Fig. 1.2. *T1 T4 T2 T5*
- 1.5) Si determinino le marcature conseguenti allo scatto di ciascuna delle transizioni abilitate (trovate al punto precedente), a partire dalla marcatura riportata in Fig. 1.2.
- 1.6) Si trovi una sequenza ammissibile di transizioni che porti la rete di Petri dalla marcatura riportata in Fig. 1.2 alla marcatura $[0 \ 3 \ 3 \ 3]'$.
- 1.7) Si verifichi che le sequenze $(T1, T2, T3, T4, T5)$, $(T2, T3, T5, T4, T1)$ e $(T4, T2, T1, T5, T3)$ sono ammissibili e portano tutte alla medesima marcatura finale. Commentare quest'ultimo fatto. \square

SOLUZIONE

$$1.1) \ P = \{P1, P2, P3, P4\}$$

$$T = \{T1, T2, T3, T4, T5\}$$

$$F = \{(P1,T1), (P2,T2), (P3,T3), (P4,T4), (P4,T5), (T1,P2), (T2,P3), (T3,P4), (T4,P1), (T5,P2)\}$$

$$W(P1,T1) = 1, W(P2,T2) = 1, W(P3,T3) = 2, W(P4,T4) = 1, \\ W(P4,T5) = 1, W(T1,P2) = 3, W(T2,P3) = 1, W(T3,P4) = 1, \\ W(T4,P1) = 1, W(T5,P2) = 1;$$

$$W(x_i, x_j) = 0 \text{ per } (x_i, x_j) \notin F, \text{ dove } x_i, x_j \in X = P \cup T$$

$$M_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]'$$

$$\begin{array}{ll} 1.2) \text{ Pre}(P1) = \{T4\}, & \text{Post}(P1) = \{T1\} \\ \text{Pre}(P2) = \{T1, T5\}, & \text{Post}(P2) = \{T2\} \\ \text{Pre}(P3) = \{T2\}, & \text{Post}(P3) = \{T3\} \\ \text{Pre}(P4) = \{T3\}, & \text{Post}(P4) = \{T4, T5\} \\ \text{Pre}(T1) = \{P1\}, & \text{Post}(T1) = \{P2\} \\ \text{Pre}(T2) = \{P2\}, & \text{Post}(T2) = \{P3\} \\ \text{Pre}(T3) = \{P3\}, & \text{Post}(T3) = \{P4\} \\ \text{Pre}(T4) = \{P4\}, & \text{Post}(T4) = \{P1\} \\ \text{Pre}(T5) = \{P4\}, & \text{Post}(T5) = \{P2\} \end{array}$$

- 1.3) a) No. Se scatta T1, il numero di gettoni in P2 aumenta di 2.
- b) No. La sequenza ciclica T1 T2 T2 T3 T4 T1 ... fa accumulare ∞ gettoni in P2.
- c) No. La sequenza T1 T2 T2 T2 T3 T5 T2 T3 T5 T2 blocca la rete nello stato $[0 \ 0 \ 1 \ 0]'$. Quindi, non è vero che da qualunque marcatura raggiungibile è possibile attivare tutte le transizioni con opportune sequenze di scatti. In particolare, a partire dalla marcatura $[0 \ 0 \ 1 \ 0]'$ non è possibile attivare *nessuna* transizione in questo caso, quindi M_0 è morta.

- 1.4) $\text{Pre}(T1) = \{P1\}, M(P1) = 1 \geq W(P1, T1) = 1 \Rightarrow T1 \text{ abilitata}$
 $\text{Pre}(T2) = \{P2\}, M(P2) = 3 \geq W(P2, T2) = 1 \Rightarrow T2 \text{ abilitata}$
 $\text{Pre}(T3) = \{P3\}, M(P3) = 1 \not\geq W(P3, T3) = 2 \Rightarrow T3 \text{ non abilitata}$
 $\text{Pre}(T4) = \{P4\}, M(P4) = 2 \geq W(P4, T4) = 1 \Rightarrow T4 \text{ abilitata}$
 $\text{Pre}(T5) = \{P4\}, M(P4) = 2 \geq W(P4, T5) = 1 \Rightarrow T5 \text{ abilitata}$
- 1.5) $M_0 = [1 \ 3 \ 1 \ 2]'$.
 $M_0 = [T1 > M_1, \text{ con } M_1 = [0 \ 6 \ 1 \ 2]'$
 $M_0 = [T2 > M_2, \text{ con } M_2 = [1 \ 2 \ 2 \ 2]'$
 $M_0 = [T4 > M_4, \text{ con } M_4 = [2 \ 3 \ 1 \ 1]'$
 $M_0 = [T5 > M_5, \text{ con } M_5 = [1 \ 4 \ 1 \ 1]'$
- 1.6) Una sequenza con le caratteristiche richieste è, per esempio:
 $T1, T4, T1, T2, T2, T2, T2, T2, T3, T3$
- 1.7) Le tre sequenze portano alla marcatura finale $[1 \ 6 \ 0 \ 1]'$. Si ottiene la stessa marcatura perchè in ogni sequenza ciascuna transizione scatta lo stesso numero di volte (ad esempio, T1 scatta una volta sola in ciascuna delle tre sequenze). A causa di ciò, poichè l'effetto netto dello scatto di una transizione, cioè la *variazione* della marcatura della rete, è indipendente dalla marcatura a partire dalla quale la si fa scattare (purchè la transizione sia abilitata), le tre sequenze determinano la stessa variazione netta nella marcatura della rete. Quindi, poichè sono applicate a partire dalla medesima marcatura e sono tutte ammissibili, non possono che portare al medesimo stato finale. \square

ESERCIZIO 2

Si considerino le 3 reti di Petri rappresentate in Fig. 1.3.

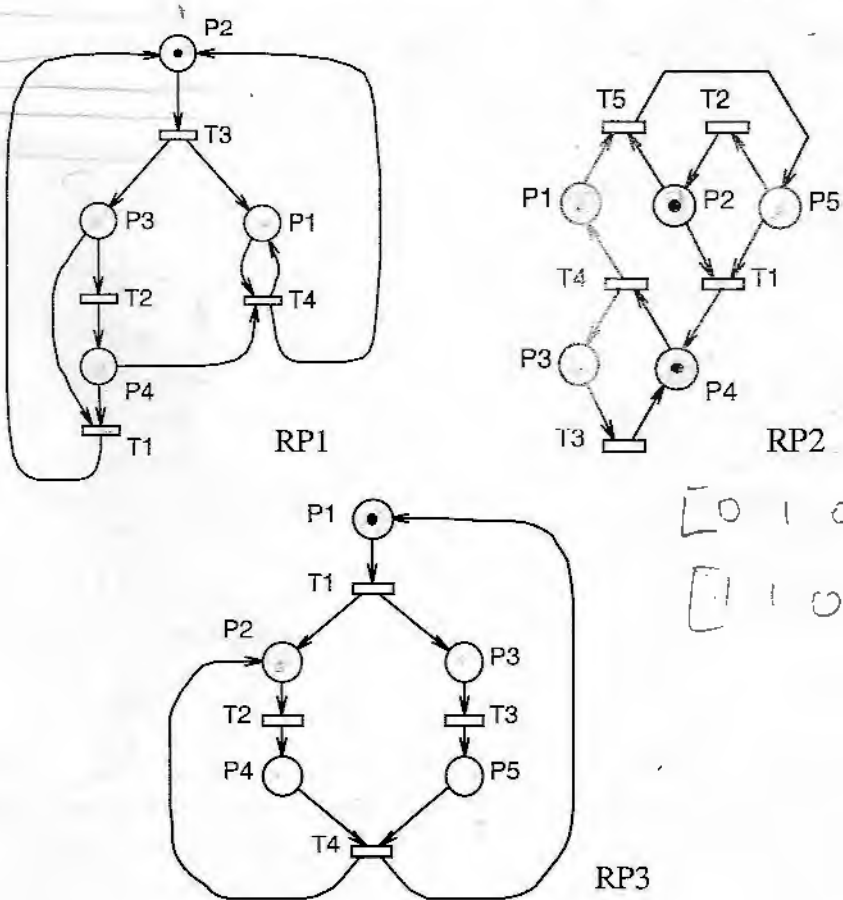


Fig. 1.3

Dire se ciascuna delle reti è:

- 2.1) limitata,
- 2.2) reversibile,
- 2.3) viva. ☐

SOLUZIONE

- 2.1) La rete RP1 non è limitata. Infatti, applicando la sequenza di transizioni T3,T2,T4, le rete si porta nella marcatura $[1\ 1\ 0\ 0]'$, che contiene strettamente la marcatura iniziale, cioè in cui ogni posto non ha meno gettoni di quanti ne aveva nella marcatura iniziale. Allora, la stessa sequenza può essere applicata un numero infinito di volte (richiede soltanto la presenza del gettone in P2) e ogni volta genera un gettone in più in P1. Quindi, il posto P1 non è limitato.

Si noti, peraltro, che l'unico arco uscente dal posto P1 lo collega con la transizione T4, dalla quale parte anche un arco che arriva in P1. Quindi, lo scatto dell'unica transizione che potrebbe togliere gettoni a P1 ha come risultato netto di non mutare la marcatura di P1. Al contrario, ogni volta che scatta T3, il numero di gettoni in P1 aumenta.

La rete RP2 non è limitata. Infatti, la marcatura del posto P1 può crescere indefinitamente applicando ripetutamente la sequenza di transizioni T4,T3.

Anche la rete RP3 non è limitata. Infatti, la marcatura del posto P2 può crescere indefinitamente applicando ripetutamente la sequenza di transizioni T1,T2,T3,T4.

- 2.2) Una rete è reversibile se per ogni marcatura raggiungibile a partire dalla marcatura iniziale esiste una sequenza ammissibile di scatti di transizioni che riporta la rete nella marcatura iniziale.

Con riferimento alla rete RP1 si consideri ora la marcatura $[1\ 0\ 0\ 1]'$, raggiungibile dalla marcatura iniziale. A partire da questa marcatura è abilitata solo la transizione T4 che porta il sistema in $[1\ 1\ 0\ 0]'$. Poichè, come osservato in precedenza, la marcatura di P1 non può essere ridotta ma solo aumentata, non è possibile tornare allo stato iniziale $[0\ 1\ 0\ 0]'$.

La rete RP2 è reversibile. Infatti, si verifica che

- a) T1 non è mai abilitata;

- b) se scatta T4, P3 acquista un gettone e P4 ne perde uno, ma è abilitata T3 e lo scatto di quest'ultima ripristina la marcatura iniziale nei posti P3 e P4;
- c) se scatta T5, P5 acquista un gettone e P2 ne perde uno, ma è abilitata T2 e lo scatto di quest'ultima ripristina la marcatura iniziale nei posti P2 e P5;
- d) ogni volta che scatta T4, viene aggiunto un gettone in P1, ma questo può essere consumato dallo scatto di T5 (che può essere sempre abilitata, eventualmente facendo scattare T2).

Mettendo insieme le regole (a-d) è facile verificare che per ogni marcatura raggiungibile a partire dalla marcatura iniziale esiste una sequenza ammissibile di scatti di transizioni che riporta la rete nella marcatura iniziale.

La rete RP3 non è reversibile. Infatti, il numero di gettoni complessivamente presenti nei posti P2 e P4 non può decrescere (la marcatura di P2 diminuisce di 1 se scatta T2, ma lo scatto di questa transizione aumenta di 1 la marcatura di P4; analogamente, la marcatura di P4 diminuisce di 1 se scatta T4, ma lo scatto di questa transizione aumenta di 1 la marcatura di P2). Allora, non è possibile tornare nello stato iniziale, in cui P2 e P4 sono vuoti, a partire per esempio dallo stato $[0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^*$, in cui P2 è marcato, che si ottiene a partire dalla marcatura iniziale per effetto dello scatto di T1.

- 3.3) La rete RP1 non è viva. Infatti, si osservi che l'insieme di posti $\{P2, P3, P4\}$ può avere al massimo 1 gettone (inizialmente l'insieme contiene un gettone; lo scatto delle transizioni non aumenta il numero di gettoni nell'insieme, poichè se scatta T1 crea un gettone in P4 ma ne toglie uno da P3 e da P4, se scatta T2 crea un gettone in P4 ma ne toglie uno da P3, se scatta T3 crea un gettone in P3 ma ne toglie uno da P2 e, infine, se scatta T4 crea un gettone in P2 ma ne toglie uno da P4). Allora è facile rendersi conto che la transizione T1 non può mai scattare (T1 è morta).

La rete RP2 non è viva. Infatti, si osservi che T1 inizialmente non è abilitata perchè P5 è vuoto. Delle altre transizioni, se scattano T3 o

T4, non muta la marcatura di P2 e P5, se scatta T5 aggiunge un gettone a P5 ma ne toglie uno a P2, e, infine, se scatta T2 aggiunge un gettone a P2 ma ne toglie uno a P5. Allora, è facile rendersi conto che la transizione T1 non può mai scattare (T1 è *morta*).

La rete RP3 è viva. Infatti, dallo stato iniziale sono abilitabili tutte le transizioni (T1 è inizialmente abilitata, T2 e T3 lo diventano se scatta T1, T4 dopo che siano scattate T1, T2 e T3). Inoltre, come mostrato precedentemente, è sempre possibile portare un gettone in P1. Pertanto, da ogni marcatura raggiungibile è sempre possibile trovare una sequenza di scatti di transizioni che abiliti ciascuna delle transizioni della rete. Quindi, tutte le transizioni della rete sono vive e la rete stessa è viva. \square

ESERCIZIO 3

Si consideri la rete di Petri con 4 posti e 5 transizioni rappresentata in Fig. 1.4.

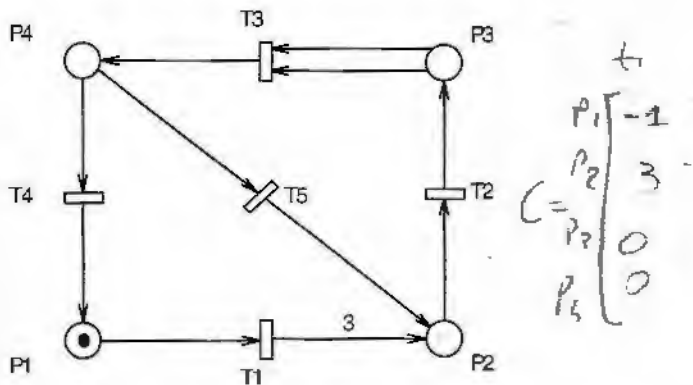


Fig. 1.4

- 3.1) Calcolare le matrici I , O e C che rappresentano la topologia della rete.
- 3.2) Verificare che la sequenza $T1, T2, T2, T3, T2$ è ammissibile e dire se esiste qualche altra sequenza ammissibile con lo stesso vettore delle occorrenze. Dire inoltre in quale marcatura si porta la rete di Petri, inizialmente marcata come in Fig. 1.4, per effetto dell'applicazione della sequenza.
- 3.3) Trovare, se esiste, una sequenza ammissibile di transizioni che a partire dalla marcatura iniziale riporti in essa la rete di Petri. \square

SOLUZIONE

- 3.1) Si indichi con I_{ij} [O_{ij}] il peso dell'arco dal posto i alla transizione j [dalla transizione j al posto i] e con $C_{ij} = O_{ij} - I_{ij}$ l'effetto dovuto allo scatto della transizione j sulla marcatura del posto i . Allora è facile verificare che le matrici I , O e C sono le seguenti:

Matrice I ($\bigcirc \rightarrow |$):

$$I = \begin{array}{ccccc} & T1 & T2 & T3 & T4 & T5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \leftarrow P1 \\ & \leftarrow P2 \\ & \leftarrow P3 \\ & \leftarrow P4 \end{array}$$

Matrice O ($| \rightarrow \bigcirc$):

$$O = \begin{array}{ccccc} & T1 & T2 & T3 & T4 & T5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \leftarrow P1 \\ & \leftarrow P2 \\ & \leftarrow P3 \\ & \leftarrow P4 \end{array}$$

Matrice di incidenza C:

$$C = \begin{array}{ccccc} & T1 & T2 & T3 & T4 & T5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \leftarrow P1 \\ & \leftarrow P2 \\ & \leftarrow P3 \\ & \leftarrow P4 \end{array}$$

- 3.2) Data una sequenza ammissibile di transizioni, la marcatura in cui si porta la Rete di Petri per effetto dell'applicazione della sequenza si calcola con la formula:

$$M'' = M' + C \cdot q,$$

dove M' è la marcatura di partenza, M'' è la marcatura finale, C è la matrice di incidenza e q è il vettore delle occorrenze associato alla sequenza di scatti.

Nel nostro caso, la sequenza T1, T2, T2, T3, T2 risulta ammissibile, così come la sequenza T1, T2, T2, T2, T3, che ha lo stesso vettore delle occorrenze:

$$q = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poichè la marcatura iniziale è

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e la matrice di incidenza è pari a

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

la marcatura finale si calcola nel modo seguente:

$$M = M_0 + C \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3-3 \\ 3-2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3) Una sequenza di transizioni che porti la rete nuovamente nella marcatura iniziale deve verificare l'equazione seguente:

$$M_0 = M_0 + C \cdot q,$$

ovvero

$$C \cdot q = 0.$$

Nel nostro caso si ottiene:

$$\begin{cases} -q_1 + q_4 = 0 \\ 3q_1 - q_2 + q_5 = 0 \\ q_2 - 2q_3 = 0 \\ q_3 - q_4 - q_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} q_2 = 4q_1 \\ q_3 = 2q_1 \\ q_4 = q_1 \\ q_5 = q_1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad q = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

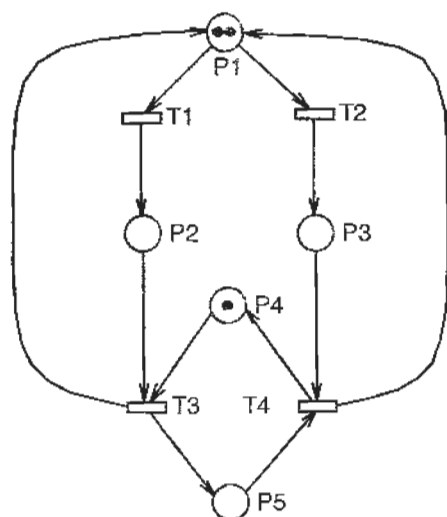
Rimane da verificare se esiste almeno una sequenza ammissibile di transizioni il cui vettore delle occorrenze corrisponda a quello individuato. E' facile rendersi conto che una sequenza ammissibile con queste caratteristiche è:

T1,T2,T2,T2,T3,T5,T2,T3,T4.

Ripetendo questa sequenza, la rete può ciclare all'infinito senza che il numero di gettoni in ogni posto diverga. \square

ESERCIZIO 4

Si consideri la rete di Petri rappresentata in Fig. 1.5, che modella un processo produttivo in cui pezzi dello stesso tipo vengono sottoposti a due lavorazioni differenti e poi depositi su un nastro trasportatore in rigida alternanza. Le due macchine che operano sui pezzi li prelevano da un buffer di capacità 2, che viene ricaricato con un pezzo ogni volta che una delle macchine rilascia un pezzo lavorato al nastro trasportatore.



Significato dei posti:

P1: buffer dei pezzi da lavorare (al massimo 2)

P2: pezzo lavorato dalla macchina A pronto

P3: pezzo lavorato dalla macchina B pronto

P4: nastro in attesa di un pezzo lavorato dalla macchina A

P5: nastro in attesa di un pezzo lavorato dalla macchina B

Significato delle transizioni:

T1: lavorazione di tipo A

T2: lavorazione di tipo B

T3: caricamento sul nastro di un pezzo lavorato dalla macchina A

T4: caricamento sul nastro di un pezzo lavorato dalla macchina B

Fig. 1.5

- 4.1) Si costruisca il grafo di raggiungibilità associato alla rete data con la marcatura iniziale rappresentata in Fig. 1.5.
- 4.2) Analizzando il grafo di raggiungibilità si dica se la rete è limitata, viva e reversibile. \square

SOLUZIONE

4.1) Per costruire il grafo di raggiungibilità si può impiegare il seguente algoritmo:

- a) Disegnare un nodo contrassegnato M_0 associato alla marcatura iniziale. M_0 è il nodo corrente.
- b) Se non ci sono più transizioni attivabili a partire dal nodo corrente e non considerate in precedenza con riferimento al medesimo nodo, allora:
 - se il nodo corrente non è M_0 , definire nodo corrente il nodo contrassegnato con l'etichetta inferiore di 1 rispetto a quella del nodo corrente;
 - se il nodo corrente è M_0 l'algoritmo termina.
- c) Seguire la prima transizione (non considerata in precedenza con riferimento al nodo corrente) che può scattare a partire dalla marcatura associata al nodo corrente e disegnare un arco che va dal nodo corrente al nodo corrispondente alla marcatura raggiunta con lo scatto della transizione. Contrassegnare l'arco con l'etichetta della transizione.
- d) Se non esiste un nodo associato alla nuova marcatura crearlo, contrassegnarlo con un'etichetta ordinata progressivamente e definirlo come nodo corrente.
- e) Ripetere a partire dall'operazione (b).

Così facendo, nel caso fornito si ottiene il grafo di raggiungibilità rappresentato in Fig. 1.6.

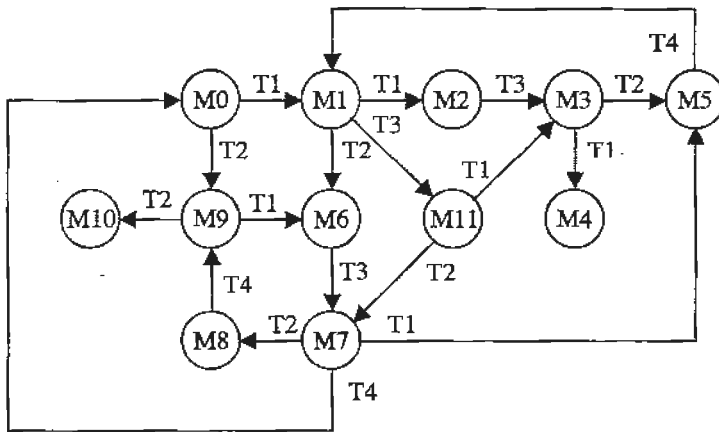


Fig. 1.6 – Grafo di raggiungibilità

Nel grafo sono rappresentate tutte le marcature raggiungibili a partire da M0:

	P1	P2	P3	P4	P5
M0	2	0	0	1	0
M1	1	1	0	1	0
M2	0	2	0	1	0
M3	1	1	0	0	1
M4	0	2	0	0	1
M5	0	1	1	0	1
M6	0	1	1	1	0
M7	1	0	1	0	1
M8	0	0	2	0	1
M9	1	0	1	1	0
M10	0	0	2	1	0
M11	2	0	0	0	1

4.2) Tutte le marcature raggiungibili sono tali per cui:

$$m(P1) \leq 2, m(P2) \leq 2, m(P3) \leq 2, m(P4) \leq 1, m(P5) \leq 1.$$

Quindi, la rete di Petri è limitata ma non sicura (esistono posti che possono avere più di un gettone).

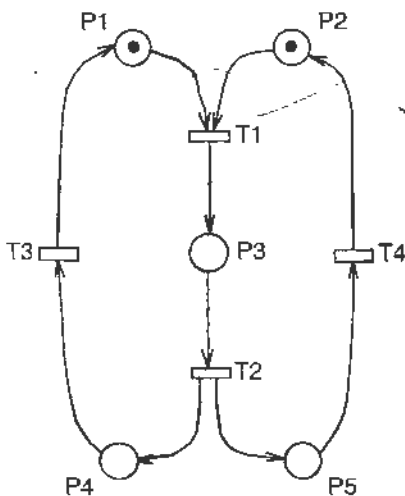
Tutte le marcature raggiungibili, ad eccezione di M_4 e M_{10} , sono anche marcature vive, cioè esiste a partire da esse una sequenza di scatti che abilita una qualunque delle transizioni (in particolare, esiste una sequenza di scatti che riporta la rete nella marcatura iniziale). Da M_4 e M_{10} , invece, non è possibile attivare nessuna transizione: la rete di Petri non è viva (basterebbe che una sola delle transizioni non fosse viva).

Nessuna transizione è viva: esistono stati a partire dai quali nessuna transizione è abilitabile.

La rete non è reversibile: esistono stati a partire dai quali non si torna in M_0 . \square

ESERCIZIO 5

Si consideri la rete di Petri rappresentata in Fig. 1.7, che modella un processo produttivo costituito da due cicli di lavorazione che producono rispettivamente dei semilavorati di tipo A e di tipo B che vengono poi assemblati per realizzare il prodotto finale (*sincronizzazione*). Al termine dell'operazione di assemblaggio possono ripartire entrambi i cicli di lavorazione (*parallelismo*).



Significato posti:

- P1: semilavorato di tipo A pronto
- P2: semilavorato di tipo B pronto
- P3: assemblaggio dei due semilavorati
- P4: lavorazione pezzo di tipo A
- P5: lavorazione pezzo di tipo B

Significato transizioni:

- T1: inizio operazione di assemblaggio
- T2: fine operazione di assemblaggio e inizio produzione semilavorati
- T3: fine lavorazione pezzo di tipo A
- T4: fine lavorazione pezzo di tipo B

Fig. 1.7 - Processo con sincronizzazione e parallelismo

- 5.1) Determinare le matrici I, O e C che caratterizzano la topologia della rete.
- 5.2) Verificare che le due sequenze T1, T2, T3, T4 e T1, T2, T4, T3 sono entrambe ammissibili a partire dalla marcatura iniziale e danno luogo alla stessa marcatura finale.
- 5.3) Trovare l'insieme di raggiungibilità associato alla rete data, a partire dalla marcatura iniziale riportata in Fig. 1.7. Disegnare poi il corrispondente grafo di raggiungibilità.
- 5.4) Sulla base di quanto trovato al punto precedente, analizzare le proprietà della rete. In particolare, dire se la rete è limitata, sicura, conservativa, viva e reversibile.

- 5.5) Si determini la tipologia della rete di Fig. 1.7. In particolare, si dica se è una macchina a stati, un grafo marcato o una rete a scelta libera. \square

SOLUZIONE

- 5.1) Le matrici I, O e C sono le seguenti:

Matrice di ingresso I ($\bigcirc \rightarrow |$):

$$I = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow P1 \\ \leftarrow P2 \\ \leftarrow P3 \\ \leftarrow P4 \\ \leftarrow P5 \end{array} \end{array}$$

Matrice di uscita O ($| \rightarrow \bigcirc$):

$$O = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow P1 \\ \leftarrow P2 \\ \leftarrow P3 \\ \leftarrow P4 \\ \leftarrow P5 \end{array} \end{array}$$

Matrice di incidenza C = O - I:

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow P1 \\ \leftarrow P2 \\ \leftarrow P3 \\ \leftarrow P4 \\ \leftarrow P5 \end{array} \end{array}$$

5.2) La transizione T1 è abilitata da M₀. Infatti:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La marcatura risultante dal suo scatto è:

$$M_1 = M_0 - I_1 + O_1 = M_0 + C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La transizione T2 è abilitata da M₁. Infatti:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq I_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La marcatura risultante dal suo scatto è:

$$M_2 = M_1 + C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A partire da M₂ sono abilitate sia T3 sia T4. Infatti:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq I_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq I_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Se scatta T3, la marcatura risultante è

$$M3 = M2 + C_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mentre, se scatta T4, la marcatura risultante è:

$$M4 = M2 + C_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La transizione T4 è abilitata da M3, così come la transizione T3 a partire da M4. Infatti:

$$M3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq I_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } M4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geq I_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se a partire da M3 scatta T4, la marcatura risultante è:

$$M0 = M3 + C_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, se a partire da M4 scatta T3, la marcatura risultante è:

$$M0 = M4 + C_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, entrambe le sequenze risultano ammissibili a partire dalla marcatura iniziale e danno luogo alla stessa marcatura finale, che peraltro coincide con M0.

Una volta verificata l'ammissibilità delle due sequenze, l'effetto complessivo della loro applicazione può essere calcolato in un unico passo determinando il vettore delle occorrenze di ciascuna sequenza e applicando l'equazione di evoluzione della rete. Si trova immediatamente che i vettori delle occorrenze delle due sequenze sono identici e pari al vettore $q = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$. La coincidenza dei due vettori delle occorrenze assicura che l'effetto finale delle due sequenze sarà identico. Con l'equazione di evoluzione della rete si ottiene:

$$M = M0 + Cq = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = M0.$$

5.3) Analizzando l'evoluzione della rete a partire dalla marcatura iniziale si individuano soltanto 4 stati raggiungibili rappresentati nella seguente tabella:

	P1	P2	P3	P4	P5
M0	1	1	0	0	0
M1	0	0	1	0	0
M2	0	0	0	1	1
M3	1	0	0	0	1
M4	0	1	0	1	0

Il corrispondente grafo di raggiungibilità è rappresentato in Fig. 1.8.

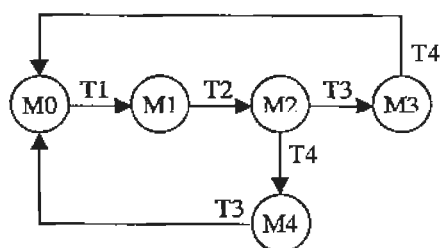


Fig. 1.8 – Grafo di raggiungibilità

- 5.4) Per ispezione dell'insieme di raggiungibilità e del grafo di raggiungibilità, si ricavano le seguenti informazioni.

La rete di Petri è *limitata e sicura*, dato che tutti i posti sono occupati al più da un gettone in tutte le marcature raggiungibili.

La rete di Petri è *conservativa*. Infatti, esiste un vettore $w > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^5 w_i m_i = \text{costante. Tale vettore è pari a } w = [1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1]'$$

La rete di Petri è *viva*: ogni transizione è attivabile con un'opportuna sequenza di scatti a partire da ogni marcatura raggiungibile. Inoltre, tutte le marcature della rete sono vive (esiste una sequenza che abilita ognuna delle transizioni).

Infine, la rete è *reversibile* (da ogni nodo del grafo è possibile tornare in M0).

- 5.5) La rete di Petri non è una *macchina a stati*: non tutte le transizioni hanno un solo posto in ingresso e un solo posto in uscita (v. T1 e T2).

E' invece un *grafo marcato*: tutti i posti hanno una sola transizione a monte e una sola transizione a valle.

Per quest'ultima proprietà, la rete è anche *a scelta libera* (in una rete a scelta libera se un posto è in ingresso a più transizioni (conflitto potenziale), allora esso è l'unico ingresso per quelle transizioni, e se una transizione ha in ingresso più posti essa è l'unica transizione in uscita per quei posti).

CAPITOLO 2

ANALISI STRUTTURALE

ESERCIZIO 1

Si consideri la rete di Petri riportata in Fig. 2.1.

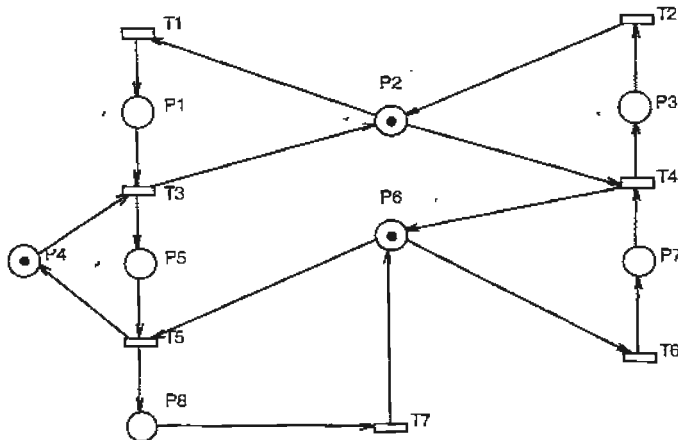


Fig. 2.1

1.1) Verificare che sussistono i seguenti P-invarianti:

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1,$$

$$m_4 + m_5 = 1,$$

$$m_6 + m_7 + m_8 = 1.$$

1.2) Mostrare inoltre che i vettori delle occorrenze associati alle sequenze ammissibili T1-T3-T5-T7 e T6-T4-T2 costituiscono dei T-invarianti

per la rete.

1.3) Dire se gli insiemi di posti riportati di seguito:

$$S1 = \{P2, P3, P4, P6, P8\},$$

$$S2 = \{P1, P2, P3, P4, P5\},$$

$$S3 = \{P1, P4, P5\},$$

$$S4 = \{P1, P4, P5, P8\},$$

sono dei sifoni, delle trappole o nessuno dei due casi precedenti. \square

SOLUZIONE

1.1) E' sufficiente mostrare che $X'C = 0$, dove C è la matrice di incidenza della rete e X è la matrice che contiene per colonne i vettori corrispondenti ai P-invarianti.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$X'C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1.2) Per i T-invarianti occorre verificare che $CY = 0$, dove Y è la matrice che contiene per colonne i vettori corrispondenti ai T-invarianti.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CY = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1.3) Per prima cosa costruiamo la tabella dei pre-set e dei post-set dei posti della rete:

	$\bullet S$	$S\bullet$
P1	{T1}	{T3}
P2	{T2,T3}	{T1,T4}
P3	{T4}	{T2}
P4	{T5}	{T3}
P5	{T3}	{T5}
P6	{T4,T7}	{T5,T6}
P7	{T6}	{T4}
P8	{T5}	{T7}

Ricordando che il preset (postset) di un insieme di posti è l'unione dei preset (postset) dei posti di quell'insieme, si ricavano facilmente i pre-set e i post-set degli insiemi $S1$, $S2$, $S3$ e $S4$:

S		$\bullet S$	$S\bullet$
S1	{P2,P3,P4,P6,P8}	{T2,T3,T4,T5,T7}	{T1,T2,T3,T4,T5,T6,T7}
S2	{P1,P2,P3,P4,P5}	{T1,T2,T3,T4,T5}	{T1,T2,T3,T4,T5}
S3	{P1,P4,P5}	{T1,T3,T5}	{T3,T5}
S4	{P1,P4,P5,P8}	{T1,T3,T5}	{T3,T5,T7}

Ora, poichè $\bullet S1 \subset S1\bullet$, $S1$ è un sifone.

$S2$, invece, è contemporaneamente un sifone e una trappola. Infatti vale la relazione: $\bullet S2 = S2\bullet$. Si noti che $S2$ è il supporto di un P-invariante positivo.

Poichè $\bullet S3 \supset S3\bullet$, $S3$ è una trappola.

Infine, $S4$ non è né un sifone né una trappola, dato che $\bullet S4 \not\subset S4\bullet$, $S4\bullet \neq S4\bullet$ e $S4\bullet \not\subset \bullet S4$. \square

ESERCIZIO 2

Si consideri la rete di Petri rappresentata in Fig. 2.2, che modella un processo produttivo costituito da due cicli di lavorazione che si *sincronizzano* (transizione T1) per compiere un'operazione congiunta, al termine della quale riprendono ad operare in modo indipendente, in *parallelo* (transizione T2).

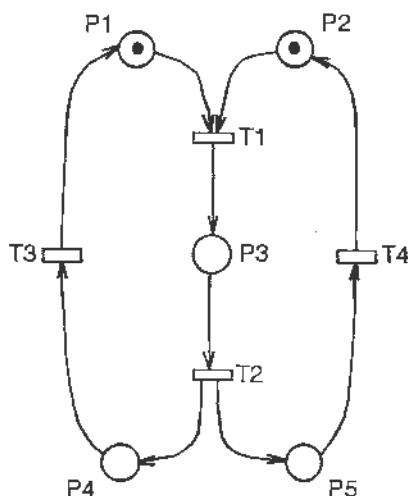


Fig. 2.2 – Modello di un processo con sincronizzazione e parallelismo

- 2.1) Si calcolino i P-invarianti e i T-invarianti minimi della rete secondo la definizione. Dire se la rete è coperta da P-invarianti e se è conservativa.
 - 2.2) Si calcolino i P-invarianti minimi della rete con l'algoritmo tabellare.
-

SOLUZIONE

2.1) Calcolo P-invarianti:

$$x' C = 0 \rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_1 + x_2 \\ x_4 = x_1 \\ x_5 = x_2 \end{cases}$$

Le due soluzioni minime si ottengono imponendo, rispettivamente, $x_1 = 1, x_2 = 0$ e $x_1 = 0, x_2 = 1$:

$$PI1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, PI2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con riferimento alla marcatura iniziale, i due P-invarianti minimi corrispondono alle seguenti condizioni:

- 1) $m_1 + m_3 + m_4 = 1$
- 2) $m_2 + m_3 + m_5 = 1$

In altre parole, in ogni stato raggiungibile della rete c'è un gettone in P1, P3 o P4 e un gettone in P2, P3 o P5. Ricordando l'interpretazione modellistica della rete data, le precedenti condizioni rappresentano i due cicli di produzione dei semilavorati. Per ogni ciclo sono possibili solo 3 stati. Ad esempio, per il ciclo P1-T1-P3-T2-P4-T3 si ha:

- 1) pezzo pronto (gettone in P1)
- 2) assemblaggio (gettone in P3)
- 3) lavorazione pezzo (gettone in P4)

Qualunque combinazione lineare dei due invarianti è ancora un P-invariante. Per esempio:

$$PI3 = PI1 + PI2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La rete è coperta da un P-invariante (ovvero, il supporto di $PI3$ è l'intera rete). Poichè, inoltre, questo P-invariante è *positivo*, essa è *conservativa*. Infatti, vale la relazione seguente:

$$\sum_{i=1}^5 w_i m_i = 2,$$

dove $w = [1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1]'$ ($w_i > 0, \forall i$) coincide proprio con $PI3$.

Risolvendo in maniera del tutto analoga il sistema $Cy = 0$, per il calcolo dei T-invarianti, si trova un'unica soluzione:

$$TI1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E' immediato verificare che esistono due sequenze di transizioni compatibili con il vettore delle occorrenze rappresentato dal T-invariante calcolato:

1) T1, T2, T3, T4

2) T1, T2, T4, T3

In entrambi i casi, l'esecuzione dell'intera sequenza ripristina la marcatura iniziale.

2.2) L'algoritmo tabellare per il calcolo dei P-invarianti minimi consiste dei seguenti passi:

- a) Si costruisce la matrice $D = [I \ C]$, dove I è la matrice identità di dimensioni pari al numero $|P|$ dei posti della rete.
- b) Per ogni transizione T_i (ovvero, per ogni colonna C_i della matrice C), $i = 1, 2, \dots, |T|$:
 - si aggiungono a D tutte le righe che si ottengono come combinazioni lineari *positive* di righe di D tali per cui l'elemento della colonna $(|P|+i)$ -esima (associata alla transizione i -esima) è nullo;
 - si eliminano tutte le righe di D in cui l'elemento della colonna $(|P|+i)$ -esima (associata alla transizione i -esima) è non nullo.
- c) Le prime $|P|$ colonne della matrice risultante contengono l'insieme generatore dei P-invarianti (e quindi, tra gli altri, anche i P-invarianti minimi).

Nel nostro caso, per prima cosa si costruisce la matrice $D = [I_5 \ C]$, dove I_5 è la matrice identità di dimensioni pari al numero dei posti della rete (5).

$$D = \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Con riferimento alla transizione T_1 (ovvero, alla prima colonna di C), si aggiungono alla matrice D tutte le righe che si ottengono come combinazioni lineari positive di righe di D tali per cui l'elemento della 6a colonna (associata alla transizione T_1) è nullo. In totale vengono aggiunte 2 righe, ottenute sommando la 1a e la 3a e la 2a e la 3a di D , rispettivamente.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ 1+3 \\ 2+3 \end{matrix}$$

Poi, si eliminano tutte le righe di D in cui l'elemento della 6a colonna è non nullo, cioè le righe che abbiamo usato per la combinazione lineare che annulla la 6a colonna, ovvero le prime 3.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ripete la medesima operazione sulla 7a colonna (transizione T2). Le righe aggiunte risultano essere 4.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ 1+3 \\ 1+4 \\ 2+3 \\ 2+4 \end{matrix}$$

Le righe da eliminare sono le prime 4.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operando sull'8a colonna (transizione T3) si aggiunge una riga, ottenuta come somma della 2a e della 3a.

$$D = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad 2+3$$

Eliminando la 2a e la 3a riga si ottiene una matrice in cui la 9a e ultima colonna non ha elementi diversi da 0. Quindi non vengono aggiunte ulteriori righe, né vengono eliminate delle righe esistenti

$$D = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Nelle prime 5 colonne della matrice D così ottenuta sono riportati 3 P-invarianti, tra cui i 2 P-invarianti minimi:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{P-inv. minimo} \\ \text{P-inv. minimo} \end{array}$$

ESERCIZIO 3

Si consideri la rete di posti-transizioni rappresentata in Fig. 2.3.

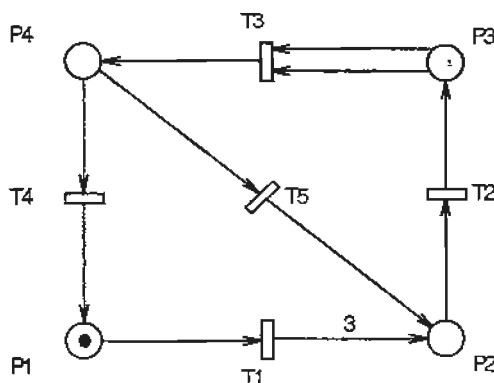


Fig. 2.3

- 3.1) Si calcolino i P-invarianti e i T-invarianti minimi della rete secondo la definizione.
- 3.2) Si calcolino i sifoni della rete. \square

SOLUZIONE

3.1) La matrice di incidenza è pari a:

$$C = \begin{array}{ccccc} & \begin{matrix} T1 & T2 & T3 & T4 & T5 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow P1 \\ \leftarrow P2 \\ \leftarrow P3 \\ \leftarrow P4 \end{matrix} \end{array}$$

Per calcolare i P-invarianti occorre risolvere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$x^T C = 0 \rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Non esiste soluzione tranne quella nulla (che non ha senso come P-invariante).

Simmetricamente, per il calcolo dei T-invarianti occorre risolvere il sistema seguente:

$$Cy = 0 \rightarrow \begin{cases} -y_1 + y_4 = 0 \\ 3y_1 - y_2 + y_5 = 0 \\ y_2 - 2y_3 = 0 \\ y_3 - y_4 - y_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 4y_1 \\ y_3 = 2y_1 \\ y_4 = y_1 \\ y_5 = y_1 \end{cases} \rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si può verificare che la sequenza di scatti T1, T2, T2, T2, T3, T5, T2, T3, T4, il cui vettore delle occorrenze coincide con il T-invariante trovato, è ammissibile a partire dalla marcatura iniziale. Allora, applicando l'intera sequenza ci si riconduce nuovamente alla marcatura iniziale.

3.2) Un algoritmo per il calcolo dei sifoni è il seguente:

- 1) Si costruisce una nuova rete di Petri a partire da quella in esame. La rete trasformata ha gli stessi posti, transizioni e archi della rete di partenza. Il peso di ogni arco entrante in una transizione viene

moltiplicato per un coefficiente pari alla *somma* di tutti i pesi degli archi uscenti dalla medesima transizione.

- 2) Si scrive la matrice di incidenza C' della rete trasformata.
- 3) Un insieme di posti $S = \{x\}$, con $x \geq 0$, è un sifone della rete originaria se e solo se $x^T C' \leq 0$.

Nel nostro caso, la rete trasformata è quella riportata in Fig. 2.4,

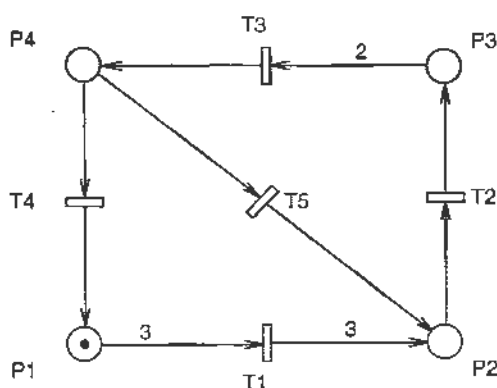


Fig. 2.4 - Rete trasformata

cui corrisponde la seguente matrice di incidenza:

$$\tilde{C} = \begin{array}{ccccc} & \begin{matrix} T1 & T2 & T3 & T4 & T5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} & \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow P1 \\ \leftarrow P2 \\ \leftarrow P3 \\ \leftarrow P4 \end{matrix} \end{array}$$

Il sistema di disequazioni da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ -x_2 + x_3 \leq 0 \\ -2x_3 + x_4 \leq 0 \\ x_1 - x_4 \leq 0 \\ x_2 - x_4 \leq 0 \end{cases}.$$

Riscrivendo il sistema nel modo seguente

$$\begin{cases} x_2 \leq x_1 \\ x_3 \leq x_2 \leq x_1 \\ x_4 \leq 2x_3 \leq 2x_2 \leq 2x_1 \\ x_1 \leq x_4 \\ x_2 \leq x_4 \end{cases},$$

è facile rendersi conto che, oltre alla soluzione banale, l'unica altra soluzione (con massimo comun divisore pari a 1) è la seguente:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

il cui supporto è l'intero insieme di posti della rete $\{P1, P2, P3, P4\}$

Quindi, la rete ammette un unico sifone $S1 = \{P1, P2, P3, P4\}$ che è anche una trappola (infatti, il pre-set e il post-set di $S1$ coincidono con l'intero insieme di transizioni della rete). Questo è un caso di un insieme di posti, i cui pre-set e post-set sono uguali, ma che non costituisce il supporto di un P-invariante della rete (in generale, vale il risultato opposto, ovvero il supporto di un P-invariante positivo è sia un sifone che una trappola). \square

ESERCIZIO 4

Si consideri la rete di Petri rappresentata in Fig. 2.5.

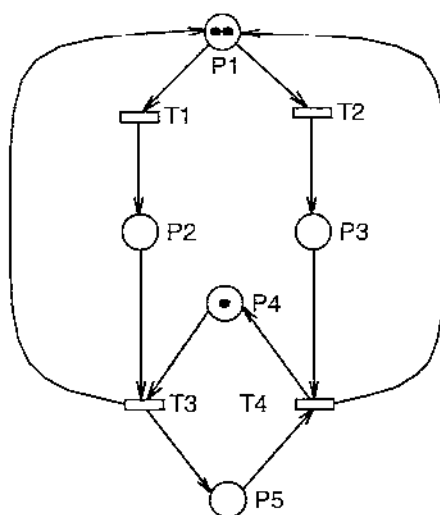


Fig. 2.5

- 4.1) Si calcolino P-invarianti e T-invarianti della rete data. Mostrare che la rete è conservativa.
- 4.2) Sulla base di quanto trovato al punto precedente e sapendo che le marcature $M_4 = [0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ ed $M_{10} = [0 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0]^T$ sono *morte*, individuare 4 sifoni minimi della rete.
- 4.3) Si spieghi quali sono i limiti di un'analisi basata sulla simulazione per il calcolo dei sifoni.
- 4.4) Si calcolino tutti i sifoni minimi della rete.
- 4.5) Sapendo che gli insiemi di posti S_1, S_2, \dots, S_{10} riportati sotto forma di vettori binari nella tabella seguente sono tutti i sifoni della rete data, determinare quali tra questi sono *sifoni di base* e *sifoni p-minimi*.

Sifoni	P1	P2	P3	P4	P5
S1	0	0	0	1	1
S2	1	0	0	1	1
S3	1	0	1	1	0
S4	1	0	1	1	1
S5	1	1	0	0	1
S6	1	1	0	1	1
S7	1	1	1	0	0
S8	1	1	1	1	0
S9	1	1	1	0	1
S10	1	1	1	1	1

□

SOLUZIONE

4.1) La matrice di incidenza è la seguente:

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{T1} & \text{T2} & \text{T3} & \text{T4} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{P1} \\ \leftarrow \text{P2} \\ \leftarrow \text{P3} \\ \leftarrow \text{P4} \\ \leftarrow \text{P5} \end{array} \end{array}$$

Per calcolare i P-invarianti risolviamo il sistema $x'C = 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_4 \end{cases}$$

Dalla soluzione generica appena ricavata, si ottengono due P-invarianti minimi, rispettivamente per $x_1 = 1, x_4 = 0$ e $x_1 = 0, x_4 = 1$:

$$PI1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, PI2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ricordando l'interpretazione come processo produttivo della rete data, il primo P-invariante rappresenta il fatto che le due macchine e il buffer possono contenere al massimo 2 pezzi contemporaneamente (e ogni macchina può lavorare al più un pezzo alla volta). Il secondo P-invariante descrive il regime di rigida alternanza per l'abilitazione delle due transizioni T3 e T4.

Qualunque combinazione lineare dei due invarianti è ancora un P-invariante.

In particolare:

$$PI3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché la rete è coperta da un P-invariante positivo, essa è conservativa. Infatti, per tutte le marcature raggiungibili, vale la relazione seguente:

$$\sum_{i=1}^5 w_i m_i = 3,$$

dove $w = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]'$ ($w_i > 0, \forall i$) coincide proprio con PI3. In particolare, poiché tutti i pesi w_i sono pari a 1 la rete si dice *strettamente conservativa* (i gettoni presenti nella rete sono sempre 3).

Il calcolo dei T-invarianti si effettua risolvendo il sistema $Cy = 0$:

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 - y_3 = 0 \\ y_2 - y_4 = 0 \\ -y_3 + y_4 = 0 \\ y_3 - y_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = y_1 \\ y_2 = y_1 \\ y_3 = y_1 \\ y_4 = y_1 \end{cases}$$

Si ottiene un unico T-invariante:

$$TI1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.2) I supporti dei P-invarianti positivi sono sicuramente dei sifoni (e delle trappole), poichè hanno il pre-set coincidente con il post-set. Verifichiamo:

P-invariante	Sifone corrispondente	$\bullet S$	$S \bullet$
$PI1 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]'$	$\ PI1\ = \{P1, P2, P3\}$	T1,T2,T3,T4	T1,T2,T3,T4
$PI2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]'$	$\ PI2\ = \{P4, P5\}$	T3,T4	T3,T4

Inoltre, gli insiemi di posti smarcati in corrispondenza di una marcatura morta sono dei sifoni che si sono svuotati. Quindi, si trovano altri due sifoni:

Marcatura morta	Sifone corrispondente	$\bullet S$	$S \bullet$
$M4 = [0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1]'$	$\{P1, P3, P4\}$	T2,T3,T4	T1,T2,T3,T4
$M10 = [0 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0]'$	$\{P1, P2, P5\}$	T1,T3,T4	T1,T2,T3,T4

4.3) Alcuni sifoni possono essere individuati per simulazione della rete: se simulando la rete si individua uno stato di blocco, allora un sifone

della rete si è smarcato. Questo può poi essere individuato facilmente come l'insieme dei posti privi di gettoni nello stato bloccato. I problemi relativi a questo approccio sono due:

- 1) non si individuano i blocchi parziali,
- 2) il metodo dipende dalle condizioni iniziali della rete.

4.4) La matrice di incidenza della rete trasformata si può calcolare facilmente analizzando C per colonne. Se in una colonna la somma degli elementi positivi (corrispondenti ai pesi degli archi uscenti dalla transizione) è maggiore di 1, allora tutti gli elementi di segno negativo della stessa colonna (corrispondenti ai pesi degli archi entranti nella medesima transizione) vanno moltiplicati per il valore di questa somma. In definitiva, si ottiene:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il secondo passo è la risoluzione del sistema di disequazioni $x' \tilde{C} \leq 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 + x_3 \leq 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 + x_5 \leq 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq x_1 \\ x_3 \leq x_1 \\ x_1 + x_5 \leq 2(x_2 + x_4) \\ x_1 + x_4 \leq 2(x_3 + x_5) \end{cases}$$

Usando una tecnica di Branch-and-Bound, si trovano le seguenti soluzioni:

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 = x_3 = 0 \\ x_5 \leq 2x_4 \\ x_4 \leq 2x_5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_4 = x_5 = 1 \text{ (S1)}$$

$$x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 + x_5 \leq 2x_4 \\ 1 + x_4 \leq 2x_5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_4 = x_5 = 1 \text{ (S2)}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 + x_5 \leq 2x_4 \\ 1 + x_4 \leq 2 + 2x_5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x_4 = 1, x_5 = 0 \text{ (S3)} \\ &x_4 = x_5 = 1 \text{ (S4)} \end{aligned}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 + x_5 \leq 2 + 2x_4 \\ 1 + x_4 \leq 2x_5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x_4 = 0, x_5 = 1 \text{ (S5)} \\ &x_4 = x_5 = 1 \text{ (S6)} \end{aligned}$$

$$x_4 = x_5 = 0 \text{ (S7)}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 + x_5 \leq 2 + 2x_4 \\ 1 + x_4 \leq 2 + 2x_5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x_4 = 1, x_5 = 0 \text{ (S8)} \\ &x_4 = 0, x_5 = 1 \text{ (S9)} \end{aligned}$$

$$x_4 = x_5 = 1 \text{ (S10)}$$

Tra questi, S2, S4, S6, S10 sono senz'altro non minimi, poichè contengono strettamente S1. Anche S8 e S9 non sono minimi, poichè contengono strettamente S7. I sifoni minimi sono dunque S1, S3, S5 e S7.

4.5) I sifoni di base sono S1, S2, S3, S5, S7. Infatti, $S4 = S1 \cup S3$, $S6 = S1 \cup S5$, $S8 = S3 \cup S7$, $S9 = S5 \cup S7$, $S10 = S1 \cup S7$. Come si vede, tutti i sifoni minimi sono anche sifoni di base, ma non vale il viceversa.

I sifoni P1-minimi sono S2, S3, S5, S7. I sifoni P2-minimi sono S5, S7. I sifoni P3-minimi sono S3, S7. Per P4 e P5 l'unico sifone p-

minimo è S1. Complessivamente, quindi, i sifoni p-minimi sono S1, S2, S3, S5, S7. Come si vede, l'insieme dei sifoni p-minimi coincide con quello dei sifoni di base. \square

A 1 EVENTO : operazione = x_n

A 2 EVENTO : operazione = seq x_n / porta / x_n

A 3 EVENTO : operazione = porta

CAPITOLO 3

MODELLISTICA

ESERCIZIO 1

Si consideri la rete di Petri con 7 posti e 6 transizioni rappresentata in Fig. 3.1.

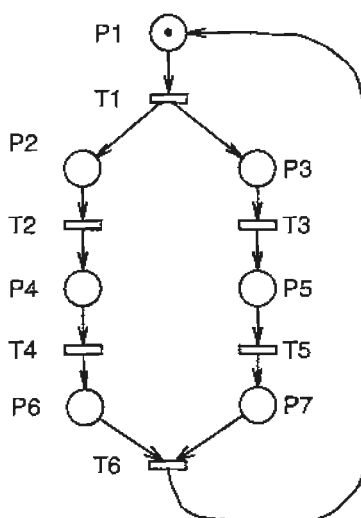


Fig. 3.1

- 1.1) Si dica quali strutture modellistiche di base sono presenti nella rete.

□

SOLUZIONE

- 1.1) Nella rete si riconoscono diverse strutture modellistiche di base:
- a) Le transizioni T2 e T4 sono in sequenza; analogamente, anche T3 e sono in sequenza.
 - b) La transizione T1 è una transizione di inizio di concorrenza (parallelismo).
 - c) La transizione T6 è una transizione di sincronizzazione (appuntamento).

Se ad ogni posto della rete si associa il significato di esecuzione di un'operazione di un processo produttivo, intendendo che l'operazione O_i è in esecuzione se il posto P_i è marcato, la rete rappresenta un processo in cui al completamento dell'operazione O_1 vengono attivate contestualmente le due operazioni O_2 e O_3 . Successivamente, si svolgono in modalità concorrente due sequenze di operazioni $\sigma_1 = O_2, O_4, O_6$ e $\sigma_2 = O_3, O_5, O_7$. Il modello non prevede vincoli di precedenza o ordinamento tra le operazioni delle due sequenze, cioè qualunque combinazione di accadimento delle operazioni delle sequenze è compatibile con il modello, purchè siano rispettati i vincoli di precedenza espressi da σ_1 e σ_2 .

Quando *entrambe* le sequenze sono completate, cioè quando sono state completate le operazioni O_6 e O_7 , il processo può ricominciare dall'operazione O_1 . La transizione T6 opera una sincronizzazione tra le due sotto-sequenze, nel senso che, se una delle due termina prima dell'altra, essa deve comunque aspettarne la conclusione (appuntamento), prima che il processo possa proseguire con O_1 . \square

ESERCIZIO 2 *Modello di operazione a 2 eventi*

Si consideri il sistema di produzione rappresentato in Fig. 3.2, costituito da due macchine M1 e M2, da un robot manipolatore R per le operazioni di carico e scarico dei pezzi, e da un buffer di ingresso B di capacità limitata (pari a 2). I pezzi da lavorare entrano nel buffer, in modo automatico. Quindi il manipolatore R, se libero, carica le macchine M1 e M2, le quali possono accettare solo un pezzo per volta. Al termine della lavorazione sulle macchine, i pezzi lavorati vengono scaricati automaticamente dalle macchine.

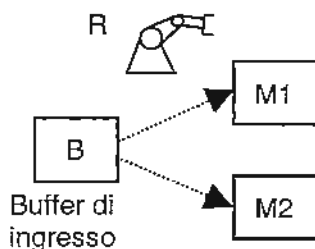


Fig. 3.2 – Sistema di produzione

- 2.1) Si rappresenti con una rete di Petri il comportamento del sistema, utilizzando il modello di operazione a due eventi. □

SOLUZIONE

- 2.1) Come primo passo, si devono individuare e specificare con precisione le operazioni (chiamate anche attività) con cui suddividere il comportamento desiderato del sistema. Tra le soluzioni possibili, si sceglie di individuare le seguenti 5 operazioni:
- carico del buffer di ingresso (dall'acquisizione del pezzo al suo rilascio in una delle posizioni del buffer),

- carico della macchina M_i da parte del manipolatore, per $i = 1, 2$ (dal prelievo del pezzo da parte del manipolatore sul buffer fino al suo rilascio sulla macchina),
- lavorazione sulla macchina M_i , $i = 1, 2$ (dall'inizio della lavorazione vera e propria fino allo scarico automatico del pezzo lavorato).

E' ovviamente importante che la suddivisione delle operazioni comprenda tutti gli stati e le funzioni del sistema stesso. Ogni operazione è quindi modellizzata con una sequenza transizione-posto-transizione, dove il posto rappresenta l'operazione vera e propria e le transizioni sono associate agli eventi di inizio e fine operazione.

Le operazioni sono connesse nel modo seguente:

- al termine del carico del buffer viene eseguita una delle due operazioni di carico della macchina;
- l'operazione di lavorazione sulla macchina M_i è in sequenza a quella di carico sulla medesima macchina.

Le operazioni verranno composte introducendo un opportuno posto intermedio, rappresentante lo stato che corrisponde alla terminazione di un'attività e all'attesa dei necessari consensi per poter effettuare la successiva. Il risultato è mostrato in Fig. 3.3, ove si sono evidenziate le 5 operazioni definite. Il significato di posti e transizioni è il seguente:

P1	operazione di carico del buffer
P2	pezzo disponibile sul buffer
P3	carico della macchina M1
P4	pezzo disponibile sulla macchina M1
P5	lavorazione pezzo (macchina M1)
P6	carico della macchina M2
P7	pezzo disponibile sulla macchina M2
P8	lavorazione pezzo (macchina M2)

T1	inizio dell'operazione di carico del buffer
T2	fine dell'operazione di carico del buffer
T3	inizio dell'operazione di carico della macchina M1

1 operazione \equiv 1 posto

transizioni \equiv 1 inizio operazione
 attorno posto \rightarrow 1 fine operazione

- T4 fine dell'operazione di carico della macchina M1
 T5 inizio dell'operazione di lavorazione sulla macchina M1
 T6 fine dell'operazione di lavorazione sulla macchina M1
 T7 inizio dell'operazione di carico della macchina M2
 T8 fine dell'operazione di carico della macchina M2
 T9 inizio dell'operazione di lavorazione sulla macchina M2
 T10 fine dell'operazione di lavorazione sulla macchina M2

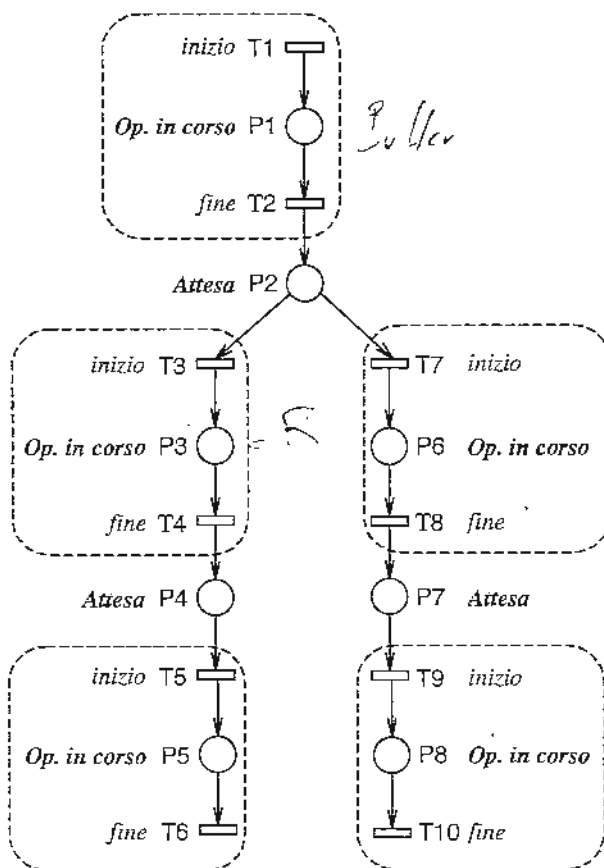


Fig. 3.3 – Modello delle sole operazioni

Si noti come il modello così costruito osservi una struttura logica semplice e ripetitiva. Seguendo, nella direzione degli archi orientati,

gli elementi della rete che corrispondono al flusso dei prodotti entro il sistema, i posti incontrati si alternano tra posti di operazione in corso e posti di attesa. Analogamente, le transizioni incontrate si alternano tra transizioni di inizio di operazione (che corrisponderanno a comandi, cioè uscite, del controllore relativo a tale modello) e transizioni di fine di operazione (che corrisponderanno a misure, cioè ingressi, del controllore relativo al modello).

Per completare il modello dobbiamo rappresentare e gestire il corretto uso dei vari componenti dell'impianto. In effetti, ogni operazione richiede l'uso di almeno una *risorsa*. Le risorse nel nostro esempio sono:

- il buffer B,
- il manipolatore R,
- le due macchine M1 e M2.

Ogni risorsa è modellizzata con un posto inizialmente marcato con un numero di gettoni pari alla disponibilità della risorsa stessa (1 gettone per R, M1 e M2, 2 gettoni per B). La risorsa buffer è utilizzata durante la sequenza delle operazioni di carico del buffer e di carico della macchina. Le risorse di tipo macchina sono utilizzate durante la sequenza delle operazioni di carico macchina e di lavorazione. Infine, la risorsa manipolatore è utilizzata esclusivamente nelle operazioni di carico macchina.

Complessivamente, il sistema di produzione può essere modellizzato con una rete di Petri come quella riportata in Fig. 3.4, dove il significato di posti aggiunti è il seguente:

- | | |
|-----|-----------------------------------|
| P9 | disponibilità di posti sul buffer |
| P10 | disponibilità del manipolatore |
| P11 | disponibilità della macchina M1 |
| P12 | disponibilità della macchina M2 |

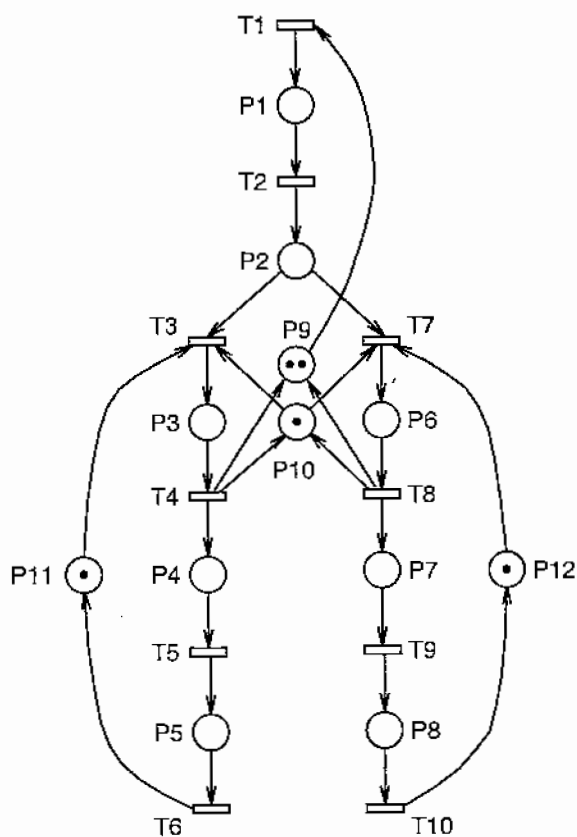


Fig. 3.4 – Modello complessivo del sistema

ESERCIZIO 3 *(modello di operazione a un evento)*

In Fig. 3.5 è illustrato schematicamente un impianto di assemblaggio. In tale impianto, possono entrare due tipi diversi di pezzi grezzi (A e B) che arrivano su nastri separati, i quali possono portare al massimo 3 pezzi contemporaneamente. Un robot manipolatore trasferisce i pezzi grezzi su due macchine operatrici, rispettivamente M_A e M_B , che effettuano una lavorazione singola. I centri possono accettare un solo pezzo grezzo alla volta, non avendo buffer di ingresso né di uscita. Pertanto, dopo la lavorazione, un pezzo attende sulla macchina fino a quando non arriva il robot a scaricare la macchina. Quando entrambe le macchine hanno terminato la lavorazione sui rispettivi pezzi, il manipolatore scarica le macchine dei pezzi lavorati e li porta nella zona di assemblaggio, dove comincia l'operazione di assemblaggio. Al termine, il manipolatore depone il prodotto finito nel buffer di uscita (nastro trasportatore), se c'è spazio: infatti tale buffer può contenere solo un prodotto che viene prelevato dall'esterno.

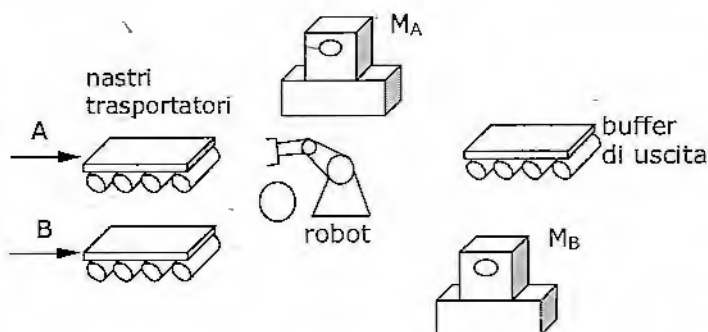


Fig. 3.5 – Sistema di produzione

- 3.1) Si rappresenti con una rete di Petri il comportamento del sistema, utilizzando il modello di operazione a un evento. ☐

OP=TR

SOLUZIONE

3.1) Nella soluzione di seguito illustrata, vengono individuate le seguenti 8 operazioni:

- carico di un pezzo A sul nastro A
- carico di un pezzo B sul nastro B
- R preleva pezzo A e carica M_A
- R preleva pezzo B e carica M_B
- M_A lavora
- M_B lavora
- R preleva un pezzo da M_B e uno da M_A , assembla i pezzi, e scarica il pezzo finito nel buffer di uscita,
- svuotamento del buffer di uscita

★ Ogni operazione è modellizzata con un'unica transizione: il modello complessivo avrà quindi 8 transizioni.

Le operazioni sono connesse nel modo seguente:

- il carico di un pezzo da un nastro è in sequenza all'arrivo pezzo,
- la lavorazione su una macchina è in sequenza al carico di un pezzo dal nastro,
- al termine delle due lavorazioni i due processi si sincronizzano per l'assemblaggio/scarico,
- l'operazione di svuotamento del buffer di uscita è in sequenza a quella di assemblaggio/scarico.

Per realizzare tali combinazioni di operazioni, useremo opportuni posti di connessione, i quali rappresentano stati di attesa relativi alla conclusione di un'operazione prima di poter cominciare la successiva.

Ogni operazione richiede l'uso di almeno una risorsa. Le risorse sono:

- i due nastri di ingresso,

- il manipolatore robotico,
- le due macchine M_A e M_B ,
- il buffer di uscita.

Ogni risorsa è modellizzata con un posto inizialmente marcato con un numero di gettoni pari alla disponibilità della risorsa stessa (3 gettoni per i nastri, 1 gettone per le altre risorse). La risorsa nastro è utilizzata durante la sequenza delle operazioni di carico sul nastro e di carico della macchina. La risorsa macchina è utilizzata durante la sequenza delle operazioni di carico della macchina, lavorazione e prelievo/assemblaggio/scarico. Il manipolatore è utilizzato esclusivamente nelle operazioni di carico e prelievo dalla macchina. Infine, il buffer di uscita è utilizzato durante la sequenza delle operazioni di prelievo/assemblaggio/scarico e di svuotamento del buffer.

Complessivamente, il sistema di produzione può essere modellizzato con una rete di Petri come quella riportata in Fig. 3.6, dove il significato di posti e transizioni è il seguente:

- | | |
|-----|---|
| P1 | pezzo disponibile sul nastro A |
| P2 | disponibilità di posti sul nastro A |
| P3 | pezzo A pronto per essere lavorato sulla macchina M_A |
| P4 | pezzo A lavorato pronto per assemblaggio |
| P5 | disponibilità della macchina M_A |
| P6 | disponibilità di posti sul buffer di uscita |
| P7 | pezzo assemblato disponibile sul buffer di uscita |
| P8 | pezzo disponibile sul nastro B |
| P9 | disponibilità di posti sul nastro B |
| P10 | pezzo B pronto per essere lavorato sulla macchina M_B |
| P11 | pezzo B lavorato pronto per assemblaggio |
| P12 | disponibilità della macchina M_B |
| P13 | disponibilità del manipolatore R |
| | |
| T1 | arrivo di un pezzo sul nastro A |
| T2 | prelievo pezzo A da nastro A, trasporto e carico su M_A |
| T3 | lavorazione sulla macchina M_A |
| T4 | prelievo pezzi lavorati, assemblaggio e scarico del pezzo finito sul buffer di uscita |
| T5 | arrivo di un pezzo sul nastro B |
| T6 | prelievo pezzo B da nastro B, trasporto e carico su M_B |

- T7 lavorazione sulla macchina M_B
 T8 svuotamento del buffer di uscita

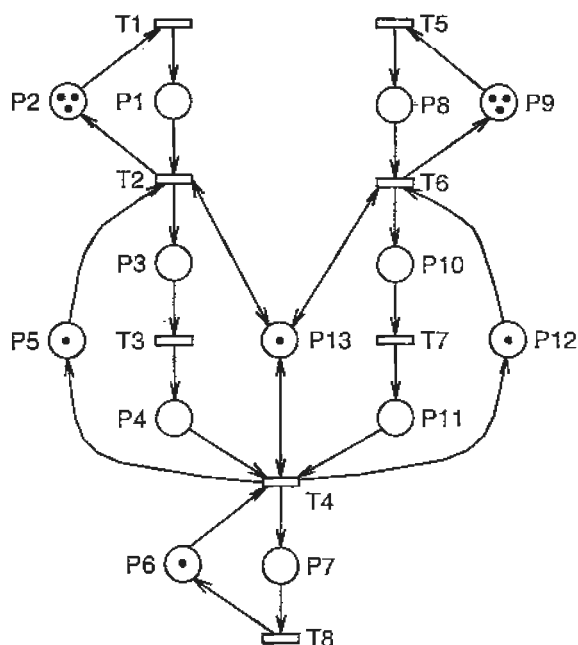


Fig. 3.6 – Modello a reti di Petri

Sì noti che, essendo il robot utilizzato da singole operazioni, la modellizzazione dell'uso della risorsa avviene mediante autoanelli (P13-T2, P13-T4, P13-T6). □

ESERCIZIO 4 FMS

Si consideri una semplice linea di produzione, mostrata in Fig. 3.7. La linea di produzione è composta da due macchine utensili, due bracci meccanici e due nastri trasportatori. Ogni macchina utensile è servita da un braccio meccanico che svolge compiti di carico e scarico. Un nastro trasportatore è usato per trasportare i pezzi da lavorare, con un massimo di due per volta. L'altro nastro è utilizzato per trasportare pallet vuoti. Ci sono tre pallet disponibili nel sistema. Ogni pezzo da lavorare è manipolato su M1 e M2, in questo ordine.

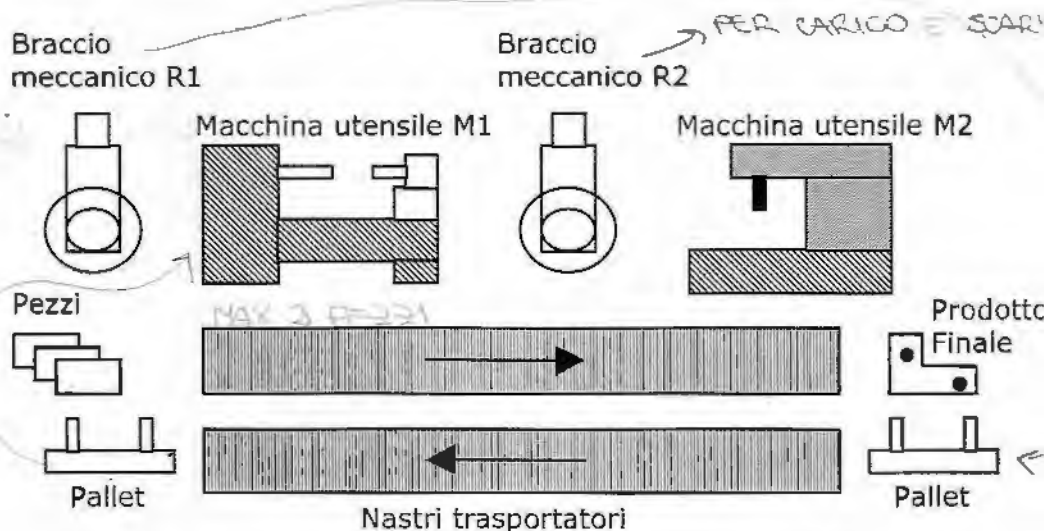


Fig. 3.7 – Linea di produzione

La linea esegue il ciclo di lavorazione seguente: all'arrivo di un pezzo, questo viene caricato da R1 su un pallet e portato alla macchina M1; dopo la lavorazione su M1, il pezzo (sul pallet) viene posto da R1 sul nastro e viene trasportato in corrispondenza di M2; qui viene prelevato da R2 e portato alla macchina M2; dopo la lavorazione su M2, il pezzo viene rilasciato da M2 e il pallet viene messo sul nastro che lo riporta all'inizio della linea.

- 4.1) Si rappresenti con una rete di Petri il comportamento del sistema, utilizzando la modellizzazione di tipo FMS. Non rappresentare esplicitamente le operazioni di trasporto dei bracci meccanici. □

SOLUZIONE

- 4.1) Tenendo conto delle semplificazioni introdotte nel testo del problema, è sufficiente modellizzare il sistema mediante le seguenti 3 operazioni:

- lavorazione di M1
- trasporto del pezzo sul nastro
- lavorazione di M2

Ogni operazione è modellizzata con un posto. Le transizioni rappresentano la fine di un'operazione e l'avvio della successiva, oltre ad eventuali altre operazioni intermedie, non rappresentate esplicitamente, per il rilascio e l'acquisizione di risorse.

Le tre operazioni sono connesse in sequenza: la lavorazione su M1 è seguita dal trasporto del pezzo sul nastro e dalla lavorazione di M2; a ciclo ultimato, si riprende dalla lavorazione su M1.

Le risorse sono le due macchine utensili, i due bracci robotici, i due nastri trasportatori. Il nastro che trasporta i pezzi ha capacità 2, mentre quella del nastro che trasporta i pallet è determinata dal numero massimo di pallet (3). Ogni risorsa è modellizzata con un posto inizialmente marcato con un numero di gettoni pari alla disponibilità della risorsa stessa.

Complessivamente, il sistema di produzione può essere modellizzato con una rete di Petri come quella riportata in Fig. 3.8, dove il significato di posti è il seguente:

- P1 pallet disponibile
- P2 lavorazione su M1
- P3 trasporto su nastro

- P4 lavorazione su M2
 P5 macchina M1 disponibile
 P6 nastro trasportatore disponibile
 P7 macchina M2 disponibile
 P8 braccio meccanico R1 disponibile
 P9 braccio meccanico R2 disponibile

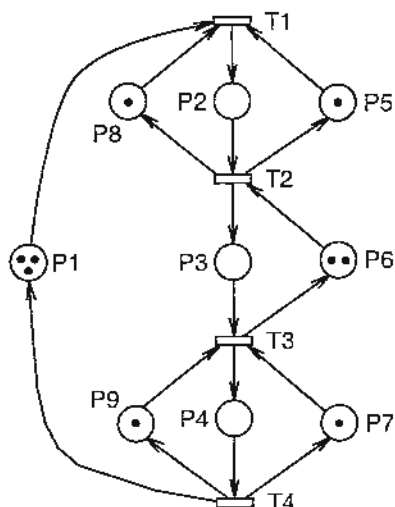


Fig. 3.8 – Modello a reti di Petri

Il significato delle transizioni è invece il seguente:

- T1 prelievo pezzo da parte di R1, posizionamento del pezzo sul pallet e trasporto del pallet carico alla macchina utensile M1; inizio operazione di lavorazione su M1
 T2 fine lavorazione su M1; trasporto del pallet carico da M1 al nastro da parte di R1 e scarico; inizio trasporto su nastro
 T3 fine trasporto su nastro; prelievo del pallet carico da parte di R2 e trasporto alla macchina utensile M2; inizio operazione di lavorazione su M2
 T4 fine lavorazione su M2; scarico del pezzo finito e trasporto del pallet vuoto al nastro da parte di R1 □

ESERCIZIO 5

Si consideri un impianto batch semplificato in grado di eseguire due reazioni chimiche, chiamate OP1 e OP2, e un'operazione di lavaggio del reattore, chiamata OP3.

Le tre operazioni sono soggette ai seguenti vincoli e specifiche:

- a) La reazione OP1 può essere eseguita molte volte in sequenza, senza necessità di lavaggi intermedi.
- b) La reazione OP1 può essere eseguita prima o dopo che nello stesso reattore si sia verificata la reazione OP2 oppure il lavaggio OP3.
- c) La reazione OP2 può essere eseguita molte volte in sequenza, senza necessità di lavaggi intermedi.
- d) La reazione OP2 non può essere eseguita dopo che nel reattore è stata eseguita la reazione OP1: è necessario lavare il reattore (OP3) prima di poter effettuare OP2.
- e) Prima di eseguire l'operazione OP2 per la prima volta, occorre eseguire il lavaggio OP3.

5.1) Si modellizzino le tre attività di cui sopra utilizzando il modello a due eventi e si costruisca un modello a reti di Petri ordinarie che rappresenti tutte le specifiche richieste.

5.2) Si risolva il problema di cui al punto precedente utilizzando il modello di un'operazione ad un evento.

5.3) Si modifichi il modello ottenuto al punto precedente tenendo conto del seguente nuovo vincolo (a) in sostituzione di quello enunciato al punto (2.1):

- a) La reazione OP1 può essere eseguita consecutivamente *al più 3 volte* senza lavaggi intermedi. ☐

SOLUZIONE

5.1) Le operazioni da modellizzare sono OP1, OP2 e OP3. Ogni operazione è modellizzata con una sequenza transizione-posto-transizione, dove il posto rappresenta l'esecuzione vera e propria dell'operazione e le transizioni sono associate agli eventi di inizio e fine operazione. La composizione delle operazioni darà poi luogo a posti di attesa, a monte delle transizioni di inizio e a valle delle transizioni di fine, così che il modello rispetta l'alternanza, seguendo la relazione di flusso, tra posti di operazione in corso e posti di attesa, come mostrato nella Fig. 3.3.

Nel caso in esame il processo non è specificato in termini di ricette ma piuttosto di vincoli di ordinamento. Le condizioni (a)-(d) determinano le sequenze ammissibili tra le 3 operazioni del processo. In particolare, sono consentite le seguenti sotto-sequenze di due operazioni:

OP1 \rightarrow OP1 (a)	OP2 \rightarrow OP1 (b)	OP3 \rightarrow OP1 (b)
OP1 \rightarrow OP2 (d)	OP2 \rightarrow OP2 (c)	OP3 \rightarrow OP2 (d)
OP1 \rightarrow OP3 (b)	OP2 \rightarrow OP3	OP3 \rightarrow OP3

Sono rappresentate anche la condizione implicita che non si debbano eseguire sequenze di lavaggi e quella non esplicitamente regolata che l'operazione OP2 possa essere seguita da un lavaggio. La condizione (e) indica che OP2 non può essere la prima operazione eseguita in assoluto.

Costruiamo la rete incrementalmente, a partire dalla sua evoluzione in termini di sequenza di operazioni. Nel modello a due eventi ogni transizione della rete è associata al verificarsi di un evento di inizio (bOPk) o fine (eOPk) operazione: per facilitare la comprensione della modellizzazione del processo, si etichetteranno le transizioni con il rispettivo evento.

Inizialmente, possono essere eseguite OP1 o OP3. Si rappresenta quindi un posto di scelta inizialmente marcato, a monte di due

transizioni associate agli eventi di inizio operazione di OP1 e OP3, come in Fig. 3.9.

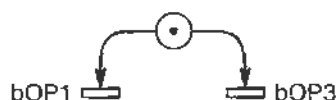


Fig. 3.9 – Modello parziale del processo (1)

Il modello a due eventi prevede che si rappresenti una sequenza transizione-posto-transizione per ogni operazione, aggiungendo un posto operazione a valle di OP1 [OP3] e una transizione contrassegnata con eOP1 [eOP3] a valle del posto.

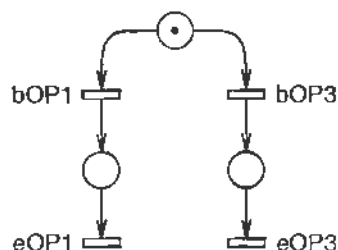


Fig. 3.10 – Modello parziale del processo (2)

Dopo il completamento dell'operazione OP1, il gettone verrà a trovarsi nel posto di attesa a valle della transizione contrassegnata con eOP1. Poichè dopo l'operazione OP1 possono essere eseguite sia OP1 che OP3, occorre implementare una scelta. Analogamente, dal posto a valle della transizione di fine dell'operazione OP3 dovrà essere possibile far scattare in alternativa la transizione di inizio OP1 o quella di OP2 (v. Fig. 3.11).

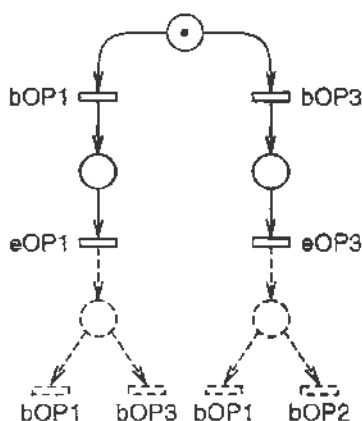


Fig. 3.11 – Modello parziale del processo (3)

Si osservi che il posto a valle della transizione contrassegnata eOP1 si comporta come richiesto dai vincoli ed esattamente come il posto iniziale (quello marcato in Fig. 3.11): quindi ne costituisce un inutile duplicato e può essere eliminato, collegando direttamente l'arco uscente dalla transizione contrassegnata eOP1 al posto iniziale. Lo stesso discorso non può essere replicato per il posto a valle della transizione contrassegnata eOP3, che va quindi conservato, mantenendo nel suo post-set due transizioni contrassegnate bOP1 e bOP2. Poichè l'operazione OP1 è già stata rappresentata si potrebbe pensare di collegare direttamente questo posto alla transizione associata a bOP1 già presente nella rete, come in Fig. 3.12a. Tuttavia, in questo modo verrebbe a crearsi una sincronizzazione indesiderata ed errata in quella transizione (che tra l'altro risulterebbe morta). Nulla però vieta di replicare l'evento bOP1 su una transizione nuova a valle del posto di attesa dopo OP3 e collegare questa al posto operazione di OP1 (Fig. 3.12b). Infatti, per come sono definite le specifiche, una volta avviata OP1, le operazioni che possono essere svolte successivamente (OP1 o OP3) non dipendono dalla storia precedente, ovvero da quale era stata l'operazione precedente a OP1.

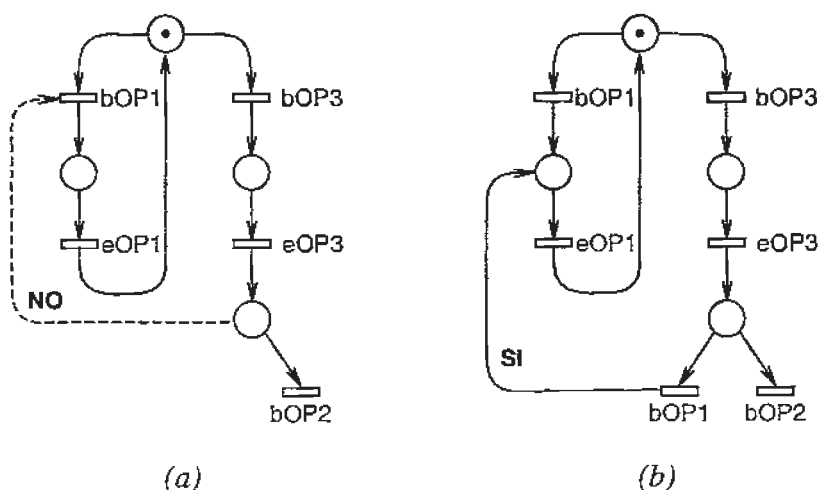


Fig. 3.12 – Modello dell'operazione OP1

Tenendo conto delle osservazioni precedenti ed implementando il modello a due eventi associato all'operazione OP2, si ottiene il modello parziale risultante riportato in Fig. 3.13.

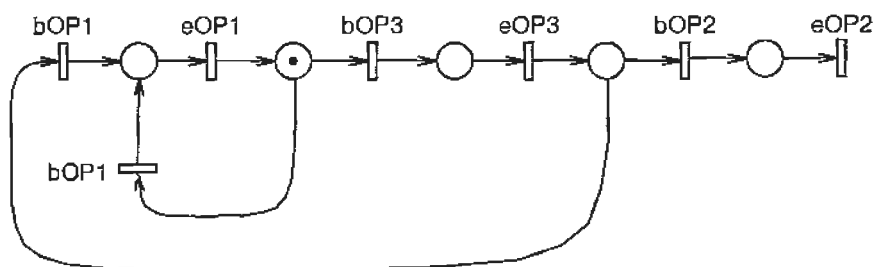


Fig. 3.13 – Modello parziale del processo (4)

Infine, al completamento dell'operazione OP2, risulterà marcato un posto di attesa a valle della transizione contrassegnata OP2, da cui dovrà essere possibile far scattare in alternativa una qualunque delle tre transizioni di inizio operazione. Il modello completo del processo è dunque quello riportato in Fig. 3.14.

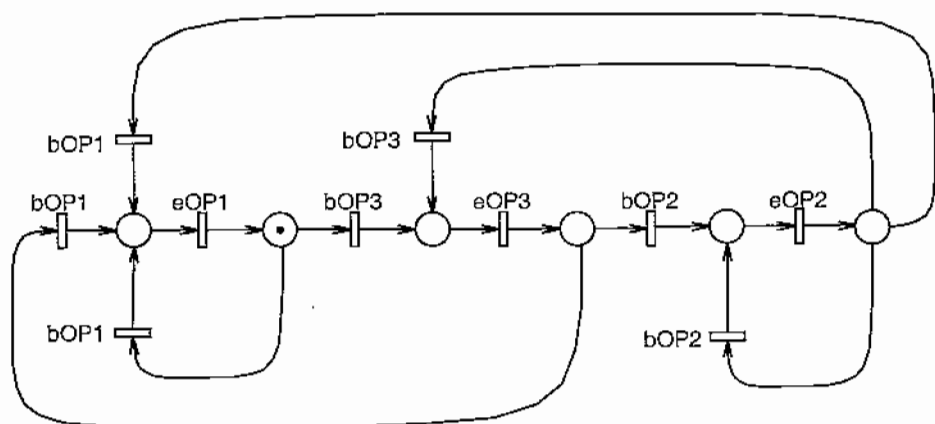


Fig. 3.14 – Modello completo del processo

E' facile fare le seguenti constatazioni, a proposito del modello appena definito:

1. Lo scatto di una transizione di fine operazione è obbligatoriamente preceduto dallo scatto di una transizione di inizio operazione, associata alla medesima operazione (modello a due eventi delle operazioni).
2. Dopo lo scatto di una transizione di fine operazione risulta marcato un posto di attesa da cui si diramano uno o più archi uscenti verso le transizioni di inizio operazione che determinano il verificarsi di sotto-sequenze ammissibili.
3. Inizialmente, è marcato il posto di attesa a monte delle transizioni di inizio operazione associate ad OP1 e OP3.
4. Seguendo gli archi orientati a partire da un punto qualunque, nel modello finale si passa sempre da un posto di operazione in corso ad un posto di attesa o viceversa. □

5.2) Il modello si ottiene a partire da quello di Fig. 3.14 fondendo in un'unica transizione le sequenze transizione-posto-transizione associate ad ogni operazione. Dove erano previste più transizioni di inizio per la medesima operazione, occorreranno ora altrettante

transizioni di operazione. Il modello risultante è riportato in Fig. 3.15, dove ogni transizione è contrassegnata con la corrispondente operazione OPk.

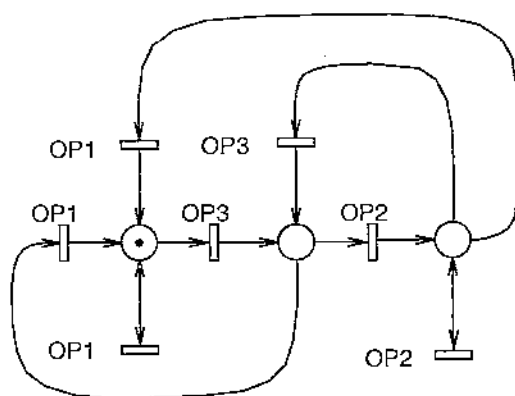


Fig. 3.15 – Rappresentazione del processo con modello operazione a 1 evento

- 5.3) La modifica del vincolo (a) richiede di *contare* le esecuzioni consecutive di OP1. A questo scopo, a valle della prima transizione OP1 che si esegue (all'inizio, o dopo un'operazione OP2 o OP3), occorre che si possa attivare una sequenza di OP1 lunga al massimo 3 e dopo *ciascuna* delle operazioni OP1 di questa sequenza deve essere possibile attivare OP3. Una rete di Petri che modella le specifiche richieste è riportata in Fig. 3.16. □

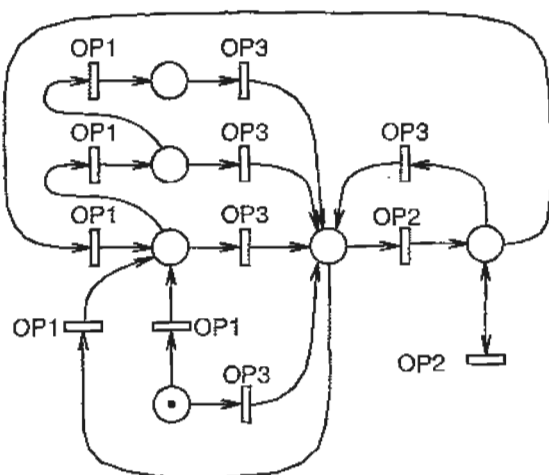


Fig. 3.16 – Modello del processo modificato

ESERCIZIO 6

Si consideri nuovamente il sistema descritto nell'esercizio 3 del presente capitolo. Si supponga che il ciclo produttivo sia diverso. In particolare, il nuovo funzionamento è il seguente. I pezzi grezzi di tipo A sono trasferiti dal robot manipolatore sul centro di lavoro M_A , che effettua una prima lavorazione. Quando il centro ha terminato la lavorazione, il robot raccoglie il pezzo lavorato da M_A e lo deposita su M_B , se disponibile, per una seconda lavorazione. Quindi, al termine della lavorazione di M_B , il robot prende un pezzo grezzo dal nastro B e lo porta su di M_B , macchina sulla quale avviene l'operazione finale di assemblaggio, dopodiché, se c'è spazio, pone il prodotto finito così ottenuto in un buffer/nastro di uscita. Quest'ultimo ha un solo posto e viene svuotato dall'esterno, con frequenza nota a priori. I centri di lavoro possono accettare un solo pezzo grezzo alla volta. Un pezzo finito attende sul centro finché non arriva il robot a rimuoverlo.

- 6.1) Si modellizzi il comportamento descritto con modelli di operazioni ad un evento.
- 6.2) Dopo ogni operazione di movimentazione compiuta dal robot, esso torna in una posizione di riposo. Si modellizzi esplicitamente tale comportamento. \square

SOLUZIONE

- 6.1) Si individuano le seguenti 8 operazioni:

- carico di un pezzo A sul nastro A
- carico di un pezzo B sul nastro B
- R preleva pezzo A e carica M_A
- R preleva un pezzo da M_A e lo deposita su M_B
- M_A lavora
- M_B lavora

- R preleva un pezzo dal nastro B, lo porta su M_B , assembla e scarica il pezzo finito nel buffer di uscita,
- svuotamento del buffer di uscita

Ogni operazione è modellizzata con un'unica transizione: il modello complessivo avrà quindi 8 transizioni. Si noti che il flusso principale dei prodotti (e quindi delle lavorazioni necessarie per produrre un tipo di prodotto) è essenzialmente sequenziale. Pertanto, si otterrà un modello a reti costituito essenzialmente da una sequenza principale, nonostante il sistema svolga funzioni di assemblaggio.

Complessivamente, il sistema di produzione può essere modellizzato con una rete di Petri come quella riportata in Fig. 3.17, dove il significato di posti e transizioni è il seguente:

P1	pezzo disponibile sul nastro A
P3	pezzo A pronto per essere lavorato sulla macchina M_A
P4	pezzo A lavorato
P7	pezzo presente su M_B
P8	pezzo lavorato su M_B
P11	pezzo disponibile sul nastro B
P9	pezzo disponibile sul nastro di uscita
P2	disponibilità di posti sul nastro A
P5	disponibilità della macchina M_A
P6	disponibilità del manipolatore R
P10	disponibilità della macchina M_B
P12	disponibilità di posti sul nastro B
P13	disponibilità di posti sul buffer di uscita
T1	arrivo di un pezzo sul nastro A
T2	prelievo pezzo A da nastro A, trasporto e carico su M_A
T3	lavorazione sulla macchina M_A
T4	prelievo pezzi lavorati da M_A , e carico su M_B
T5	lavorazione sulla macchina M_B
T6	arrivo di un pezzo sul nastro B
T7	prelievo pezzo B da nastro B, carico su M_B , assemblaggio e scarico di M_B
T8	svuotamento del buffer di uscita

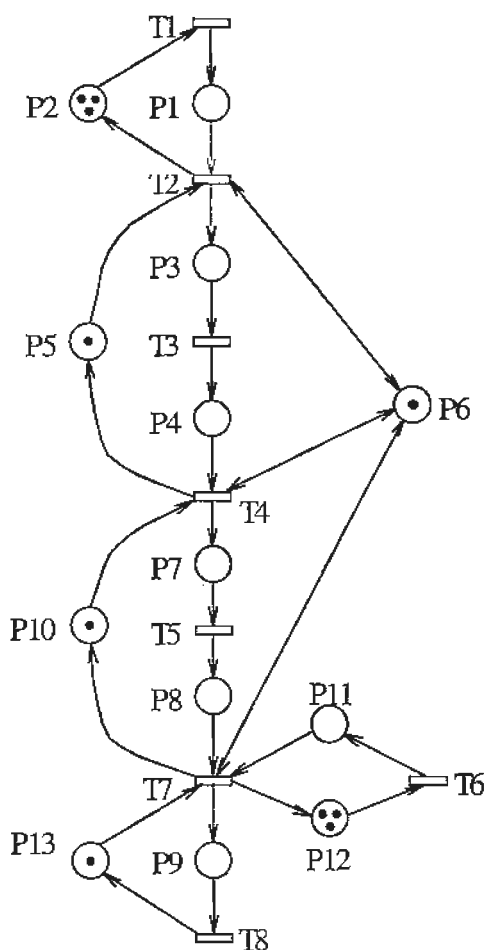


Fig. 3.17 – Modello a reti di Petri

6.2) Occorre modellizzare un'attività in più: il movimento di ritorno del manipolatore dalla posizione corrente alla posizione di riposo:

T9 ritorno del manipolatore R nella posizione di riposo

Tale attività è senz'altro *concorrente* rispetto alle varie attività del ciclo produttivo, cioè può essere svolta contemporaneamente ad altre.

Inoltre, il posto P6 cambia leggermente di significato, e deve essere introdotto un posto in più (P14):

P6 disponibilità del manipolatore R nella posizione di riposo

P14 manipolatore R pronto per tornare in posizione di riposo

Il modello complessivo avrà quindi 9 transizioni. Esso è raffigurato in Fig. 3.18. □

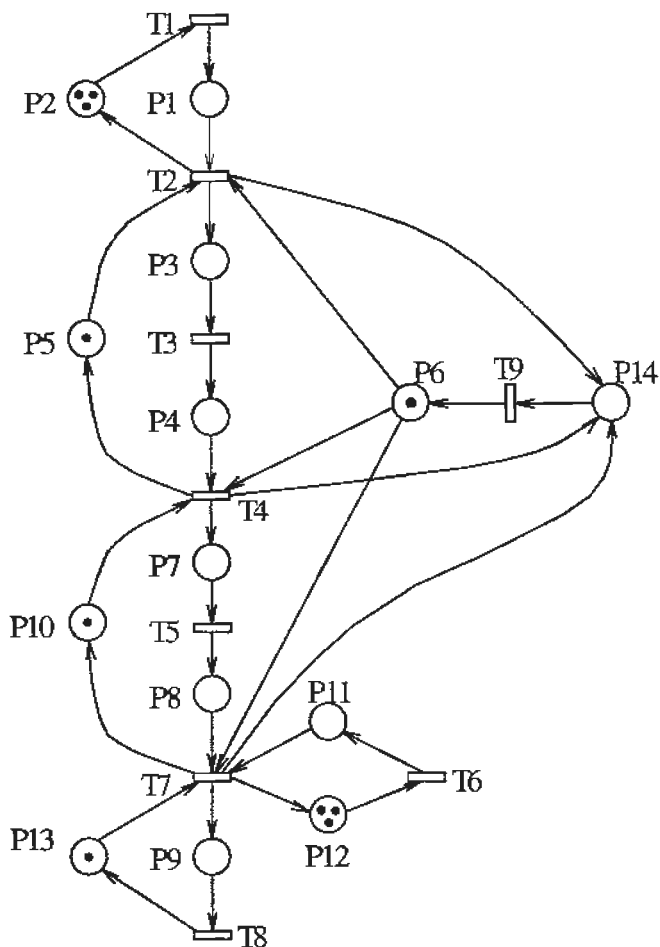


Fig. 3.18 – Modello con operazione aggiuntiva

CAPITOLO 4

SINTESI DEL CONTROLLORE CON P-INVARIANTI

ESERCIZIO 1

Si consideri la rete di Petri rappresentata in Fig. 4.1.

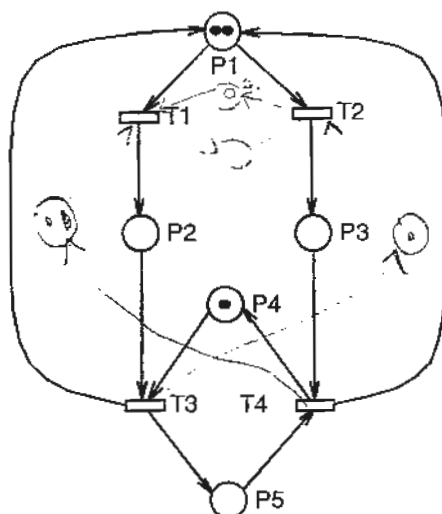


Fig. 4.1

Come già trovato nei capitoli precedenti, l'evoluzione di questa rete si può bloccare finendo in due stati di deadlock, caratterizzati dalle marcature morte $M4 = [0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1]'$ ed $M10 = [0 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0]'$. Queste corrispondono ai due sifoni $\{P1, P3, P4\}$ e $\{P1, P2, P5\}$ che si sono svuotati.

- 1.1) Mostrare che la rete risulta viva se modificata in uno dei due modi rappresentati in Fig. 4.2, dove due posti aggiuntivi (P6 e P7) vengono opportunamente collegati alle transizioni della rete.

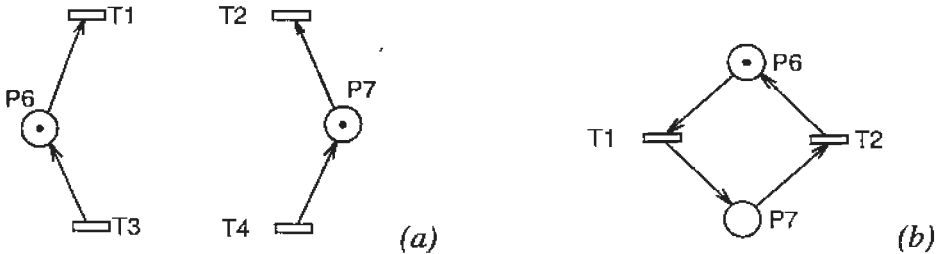


Fig. 4.2 – Modifiche alla rete di Fig. 4.1

- 1.2) Modificare la rete aggiungendo due posti opportunamente connessi con le transizioni della rete e opportunamente marcati, in modo che la rete modificata risulti viva e solo gli stati di deadlock siano evitati (strategia di controllo *massimamente permissiva*). □

SOLUZIONE

- 1.1) Nell'esercizio 4 del Cap. 1 è stata effettuata l'analisi di raggiungibilità relativa alla rete di Petri data e sono state determinate tutte le marcature raggiungibili a partire da M_0 . Per comodità del lettore, si riportano di seguito l'insieme e il grafo di raggiungibilità a partire da M_0 .

	P1	P2	P3	P4	P5
M0	2	0	0	1	0
M1	1	1	0	1	0
M2	0	2	0	1	0
M3	1	1	0	0	1
M4	0	2	0	0	1
M5	0	1	1	0	1
M6	0	1	1	1	0
M7	1	0	1	0	1
M8	0	0	2	0	1
M9	1	0	1	1	0
M10	0	0	2	1	0
M11	2	0	0	0	1

Il grafo di raggiungibilità della rete calcolato nella soluzione dell'esercizio 4 del Cap. 1 (Fig. 1.6) è riportato in Fig. 4.3.

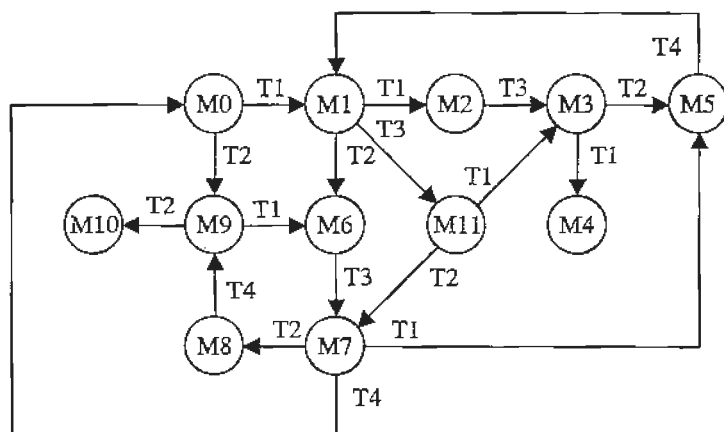


Fig. 4.3 – Grafo di raggiungibilità

La modifica di Fig. 4.2a consiste nel vincolare i posti P2 e P3 ad avere capacità unitaria. In questo modo viene impedito alla rete di finire negli stati M2, M4, M8 ed M10. Il nuovo insieme di raggiungibilità è dato da:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
M0	2	0	0	1	0	1	1
M1	1	1	0	1	0	0	1
M3	1	1	0	0	1	0	1
M5	0	1	1	0	1	0	0
M6	0	1	1	1	0	0	0
M7	1	0	1	0	1	1	0
M9	1	0	1	1	0	1	0
M11	2	0	0	0	1	1	1

Il grafo di raggiungibilità della rete modificata è riportato in Fig. 4.4, ed è facile rendersi conto che la rete modificata risulta viva.

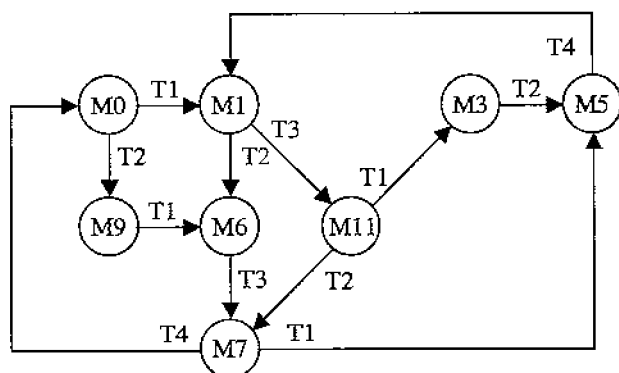


Fig. 4.4 – Grafo di raggiungibilità della rete modificata (modifica (a))

La modifica di Fig. 4.2b consiste nell'imporre una rigida alternanza anche a T1 e T2 così come accade per T3 e T4. In questo modo si evita che T1 o T2 possano scattare due volte consecutivamente portando due gettoni nei posti P2 e P3. Il relativo insieme di raggiungibilità è rappresentato nella tabella che segue:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
M0	2	0	0	1	0	1	0
M1	1	1	0	1	0	0	1
M5	0	1	1	0	1	0	1
M6	0	1	1	1	0	1	0
M7	1	0	1	0	1	1	0
M11	2	0	0	0	1	0	1

Si noti come l'insieme e il grafo di raggiungibilità (riportato in Fig. 4.5) risultino fortemente ridotti da questa seconda modifica, ma la rete risultante sia viva.

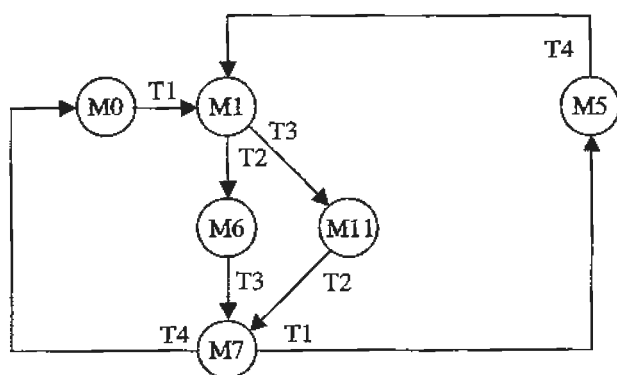


Fig. 4.5 – Grafo di raggiungibilità della rete modificata (modifica (b))

- 1.2) Per ottenere una strategia di controllo massimamente permissiva, occorre applicare il metodo di controllo con P-invarianti. Si impone che i due sifoni non si possano smarcare con i seguenti vincoli sulle marcature:

$$m_1 + m_3 + m_4 \geq 1 \Rightarrow -m_1 - m_3 - m_4 \leq -1 \Rightarrow -m_1 - m_3 - m_4 + m_6 = -1$$

$$m_1 + m_2 + m_5 \geq 1 \Rightarrow -m_1 - m_2 - m_5 \leq -1 \Rightarrow -m_1 - m_2 - m_5 + m_7 = -1$$

In altre parole, bisogna imporre che i due vettori colonna seguenti

$$[-1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]'$$

$$[-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1]'$$

siano P-invarianti della rete che modella il sistema controllato, ovvero che soddisfino l'equazione $x'C = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ricavano quindi otto condizioni lineari indipendenti, da cui si ricavano i pesi degli archi che connettono i due posti aggiuntivi alle transizioni della rete:

$$1 + c_{61} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{61} = -1$$

$$1 - 1 + c_{62} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{62} = 0$$

$$-1 + 1 + c_{63} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{63} = 0$$

$$-1 + 1 - 1 + c_{64} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{64} = 1$$

$$1 - 1 + c_{71} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{71} = 0$$

$$1 + c_{72} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{72} = -1$$

$$-1 + 1 - 1 + c_{73} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{73} = 1$$

$$-1 + 1 + c_{74} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{74} = 0$$

La marcatura iniziale dei posti di controllo si calcola imponendo il soddisfacimento dei P-invarianti nello stato iniziale della rete:

$$-m_{10} - m_{30} - m_{40} + m_{60} = -1 \Rightarrow -2 - 0 - 1 + m_{60} = -1 \Rightarrow m_{60} = 2$$

$$-m_{10} - m_{20} - m_{50} + m_{70} = -1 \Rightarrow -2 - 0 - 0 + m_{70} = -1 \Rightarrow m_{70} = 1$$

La rete controllata è riportata in Fig. 4.6.

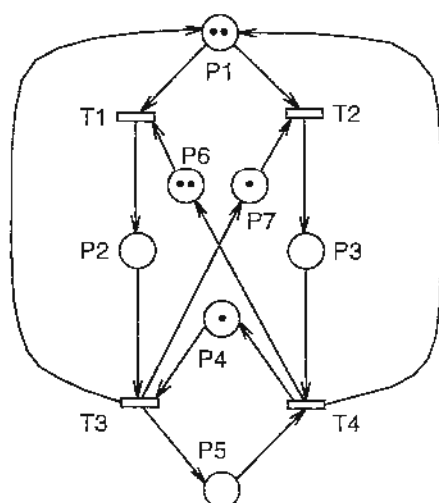


Fig. 4.6 – Rete controllata con il metodo dei P-invarianti

E' facile mostrare che l'insieme di raggiungibilità contiene tutti gli stati originari, eccetto M4 ed M10:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
M0	2	0	0	1	0	2	1
M1	1	1	0	1	0	1	1
M2	0	2	0	1	0	0	1
M3	1	1	0	0	1	0	2
M5	0	1	1	0	1	0	1
M6	0	1	1	1	0	1	0
M7	1	0	1	0	1	1	1
M8	0	0	2	0	1	1	0
M9	1	0	1	1	0	2	0
M11	2	0	0	0	1	1	2

Il grafo di raggiungibilità della rete controllata è riportato in Fig. 4.7.

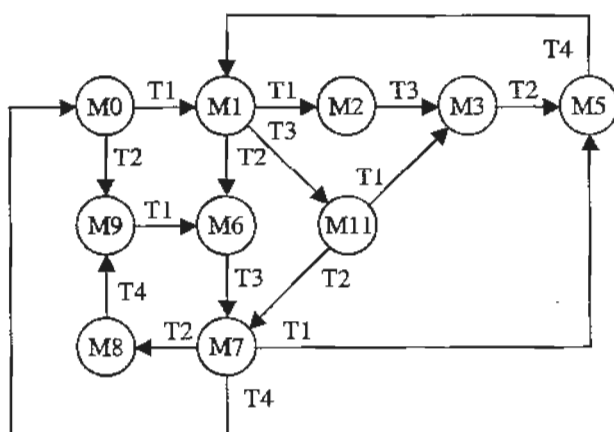


Fig. 4.7 - Grafo di raggiungibilità della rete controllata

Analogamente, seguendo la procedura standard otteniamo:

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = -LC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M0_c = b - L \cdot M0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Osservazione - Il primo vincolo equivale a richiedere $m_2 + m_5 \leq 2$. Per provare questa affermazione, osserviamo che, applicando il metodo dei P-invarianti a partire da questo nuovo vincolo, si

progetterebbe il posto di controllo P6 in modo da soddisfare l'equazione $m_2 + m_5 + m_6 = 2$. Ora, sottraendo a quest'ultima equazione quella corrispondente al vincolo associato al P-invariante $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ si ricava proprio la condizione imposta a partire dal sifone:

$$\left. \begin{array}{l} m_2 + m_5 + m_6 = 2 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 3 \end{array} \right\} -m_1 - m_3 - m_4 + m_6 = -1.$$

L'equivalenza tra il primo vincolo e la disequazione $m_2 + m_5 \leq 2$ ha anche una giustificazione intuitiva. Infatti, se fosse $m_2 = 2$ e $m_5 = 1$, allora obbligatoriamente $m_4 = 0$, e quindi la transizione T3 non sarebbe abilitata e il sistema sarebbe bloccato. Il nuovo vincolo si assicura che T3 sia abilitata se entrambi i gettoni sono in P2.

Un analogo discorso vale per il secondo vincolo, che equivale a richiedere $m_3 + m_4 \leq 2$, ovvero che la transizione T4 sia abilitata se entrambi i gettoni sono in P3. Infatti:

$$\left. \begin{array}{l} m_3 + m_4 + m_7 = 2 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 3 \end{array} \right\} -m_1 - m_2 - m_5 + m_7 = -1. \quad \square$$

ESERCIZIO 2

Si consideri la rete di Petri con 7 posti e 7 transizioni rappresentata in Fig. 4.8.

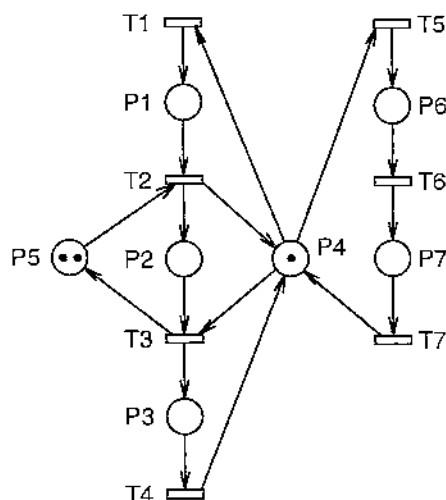


Fig. 4.8 – Rete di Petri

- 2.1) Si verifichi che la sequenza T1 T2 T1 T2 T1 è ammissibile e porta la rete in uno stato di blocco (deadlock). Determinare il sifone che si è smarcato in tale stato.
- 2.2) Modificare la rete di Fig. 4.8, in modo che tale sifone non possa mai smarcarsi.
- 2.3) Si consideri il problema di modificare la rete di Fig. 4.8 in modo tale che T1 non possa mai scattare quando il posto P2 ha due gettoni. \square

SOLUZIONE

- 2.1) La sequenza data porta la rete nello stato $M_{DL} = [1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ dove nessuna transizione è abilitata. Infatti, poichè la matrice di incidenza è data da:

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} T1 & T2 & T3 & T4 & T5 & T6 & T7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow P1 \\ \leftarrow P2 \\ \leftarrow P3 \\ \leftarrow P4 \\ \leftarrow P5 \\ \leftarrow P6 \\ \leftarrow P7 \end{array} \end{array}$$

- è facile verificare che la condizione $M_{DL} + C_i \geq 0$ (i-esima transizione abilitata) non è verificata per nessuna colonna C_i della matrice C .

Poichè lo stato M_{DL} è una marcatura morta, l'insieme di posti privi di gettoni in M_{DL} costituisce un sifone che si è smarcato:

$$S = \{P3, P4, P5, P6, P7\}.$$

Infatti, il preset di S , $\bullet S = \{T2, T3, T4, T5, T6, T7\}$ è contenuto nel postset di S , $S\bullet = \{T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7\}$.

- 2.2) Per impedire il verificarsi del deadlock, occorre implementare il seguente vincolo sulle marcature:

$$m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 \geq 1;$$

ovvero, nella forma standard,

$$-m_3 - m_4 - m_5 - m_6 - m_7 \leq -1.$$

In forma vettoriale si ha $L \cdot M \leq b$, dove $L = [0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1]$, $b = -1$ e M è il generico vettore marcatura.

Applicando il metodo di controllo basato su P-invarianti, si ottiene:

$$C_C = -L \cdot C = -[0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

e

$$M0_C = b - L \cdot M0 = -1 - [0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2]' = 2.$$

La corrispondente rete controllata è rappresentata in Fig. 4.9. E' facile verificare che la rete controllata impedisce solo il verificarsi dello stato di deadlock, cioè è massimamente permissiva.

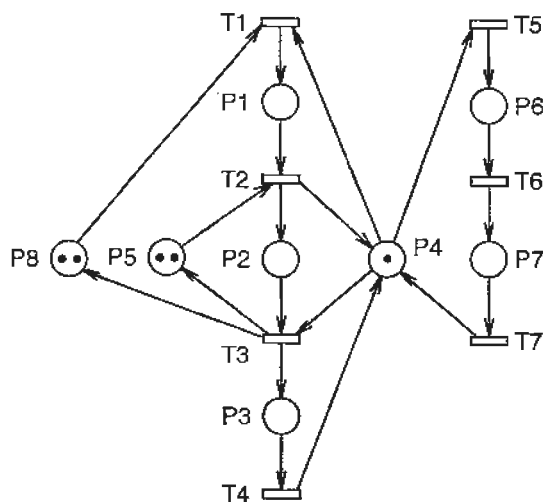


Fig. 4.9 – Rete controllata

- 2.3) Il vincolo richiesto è misto, in quanto considera sia marcature sia condizioni di scatto. Il metodo di controllo basato su P-invarianti può ancora essere applicato, pur di riformulare il vincolo in forma standard. A questo scopo si modifica temporaneamente la rete (v. Fig. 4.10) introducendo una transizione T1' e un posto P1', in modo che la marcatura del posto P1' "registri" lo scatto della transizione T1.

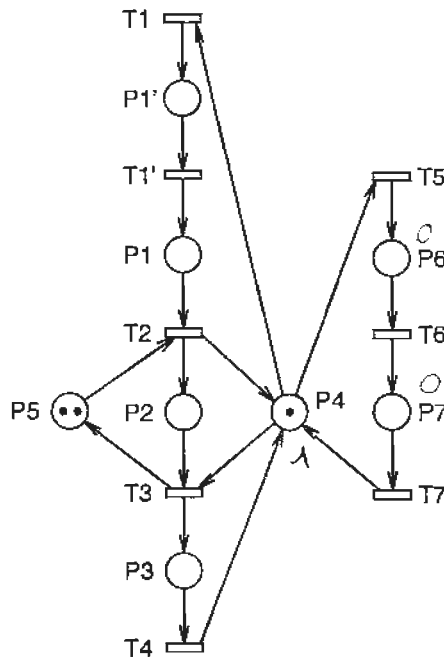


Fig. 4.10 – Rete di Petri modificata per la riformulazione del vincolo misto

La matrice di incidenza della rete modificata è data da:

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} T1 & T2 & T3 & T4 & T5 & T6 & T7 & T1' \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow P1 \\ \leftarrow P2 \\ \leftarrow P3 \\ \leftarrow P4 \\ \leftarrow P5 \\ \leftarrow P6 \\ \leftarrow P7 \\ \leftarrow P1' \end{array}$$

dove sono evidenziati gli elementi nuovi o modificati della matrice, rispetto alla rete di Fig. 4.8.

Per la nuova rete il vincolo può essere riformulato come segue:

$$m_1' + m_2 \leq 2.$$

In forma vettoriale si ha $L \cdot M \leq b$, dove $L = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$, $b = 2$ e M è il generico vettore marcatura.

Applicando il metodo di controllo basato su P-invarianti, si ottiene:

$$C_C = -L \cdot C = -[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1],$$

e

$$M0_C = b - L \cdot M0 = 2 - [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0]' = 2.$$

La corrispondente rete controllata è rappresentata in Fig. 4.11.

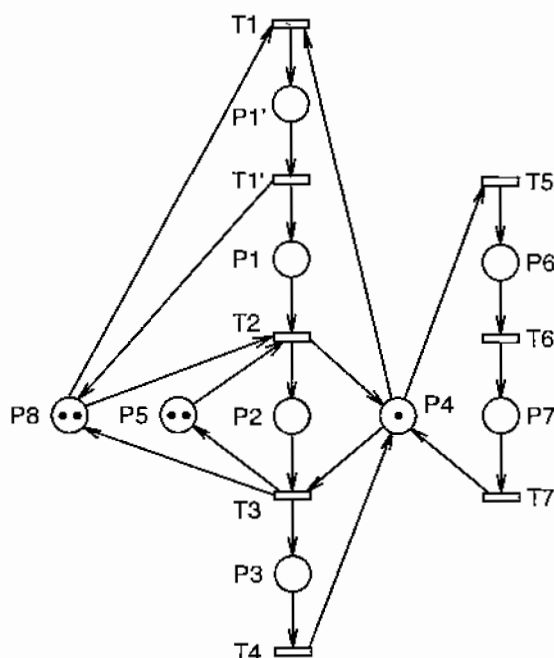


Fig. 4.11 – Rete controllata (con posto e transizione ausiliari)

Ricompattando la rete, con l'eliminazione del posto e della transizione aggiuntivi, si ottiene il controllo definitivo (v. Fig. 4.11).

Si noti la presenza di un autoanello tra la transizione T1 e il posto P8.

Si osservi, in conclusione, che il vincolo potrebbe essere interpretato come una condizione alternativa per impedire lo smarcamento del sifone (la transizione T1 non scatta quando P2 ha due gettoni: se scattasse genererebbe un gettone in P1 portando la rete nello stato di blocco). □

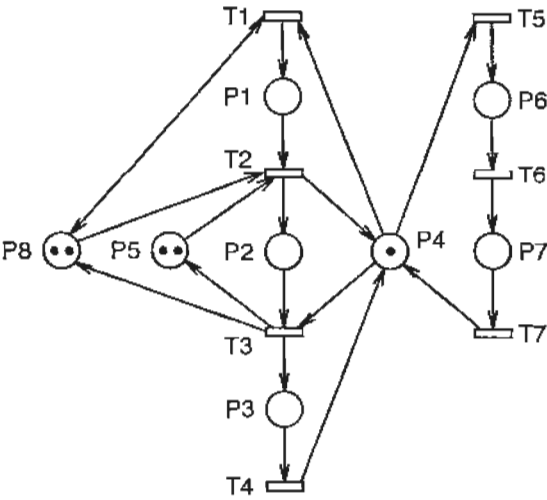


Fig. 4.12 – Rete controllata

ESERCIZIO 3

Si consideri il modello FMS di due cicli di lavorazione indipendenti rappresentato in Fig. 4.13, dove P2 e P6 rappresentano operazioni su macchine di tipo M1, e P3 e P5 operazioni su macchine di tipo M2. Si osservi che ogni ciclo di lavorazione deve essere completato prima di poter ripartire. In altre parole, ogni ciclo processa un solo pezzo alla volta.

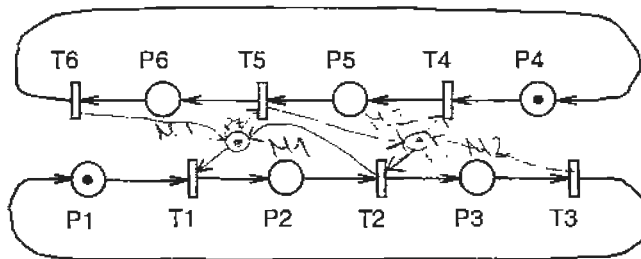


Fig. 4.13 – Modello FMS: 2 cicli di lavorazione

- 3.1) Si supponga di voler minimizzare l'uso delle risorse nel sistema, impiegando una sola macchina di tipo M1 per le lavorazioni in P2 e P6 e una sola di tipo M2 per le lavorazioni in P3 e P5. Modificare la rete in modo tale che siano verificati questi vincoli.
- 3.2) Si analizzi la rete risultante per determinare eventuali sifoni che si possono smarcare durante l'evoluzione causando un blocco del sistema (deadlock), e, nel caso ve ne siano, si applichi il metodo di controllo basato su P-invarianti per impedirne il completo smarcamento.
- 3.3) Si mostri che gli eventuali vincoli introdotti nella rete per impedire ai sifoni di smarcarsi completamente corrispondono a P-invarianti positivi.
- 3.4) Si supponga ora che P1 e P4 siano inizialmente marcati con 2 gettoni ciascuno e si dica come mutano le risposte alle domande precedenti. Si mostri, inoltre, che non è possibile determinare un controllo anti-deadlock massimamente permissivo semplicemente modificando la politica di assegnazione delle risorse M1 e M2. \square

SOLUZIONE

3.1) La rete di Petri di Fig. 4.13 ha la seguente matrice di incidenza:

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T1 & T2 & T3 & T4 & T5 & T6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow P1 \\ \leftarrow P2 \\ \leftarrow P3 \\ \leftarrow P4 \\ \leftarrow P5 \\ \leftarrow P6 \end{array} \end{array}$$

E' facile constatare che si tratta di una rete limitata, sicura, conservativa e viva. Inoltre, ognuno dei due cicli è coperto da un P-invariante:

P-invariante	P1	P2	P3	P4	P5	P6	
PI1	1	1	1	0	0	0	<i>ciclo inferiore</i>
PI2	0	0	0	1	1	1	<i>ciclo superiore</i>

Le specifiche sull'uso delle risorse sono traducibili nei seguenti vincoli in forma standard:

$$m_2 + m_6 \leq 1,$$

$$m_3 + m_5 \leq 1,$$

ovvero $LM \leq b$, con $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e dove M rappresenta il generico vettore marcatura della rete.

Si può trasformare il vincolo di disuguaglianza in uno di uguaglianza introducendo due variabili ausiliarie distinte (variabili di *slack*), che rappresentano le marcature di due nuovi posti, P7 e P8:

$$m_2 + m_6 + m_7 = 1,$$

$$m_3 + m_5 + m_8 = 1,$$

ovvero, $LM + M_c = b$, dove M_c indica il vettore marcatura associato ai due posti aggiuntivi. Tali relazioni precedenti si possono interpretare come vincoli sulle marcature dei posti di una rete introdotti dai P-invarianti sulla rete dotata di posti aggiuntivi (rete controllata). Affinchè i vincoli diano effettivamente luogo a dei P-invarianti per il sistema, occorre però ancora completare la rete con gli opportuni archi da e verso i posti aggiuntivi. Applicando il metodo di controllo basato su invarianti, si ottiene la nuova matrice di incidenza:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C \\ C_c \end{bmatrix}$$

dove C è la matrice di incidenza della rete nn controllata e $C_c = -LC$.

In questo modo, $X' = [L \ I]$ costituisce un insieme di P-invarianti del sistema controllato. Infatti:

$$X' \tilde{C} = [L \ I] \cdot \begin{bmatrix} C \\ C_c \end{bmatrix} = LC + C_c = 0.$$

La porzione C_c della nuova matrice di incidenza, che descrive la topologia dei collegamenti dei due posti aggiuntivi con le transizioni della rete, è calcolata nel modo seguente:

$$C_c = -LC = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La marcatura iniziale dei nuovi posti deve essere tale da rispettare i vincoli:

$$LM_0 + M_{oc} = b \Rightarrow M_{oc} = b - LM_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La rete risultante è riportata in Fig. 4.14.

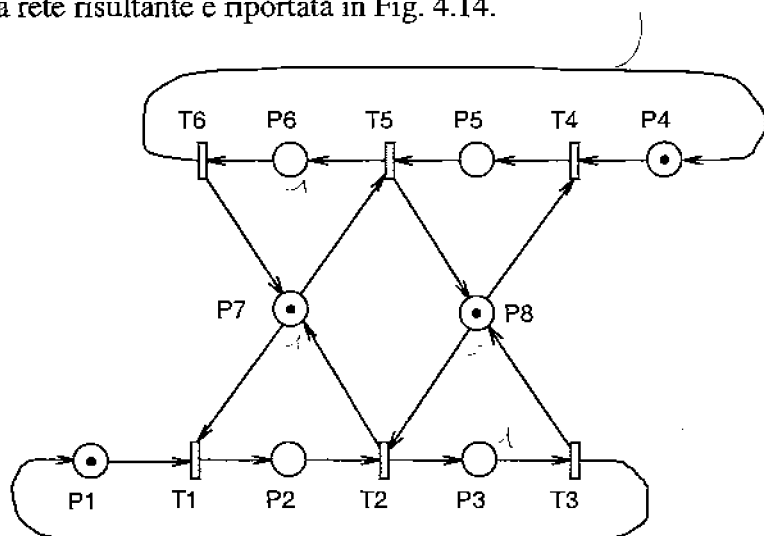


Fig. 4.14 – Modello FMS: 2 cicli di lavorazione con condivisione di risorse

Essa ha matrice di incidenza:

$$\tilde{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T1 & T2 & T3 & T4 & T5 & T6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow P1 \\ \leftarrow P2 \\ \leftarrow P3 \\ \leftarrow P4 \\ \leftarrow P5 \\ \leftarrow P6 \\ \leftarrow P7 \\ \leftarrow P8 \end{array}$$

Come è facile verificare, la rete conserva ancora i due P-invarianti precedenti, a cui si sommano i due nuovi P-invarianti che rappresentano l'uso delle due macchine M1 ed M2. In particolare, posti P7 e P8 sono interpretabili come disponibilità delle due macchine. Ogni macchina può essere in soli 3 stati: disponibile, utilizzata dal ciclo inferiore, oppure utilizzata dal ciclo superiore.

P-invarianti	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	
PI1	1	1	1	0	0	0	0	0	ciclo inferiore
PI2	0	0	0	1	1	1	0	0	ciclo superiore
PI3	0	1	0	0	0	1	1	0	macchina M1
PI4	0	0	1	0	1	0	0	1	macchina M2

Si osservi che la rete originaria era viva. Ora, con i vincoli introdotti, potrebbe non esserlo più e potrebbero esserci dei potenziali deadlock. Occorre fare una verifica della presenza di eventuali sifoni.

- 3.2) L'insieme di posti S è un sifone se e solo se $\bullet S \subseteq S \bullet$. Verifichiamo allora il preset e il postset dei posti della rete:

	•P	P•
P1	{T3}	{T1}
P2	{T1}	{T2}
P3	{T2}	{T3}
P4	{T6}	{T4}
P5	{T4}	{T5}
P6	{T5}	{T6}
P7	{T2,T6}	{T1,T5}
P8	{T3,T5}	{T2,T4}

Dopo una ricerca dei sifoni p-minimi, si individuano 5 sifoni minimi riportati nella tabella seguente. L'ultimo sifone riportato non corrisponde alle strutture precedentemente viste. Infatti, come è facile verificare, se entrambi i cicli di produzione occupano la prima risorsa della loro sequenza, si crea una situazione di attesa circolare, in cui ognuno dei due processi non può proseguire e liberare la risorsa che occupa finché non si libera la risorsa successiva nella sequenza di lavorazione, che tuttavia è occupata dall'altro processo.

Sifoni	•S	S•
S1 {P1,P2,P3}	{T1,T2,T3}	{T1, T2, T3}
S2 {P4,P5,P6}	{T4,T5,T6}	{T4, T5, T6}
S3 {P2,P6,P7}	{T1,T2,T5,T6}	{T1, T2, T5, T6}
S4 {P3,P5,P8}	{T2,T3,T4,T5}	{T2, T3, T4, T5}
S5 {P3,P6,P7,P8}	{T2,T3,T5,T6}	{T1,T2,T3,T4,T5,T6}

Si osservi che i sifoni S1, S2, S3 e S4 coincidono con i supporti dei P-invarianti PI1, PI2, PI3 e PI4, rispettivamente.

Formalmente, applicando la sequenza T1 T4 (ovvero, T4 T1), il sistema si viene a trovare in uno stato di deadlock corrispondente alla marcatura finale $[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, in cui il sifone S5 si è completamente smarcato. Gli altri 4 sifoni corrispondono ai supporti di P-invarianti positivi inizialmente marcati, e non possono quindi mai svuotarsi completamente di gettoni.

Per evitare il deadlock occorre imporre che il sifone non si smarchi durante l'evoluzione della rete. Quindi, il vincolo da imporre è il seguente:

$$m_3 + m_6 + m_7 + m_8 \geq 1 ,$$

ovvero

$$-m_3 - m_6 - m_7 - m_8 \leq -1 .$$

Introducendo un posto aggiuntivo (P9) si può trasformare il vincolo di disuguaglianza in uno di uguaglianza utilizzando una nuova variabile aggiuntiva che rappresenta la marcatura di P9:

$$-m_3 - m_6 - m_7 - m_8 + m_9 = -1 .$$

Tale nuovo vincolo di uguaglianza sulle marcature corrisponde ad un P-invariante della nuova rete controllata, cioè quella che nasce dalla rete di Fig. 4.14 unita con il relativo controllo. Chiamando \hat{C} la matrice di incidenza di tale rete con il posto aggiuntivo e imponendo che per questa il vettore $x = [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1]^T$ sia un P-invariante ($x' \hat{C} = 0$), si ottiene:

$$[0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ C_{91} & C_{92} & C_{93} & C_{94} & C_{95} & C_{96} \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] ,$$

cioè:

$$\begin{cases} 1 + c_{91} = 0 \\ -1 + c_{92} = 0 \\ c_{93} = 0 \\ 1 + c_{94} = 0 \\ -1 + c_{95} = 0 \\ c_{96} = 0 \end{cases}$$

Risolviendo il sistema, si ricavano i pesi degli archi che collegano P9 con le transizioni della rete di Fig. 4.14:

$$c_{91} = -1, c_{92} = 1, c_{93} = 0, c_{94} = -1, c_{95} = 1, c_{96} = 0,$$

cui corrisponde la rete di Fig. 4.15. Ovviamente, bisogna inserire un gettone anche nella marcatura iniziale del posto P9 affinché il P-invariante sia rispettato (inizialmente, $m_3 = m_6 = 0$, $m_7 = m_8 = 1$). Si può verificare che la rete così ottenuta è viva.

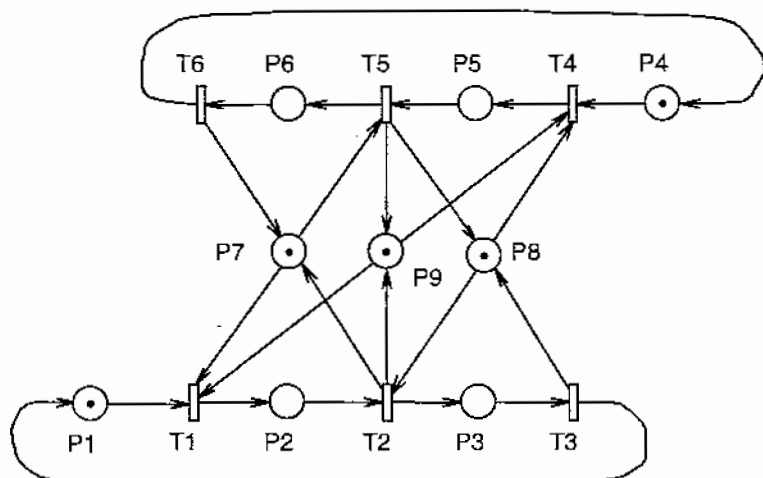


Fig. 4.15 – Modello FMS: rete controllata

Si osservi che l'effetto finale legato all'inserimento di P9 è il seguente: è come se avessimo inserito una risorsa fittizia che deve essere allocata a ciascun ciclo di produzione quando utilizza la *prima* risorsa del ciclo di lavorazione. In questo modo, se per esempio il ciclo inferiore utilizza la risorsa P7 (impedendo che la usi il ciclo in alto), esso contestualmente usa la anche la risorsa P9, impedendo così al ciclo in alto di impiegare la risorsa P6 causando il blocco (deadlock), e viceversa.

- 3.3) Sulla base delle osservazioni fatte in precedenza sullo stato di deadlock, per impedire che esso si verifichi occorre e basta imporre che non vi siano contemporaneamente un gettone in P2 e uno in P5. Questo si può esprimere con il vincolo standard:

$$m_2 + m_5 \leq 1$$

Introducendo il posto aggiuntivo (P9) la condizione diventa:

$$m_2 + m_5 + m_9 = 1.$$

Per imporre questo vincolo di uguaglianza sulle marcature occorre imporre che il vettore $x = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ sia un P-invariante per la rete contenente P9. Come si può notare, x costituirebbe un P-invariante *positivo*. Seguendo il medesimo procedimento delineato in precedenza si ottiene:

$$[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

C₉₁ C₉₂ C₉₃ C₉₄ C₉₅ C₉₆

cioè

$$\begin{cases} 1 + c_{91} = 0 \\ -1 + c_{92} = 0 \\ c_{93} = 0 \\ 1 + c_{94} = 0 \\ -1 + c_{95} = 0 \\ c_{96} = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema nelle incognite c_{9k} , $k = 1, \dots, 6$, si ricava esattamente lo stesso risultato di prima e quindi la rete controllata risulta identica.

Ciò è dovuto al fatto che il vincolo di uguaglianza sulle marcature imposto dal nuovo P-invariante è linearmente dipendente rispetto all'insieme dei vincoli di uguaglianza derivati dai 5 P-invarianti dalla rete trovati al punto precedente. Infatti, sommando i seguenti 3 vincoli:

$$-m_3 - m_6 - m_7 - m_8 + m_9 = -1$$

$$m_2 + m_6 + m_7 = 1$$

$$m_3 + m_5 + m_8 = 1$$

si ricava proprio il vincolo

$$m_2 + m_5 + m_9 = 1.$$

Quindi, imporre che il P-invariante sia $x = [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1]'$ oppure $x = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]'$ è equivalente.

- 3.4) Il cambio di marcatura iniziale non modifica i P-invarianti e i sifoni della rete, che costituiscono proprietà strutturali della rete. Quindi, i primi due punti risultano equivalenti. Per quanto riguarda il controllo anti-deadlock effettuato al punto precedente, potrebbe

variare la marcatura iniziale del posto di controllo, ma non essendo coinvolte le marcature iniziali di P3, P6, P7 e P8 non cambia nulla. La rete controllata (Fig. 4.16) è quindi strutturalmente identica a quella di Fig. 4.15.

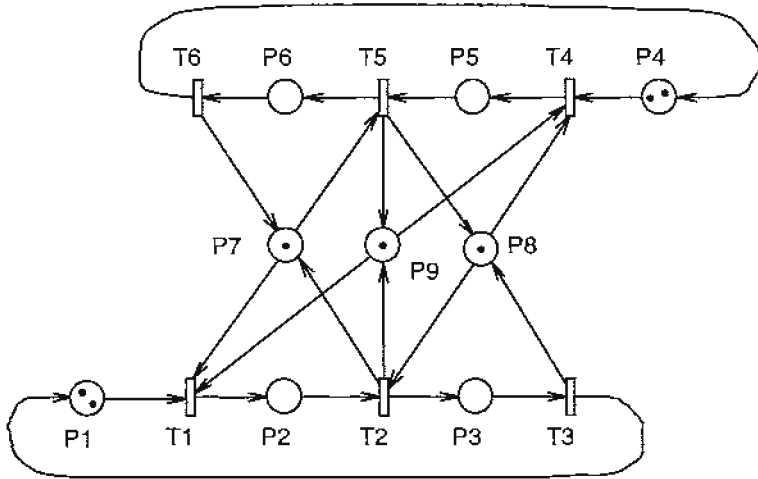


Fig. 4.16 – Modello FMS: rete controllata

Un modo per evitare l'insorgere di deadlock senza aggiungere posti di controllo della rete consiste nel modificare la politica di assegnazione delle risorse M1 e M2, tipicamente anticipandone l'acquisizione, con l'idea che se le risorse necessarie allo svolgimento di una sequenza produttiva sono tutte "prenotate" in anticipo, la sequenza potrà essere portata a compimento dopo essere stata avviata. In effetti, in generale se tutti i vari cicli corrispondenti a sequenze produttive di un dato sistema acquisissero prima di cominciare ad evolvere tutte le risorse necessarie al loro completamento, tali cicli potrebbero senz'altro concludere, senza mai incontrare blocchi critici. Nel nostro caso, una politica di assegnazione delle risorse con questo effetto è quella rappresentata in Fig. 4.17.

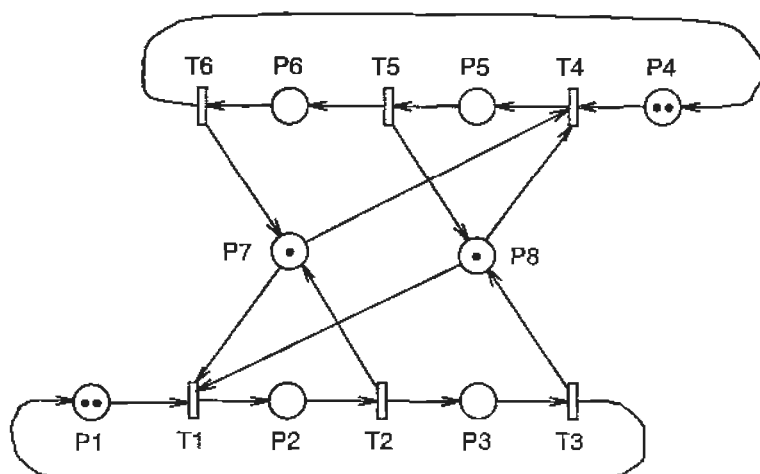


Fig. 4.17 – Modello FMS: riallocazione delle risorse

E' facile verificare che, con questa modifica, la rete non è più soggetta al deadlock. Tuttavia, la politica di controllo non è massimamente permissiva. Infatti, per esempio, essa impedisce lo stato in cui P2 e P3 sono contemporaneamente marcati con un gettone ciascuno, stato che è invece consentito con la politica di controllo di Fig. 4.16. E' interessante osservare che la stessa politica di assegnazione delle risorse risulta invece massimamente permissiva nel caso di P1 e P4 inizialmente marcati con un gettone solo. □

ESERCIZIO 4

Si consideri la rete di Petri con 4 posti e 4 transizioni rappresentata in Fig. 4.18, dove la transizione $T3$ è *non controllabile*.

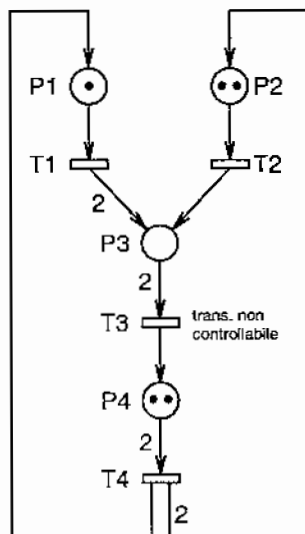


Fig. 4.18 – Rete di Petri

- 4.1) Si voglia imporre alla rete un vincolo sul numero massimo di gettoni nel posto $P4$, pari a 2. Progettare una modifica della rete di Petri che realizzi la condizione richiesta, tenendo conto della presenza di una transizione non controllabile. \square

SOLUZIONE

4.1) Il vincolo richiesto è:

$$m_4 \leq 2.$$

In forma vettoriale si ha $L \cdot M \leq b$, dove $L = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$, $b = 2$ e M è il generico vettore marcatura.

La matrice di incidenza della rete è la seguente:

$$C = \begin{array}{cccc} & \begin{array}{c} T1 \\ \downarrow \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} T2 \\ \downarrow \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} T3 \\ \downarrow \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} T4 \\ \downarrow \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c} \leftarrow P1 \\ \leftarrow P2 \\ \leftarrow P3 \\ \leftarrow P4 \end{array} \right. & & & & \end{array}$$

e la porzione non controllabile della rete corrisponde alla 3^a colonna della matrice:

$$C_{nc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La condizione di ammissibilità del vincolo è $LC_{nc} \leq 0$, altrimenti, qualora si implementasse direttamente il metodo di controllo basato su invarianti al vincolo dato, si genererebbe un arco entrante dal posto di controllo in una transizione non controllabile. Nel nostro caso, è facile verificare che LC_{nc} risulta pari a 1. Occorre allora modificare il vincolo dato, rendendolo più restrittivo e imponendo che $\tilde{L}C_{nc}$ non sia positivo. Si riformula il vincolo nel modo seguente:

$$\tilde{L}M \leq \tilde{b}$$

dove

$$\tilde{L} = R_1 + R_2 L$$

$$\tilde{b} = R_2(b+1) - 1$$

con R_1 tale che $R_1 M \geq 0$, $\forall M$ e $R_2 > 0$ (e diagonale, nel caso di vincolo vettoriale). Le condizioni su R_1 e R_2 garantiscono che il vincolo nuovo rispetti anche quello originario. La riformulazione del vincolo deve essere tale che:

$$(R_1 + R_2 L) C_{nc} \leq 0$$

e

$$M_{oc} = \tilde{b} - \tilde{L} M_0 = R_2(b+1) - 1 - (R_1 + R_2 L) M_0 \geq 0$$

Osservando la struttura di C_{nc} si vede che $(R_1 + R_2 L) C_{nc} = 0$ se:

$$R_1 + R_2 L = [0 \ 0 \ 1 \ 2].$$

Allora, la marcatura iniziale del posto di controllo è pari a

$$M_{oc} = R_2(2+1) - 1 - [0 \ 0 \ 1 \ 2] \cdot [1 \ 2 \ 0 \ 2]' = 3R_2 - 5.$$

Affinchè sia $M_{oc} \geq 0$, occorre scegliere R_2 almeno pari a 2. Una scelta ammissibile è

$$R_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0], R_2 = 2,$$

corrispondente al vincolo

$$m_3 + 2m_4 \leq 5,$$

ovvero

$$\tilde{L} M \leq \tilde{b}$$

dove

$$\tilde{L} = [0 \ 0 \ 1 \ 2], \tilde{b} = 5.$$

Applicando il metodo di controllo basato su P-invarianti, si ottiene:

$$C_C = -\tilde{L} \cdot C = -[0 \ 0 \ 1 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = [-2 \ -1 \ 0 \ 4]$$

e

$$M0_C = \tilde{b} - \tilde{L} \cdot M0 = 5 - [0 \ 0 \ 1 \ 2] \cdot [1 \ 2 \ 0 \ 2]^T = 1.$$

La corrispondente rete controllata è rappresentata in Fig. 4.19. \square

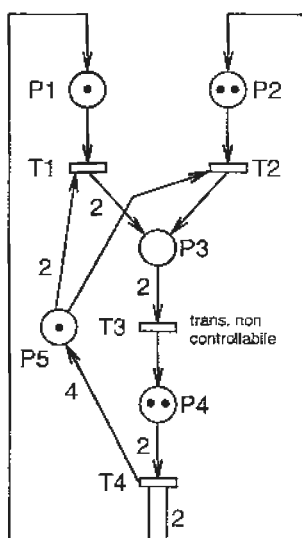


Fig. 4.19 – Rete controllata

ESERCIZIO 5

Si consideri un sistema manifatturiero che produce 3 tipi di prodotti diversi, con una sequenza di lavorazioni (*routing*) fissa per ogni tipo di prodotto. Il sistema è composto da 3 macchine (M1, M2, M3). Le ricette (R1, R2, R3) di lavorazione dei 3 tipi di prodotti consistono nelle seguenti sequenze di operazioni sulle macchine del sistema:

R1: M1, M2, M1

R2: M3, M2, M3

R3: M1, M2, M3

- 5.1) Si modellizzi il sistema produttivo con un modello FMS mettendo in evidenza l'uso delle risorse.
- 5.2) Si determinino le principali proprietà del modello realizzato, e in particolare eventuali sifoni minimi.
- 5.3) Si controllino gli eventuali sifoni con il metodo basato su P-invarianti.

Nel rispondere ai quesiti sopra formulati, si facciano le seguenti ipotesi semplificative:

- a) Le materie prime per le tre ricette sono attinte da un magazzino illimitato (non ha quindi importanza se esse sono dello stesso tipo o meno per le ricette). Poiché il magazzino è illimitato, la sua modellizzazione non è necessaria.
- b) Non occorre rappresentare esplicitamente le operazioni di trasporto dei semilavorati da una macchina all'altra.
- c) I prodotti finiti vengono depositati in un magazzino illimitato, il cui modello può essere omissis. \square

SOLUZIONE

5.1) Tenendo conto delle ipotesi semplificative (a-c), occorre modellizzare esclusivamente le operazioni di lavorazione dei prodotti rappresentando l'uso delle macchine. Più precisamente, si possono descrivere le 3 ricette sequenziali mediante le 3 semplici reti rappresentate in Fig. 4.20.

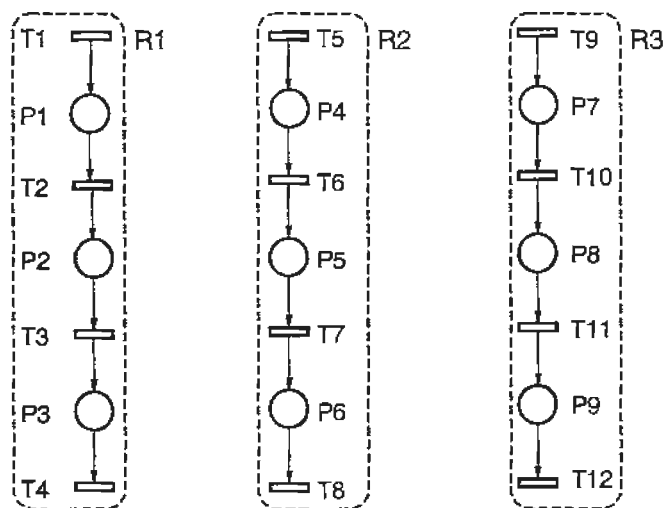


Fig. 4.20 – Le tre ricette

Il significato di posti e transizioni per la ricetta R1 è indicato di seguito:

- P1 M1 in lavorazione (ricetta R1)
- P2 M2 in lavorazione (ricetta R1)
- P3 M1 in lavorazione (ricetta R1)
- P4 M3 in lavorazione (ricetta R2)
- P5 M2 in lavorazione (ricetta R2)
- P6 M3 in lavorazione (ricetta R2)
- P7 M1 in lavorazione (ricetta R3)
- P8 M2 in lavorazione (ricetta R3)
- P9 M3 in lavorazione (ricetta R3)

- T1 inizio lavorazione su M1
- T2 fine lavorazione su M1 e inizio lavorazione su M2
- T3 fine lavorazione su M2 e inizio lavorazione su M1
- T4 fine lavorazione su M1
- T5 inizio lavorazione su M3
- T6 fine lavorazione su M3 e inizio lavorazione su M2
- T7 fine lavorazione su M2 e inizio lavorazione su M3
- T8 fine lavorazione su M3
- T9 inizio lavorazione su M1
- T10 fine lavorazione su M1 e inizio lavorazione su M2
- T11 fine lavorazione su M2 e inizio lavorazione su M3
- T12 fine lavorazione su M3

Le macchine sono modellizzate ciascuna con un posto-risorsa, inizialmente marcato con un solo gettone, dato che è disponibile solo una macchina di tipo M1, M2 e M3. Occorre quindi aggiungere i seguenti 3 posti al modello:

- P10 disponibilità della macchina M1
- P11 disponibilità della macchina M2
- P12 disponibilità della macchina M3

Ora, non resta che assegnare le varie risorse alle operazioni che le utilizzano nelle varie ricette. Analizziamo solo la ricetta R1, per semplicità (Fig. 4.20). M1 viene acquisita all'inizio della ricetta, in corrispondenza di T1. Per rappresentare ciò si collega P10 a T1 con un arco di peso unitario. In T1 inizia la lavorazione da parte di M1, che termina con il suo rilascio in T2 (arco di peso unitario da T2 a P10). M1 viene ancora richiesta in una successiva fase della ricetta: viene quindi posto un arco di peso unitario da P10 a T3. In T3 inizia la lavorazione da parte di M1, che termina con il suo rilascio in T4 (arco di peso unitario da T4 a P10). I collegamenti dei posti-risorsa alle transizioni delle altre ricette si ricavano in maniera analoga.

Il modello completo del processo comprensivo dell'allocazione delle risorse è riportato in Fig. 4.22.

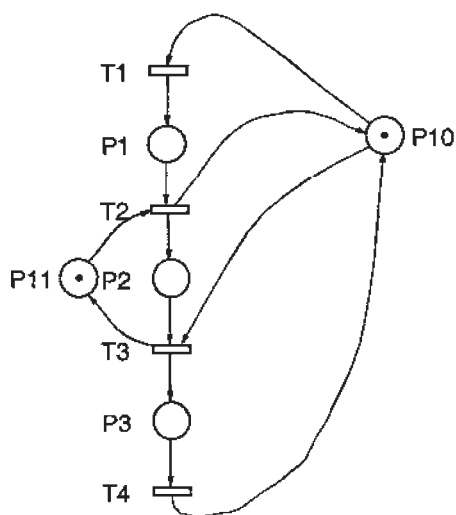


Fig. 4.21 – Uso della risorse M1 e M2 nella ricetta R1

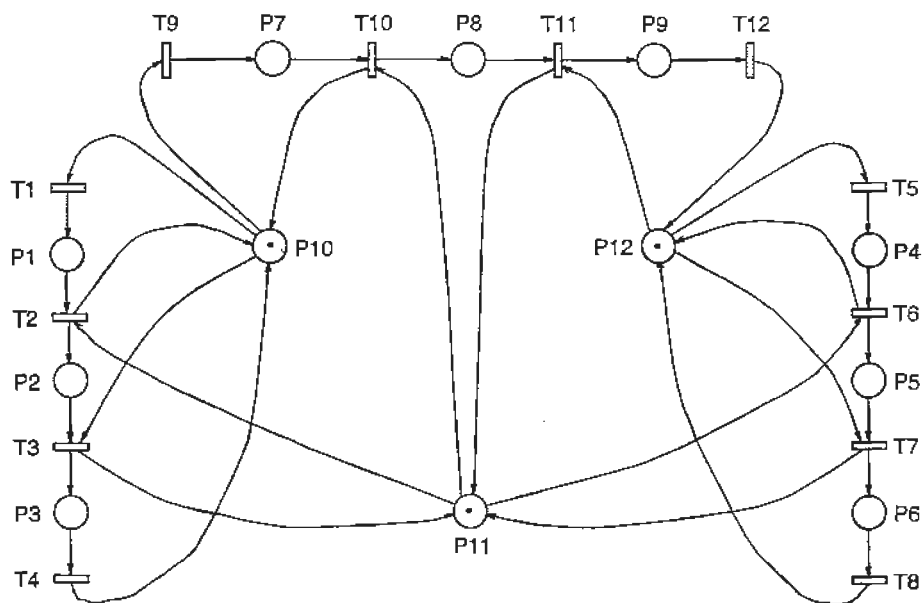


Fig. 4.22 – Il modello complessivo

5.2) La matrice di incidenza della rete di Petri così costruita è data da:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quanto alla tipologia della rete è possibile fare le seguenti affermazioni:

- 1) La rete non è una macchina a stati in quanto esistono transizioni della rete che hanno più di un posto in ingresso o in uscita (vedi T2).
- 2) La rete non è un grafo marcato in quanto esistono posti della rete che hanno più di una transizione a monte o a valle (v. P10).
- 3) In una rete a scelta libera, se un posto è in ingresso a più transizioni (conflitto potenziale), allora esso è l'unico posto in ingresso a quelle transizioni e se una transizione è in ingresso a più posti, allora essa è l'unica transizione in uscita a quei posti. La rete di Fig. 4.22 non è una rete a scelta libera in quanto, ad esempio, il posto P11 è in ingresso alle transizioni T6 e T10, ma non è l'unico posto in ingresso ad esse. Infatti, anche P4 è in ingresso a T6, così come anche P7 è in ingresso a T10.

Calcoliamo ora i P-invarianti. Dall'equazione $C' \cdot X = 0$ si ricava il seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_{10} = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_{10} - x_{11} = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_{10} + x_{11} = 0 \\ -x_3 + x_{10} = 0 \\ x_4 - x_{12} = 0 \\ -x_4 + x_5 - x_{11} + x_{12} = 0 \\ -x_5 + x_6 + x_{11} - x_{12} = 0 \\ -x_6 + x_{12} = 0 \\ x_7 - x_{10} = 0 \\ -x_7 + x_8 + x_{10} - x_{11} = 0 \\ -x_8 + x_9 + x_{11} - x_{12} = 0 \\ -x_9 + x_{12} = 0 \end{array} \right.$$

la cui soluzione generica soddisfa le seguenti condizioni:

$$x_1 = x_3 = x_7 = x_{10}$$

$$x_2 = x_5 = x_8 = x_{11}$$

$$x_4 = x_6 = x_9 = x_{12}$$

I P-invarianti minimi sono dunque

$$PI1 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$PI2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$PI3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$$

I P-invarianti si traducono nei seguenti vincoli sulle marcature:

$$PI1 \rightarrow m_1 + m_3 + m_7 + m_{10} = 1$$

$$PI2 \rightarrow m_2 + m_5 + m_8 + m_{11} = 1$$

$$PI3 \rightarrow m_4 + m_6 + m_9 + m_{12} = 1$$

Ciascun P-invariante rappresenta i possibili stati in cui può trovarsi ciascuna risorsa.

Con analogo procedimento si possono ricavare i seguenti T-invarianti risolvendo il sistema di equazioni $C \cdot Y = 0$:

$$TI1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$$

$$TI2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]'$$

$$TI3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]'$$

I T-invarianti sono associati ai cicli di lavorazione per i 3 tipi di prodotti. L'esecuzione di un'intera ricetta alla volta riporta il sistema nelle condizioni di partenza.

Per calcolare i sifoni della rete definiamo prima gli insiemi di pre-set e post-set per ogni posto.

	$\bullet S$	$S \bullet$
P1	{T1}	{T2}
P2	{T2}	{T3}
P3	{T3}	{T4}
P4	{T5}	{T6}
P5	{T6}	{T7}
P6	{T7}	{T8}
P7	{T9}	{T10}
P8	{T10}	{T11}
P9	{T11}	{T12}
P10	{T2, T4, T10}	{T1, T3, T9}
P11	{T3, T7, T11}	{T2, T6, T10}
P12	{T6, T8, T12}	{T5, T7, T11}

E' facile verificare che i soli sifoni minimi della rete (esclusi i supporti dei P-invarianti) sono:

$$S1 = \{P2, P6, P9, P11, P12\}$$

$$S2 = \{P3, P5, P8, P10, P11\}$$

$$S3 = \{P3, P6, P9, P10, P11, P12\}$$

	$\bullet S$	$S \bullet$
S1	{T2, T7, T11, T3, T6, T8, T12}	{T3, T8, T12, T2, T6, T10, T5, T7, T11}
S2	{T3, T6, T10, T2, T4, T7, T11}	{T4, T7, T11, T1, T3, T9, T2, T6, T10}
S3	{T3, T7, T11, T2, T4, T10, T6, T8, T12}	{T4, T8, T12, T1, T3, T9, T2, T6, T10, T5, T7, T11}

5.3) Controlliamo ora i sifoni con il metodo basato sui P-invarianti. Si impone che i sifoni non si smarchino mai con i seguenti vincoli:

$$m_2 + m_6 + m_9 + m_{11} + m_{12} \geq 1$$

$$m_3 + m_5 + m_8 + m_{10} + m_{11} \geq 1$$

$$m_3 + m_6 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} \geq 1$$

Introducendo le variabili di slack, rappresentative delle marcature dei posti di controllo si ricavano le tre condizioni seguenti:

$$-m_2 - m_6 - m_9 - m_{11} - m_{12} + m_{13} = 1$$

$$-m_3 - m_5 - m_8 - m_{10} - m_{11} + m_{14} = 1$$

$$-m_3 - m_6 - m_9 - m_{10} - m_{11} - m_{12} + m_{15} = 1$$

In altre parole, bisogna imporre che i tre vettori riga contenuti nella matrice seguente siano p-invarianti per la rete controllata:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il controllore è dato da:

$$C_c = -L \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con marcatura iniziale:

$$m_{c0} = b - L \cdot M_{p0} = [-1 \ -1 \ -1]' - L \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]' = [1 \ 1 \ 2]'$$

Il modello finale è riportato in Fig. 4.23. E' facile verificare che esso risulta vivo. \square

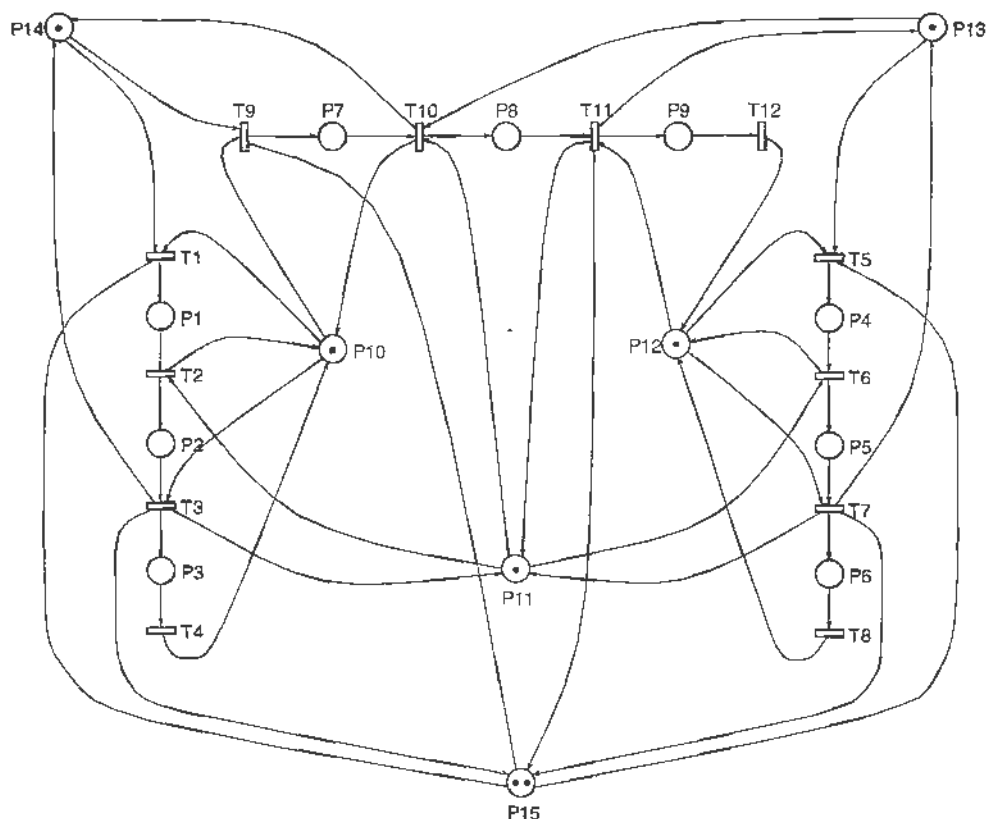


Fig. 4.23 – Il modello finale con i posti di controllo

CAPITOLO 5

IMPLEMENTAZIONE

ESERCIZIO I

Si consideri il sistema descritto nella Fig. 5.1a, già considerato nell'esercizio 2 del capitolo 3, il cui comportamento è rappresentato dal modello a rete di Petri di Fig. 5.1b. Il significato di posti e transizioni è il seguente:

P1	operazione di carico del buffer	T1	inizio carico del buffer
P2	pezzo disponibile sul buffer	T2	fine carico del buffer
P3	carico della macchina M1	T3	inizio carico della macchina M1
P4	pezzo disponibile su M1	T4	fine carico della macchina M1
P5	lavorazione pezzo su M1	T5	inizio lavorazione su M1
P6	carico della macchina M2	T6	fine lavorazione su M1
P7	pezzo disponibile su M2	T7	inizio carico della macchina M2
P8	lavorazione pezzo su M2	T8	fine carico della macchina M2
P9	disponibilità di posti sul buffer	T9	inizio lavorazione su M2
P10	disponibilità del manipolatore	T10	fine lavorazione su M2
P11	disponibilità di M1		
P12	disponibilità di M2		

Si supponga che il livello di dettaglio della descrizione sia sufficiente a definire gli ingressi e le uscite del sistema.

- 1.1) Dopo aver opportunamente etichettato con eventi le transizioni della rete, si progetti un programma in Ladder Diagram che realizzi un controllore logico compatibile con le specifiche funzionali riportate in Fig. 5.1. □

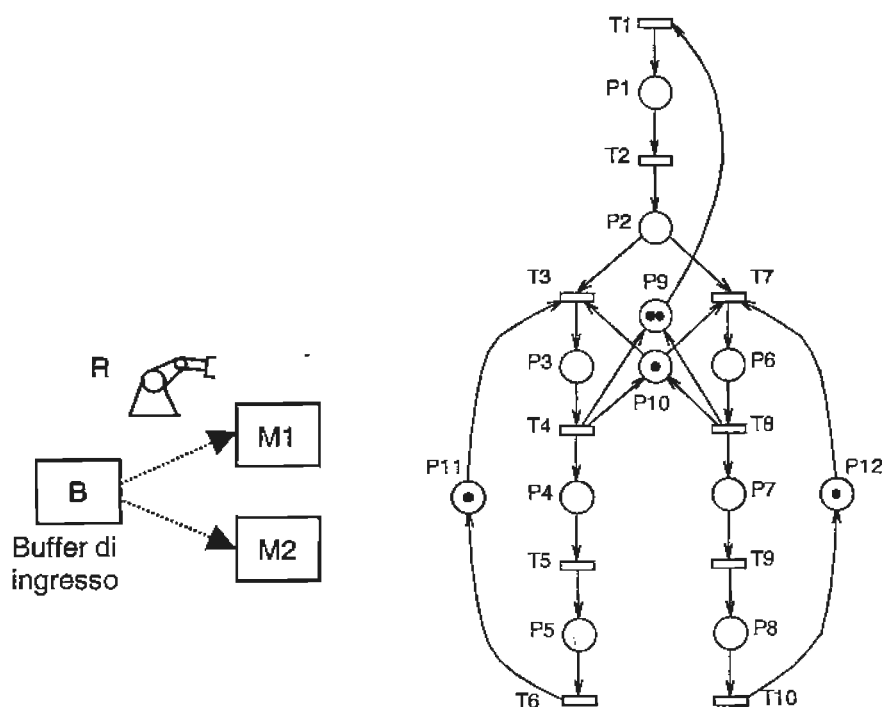


Fig. 5.1 – Sistema di produzione e relativo modello del comportamento desiderato

SOLUZIONE

- 1.1) Tutte le transizioni devono essere dotate di etichette, che rappresentano gli eventi che accadono nel sistema. Questi possono essere *controllabili*, nel qual caso rappresentano le “uscite” del controllore, cioè i comandi, oppure *non controllabili*, nel qual caso rappresentano gli “ingressi” del controllore, cioè le misure. Nella tabella che segue sono riportati gli eventi associati a tutte le transizioni della rete.

transizione	etichetta (evento)	transizione	Etichetta (evento)
T1	bCB	T6	ELM1
T2	eCB	T7	BCM2
T3	bCM1	T8	ECM2
T4	eCM1	T9	BLM2
T5	bLM1.	T10	ELM2

Nell'implementazione, ogni posto sicuro verrà implementato con un contatto, ogni posto limitato con un contatore e ogni evento verrà realizzato con un impulso di durata pari a un tempo di ciclo su un contatto (evento non controllabile) o su una bobina (evento controllabile).

Il codice di controllo in Ladder Diagram sarà diviso nelle seguenti porzioni:

- 1) inizializzazione,
- 2) lettura ingressi e reset dei comandi,
- 3) evoluzione della rete,
- 4) generazione delle uscite.

Vediamo ora in modo sintetico come vengono realizzate le singole sezioni.

1) Inizializzazione

Ogni costruttore di PLC (Programmable Logic Controller) fornisce una variabile (W1) certamente falsa all'accensione del PLC stesso. Tale variabile viene utilizzata per riconoscere la prima scansione del codice del PLC, e quindi per eseguire istruzioni di inizializzazione.

L'inizializzazione serve per forzare lo stato iniziale del sistema, resettare le variabili intermedie, contatori, timer, ecc. In Fig. 5.2 per brevità viene mostrato il codice di inizializzazione contenente il solo forzamento delle variabili di stato.

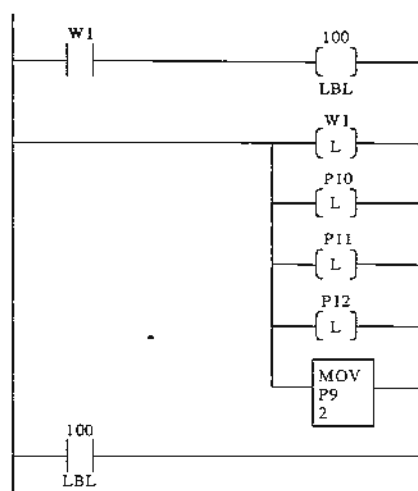


Fig. 5.2 – Inizializzazione

2) Lettura ingressi e reset dei comandi

Gli eventi associati alle transizioni non controllabili della rete sono assimilabili a fronti di salita o di discesa di un ingresso digitale. La seconda porzione di codice deve quindi fondamentalmente rilevare i fronti di salita e di discesa sugli ingressi del PLC.

In Fig. 5.3 è riportata la porzione di codice che genera l'impulso finito eCB (transizione T2) relativa al rilevamento del fronte di un ipotetico segnale di ingresso del PLC che misura la terminazione dell'operazione di carico del buffer (FinCarBuf). Gli altri eventi non controllabili daranno luogo a simili istruzioni.

Si osservi che FinCarBuf è un segnale che può rimanere al livello logico alto per più intervalli di ciclo del PLC, mentre eCB assume il valore logico alto per un tempo di ciclo al più. Infine, W2 è una variabile intermedia necessaria alla rilevazione del fronte.

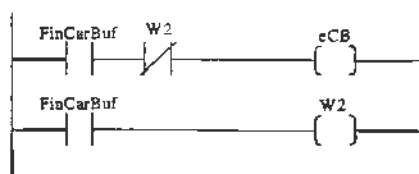


Fig. 5.3 – Generazione degli eventi non controllabili

I comandi invece vanno resettati prima della parte (3) del codice, che eventualmente li setta a 1. In questo modo, tali variabili sono sempre nulle tranne quando vengono esplicitamente attivate nella sezione (3), nel qual caso rimangono a 1 solo per un tempo di ciclo. Nella Fig. 5.4 è riportato l'esempio del codice per il reset dell'evento controllabile bCB.



Fig. 5.4 – Reset degli eventi controllabili

3) Evoluzione della rete

L'implementazione dell'evoluzione della rete in Ladder Diagram è la parte più complessa. Fondamentalmente, ad ogni transizione della rete corrisponde un piolo del programma. Tale piolo realizza lo scatto della transizione, cioè il cambiamento della marcatura corrispondente al verificarsi dell'evento associato alla transizione.

Se la transizione è non controllabile, l'evento corrispondente comparirà nella parte sinistra (relativa agli ingressi) del piolo; se invece la transizione è controllabile, l'evento corrispondente comparirà nella parte destra (insieme alle uscite) del piolo. Schematicamente, la transizione implementa quindi la regola di seguito riportata.

Transizione non controllabile:

```
IF (preset marcato) AND evento=1
THEN aggiorna la marcatura(preset e postset)
```

Transizione controllabile:

```
IF (preset marcato)
THEN aggiorna la marcatura (preset e postset)
    AND evento:=1
```

Chiaramente, l'aggiornamento della marcatura di un posto cambia a seconda che si tratti di un posto sicuro o soltanto limitato.

Riguardo alla scelta dell'ordine con cui scrivere i pioli, cioè le istruzioni, del programma, occorre tenere presente che esiste un problema di scelta tutte le volte che c'è un conflitto strutturale nella rete, cioè un posto con a valle più transizioni. Conviene in questi casi esplicitare la scelta con l'introduzione di condizioni mutuamente esclusive. Ad esempio, occorre aggiungere una condizione logica (α) sulla traduzione di T3 e la sua opposta (NOT α) sulla traduzione di T7, per esprimere una scelta condizionata da α . Se non facessimo così, la scelta potrebbe dipendere dall'ordine con cui scriviamo le istruzioni.

Infine, nell'implementazione mostrata di seguito è stata aggiunta un condizione di Start nella traduzione della transizione di T1, con ovvio significato.

L'ipotesi di fondo con cui tale implementazione è stata sviluppata è che tutte le operazioni del sistema durino almeno un tempo di ciclo. In altre parole, non è possibile che le transizioni di inizio e di fine di una data operazione scattino entrambe in un intervallo inferiore al tempo di ciclo. Al contrario, nello stesso tempo di ciclo possono scattare due transizioni di fine operazione (relative a due operazioni diverse, ovviamente). Ad esempio, lo scatto di T6 e di T10 potrebbe avvenire nello stesso tempo di ciclo.

Analogamente, possono scattare anche una transizione di fine operazione e la successiva transizione di inizio operazione. Ad esempio, lo scatto di T4 è immediatamente seguito dallo scatto di T4, il che è corretto, perché non ha senso, in assenza di specifici motivi, dilazionare l'emissione di un comando.

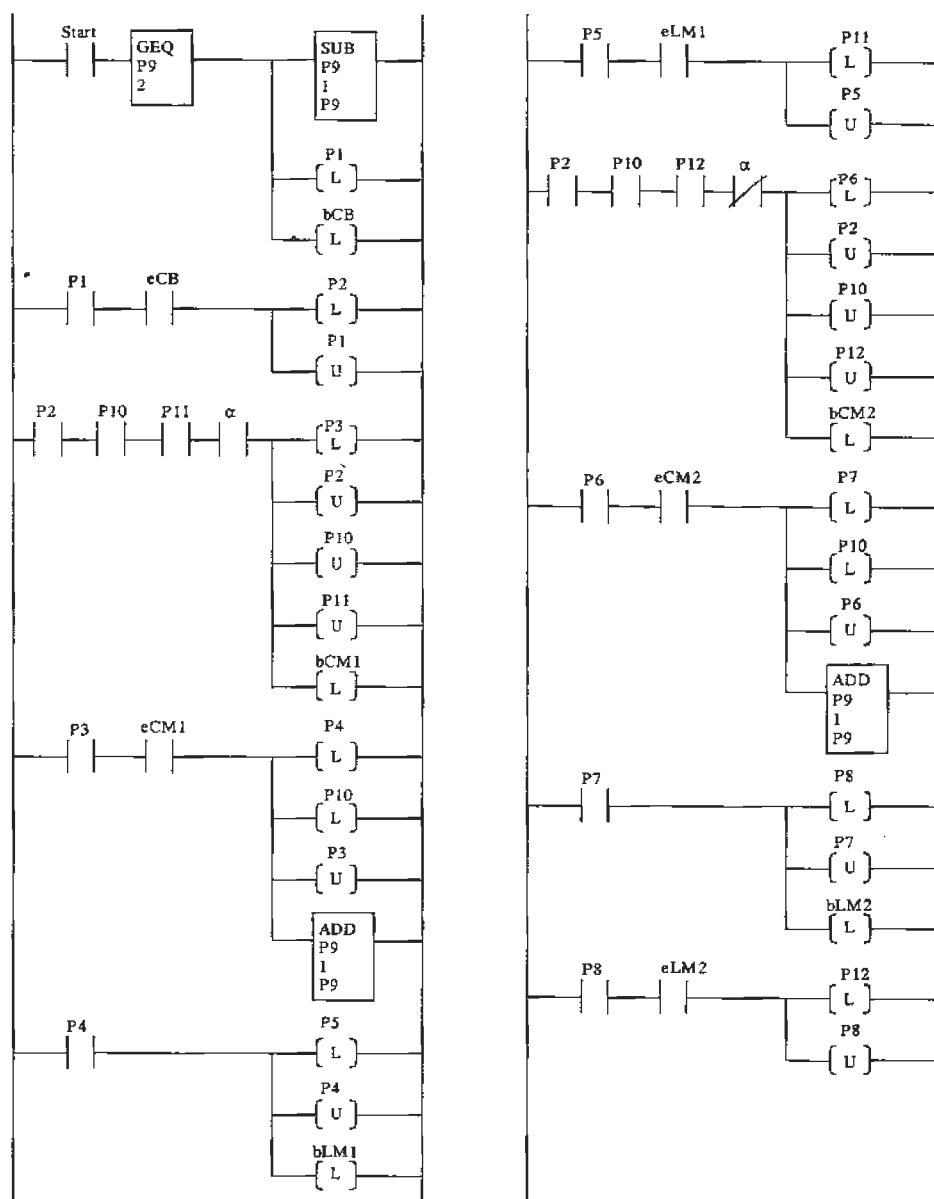


Fig. 5.5 – Codice Ladder Diagram che descrive l'evoluzione della rete di Fig. 5.1

4) Generazione delle uscite

La sezione (3) genera impulsi di un ciclo sulle variabili di comando, corrispondenti a eventi controllabili, coerentemente con l'interpretazione ad eventi delle reti. Tuttavia, difficilmente il generico dispositivo fisico può essere controllato solo con un impulso di durata pari a un tempo di ciclo, che peraltro cambia da PLC a PLC e da applicazione ad applicazione. In base alla specifica forma del segnale necessario per pilotare effettivamente un attuatore, è quindi necessario scrivere opportune istruzioni che "trasformino" l'impulso di un ciclo nel segnale desiderato. Data la semplicità e la varietà delle soluzioni possibili, non appare conveniente fare una casistica di tali soluzioni. □



Biblioteca Centrale
Facoltà Ingegneria

050538

Il volume contiene esercizi ampiamente discussi sull'utilizzo delle reti di Petri ordinarie per la soluzione delle problematiche di controllo logico che sorgono in applicazioni di automazione industriale, e pertanto esso si pone idealmente a complemento del libro di testo "Automazione Industriale: controllo logico con reti di Petri" della stessa casa editrice. Vengono analizzati criticamente i risultati noti in letteratura sulle reti di Petri utilizzate ai fini del controllo logico, e ogni esercizio viene svolto con dovizia di particolari, con discussioni su proposte alternative, con approfondimenti sui concetti basilari di stato, di evento, di specifica, di controllo, di implementazione.

Il testo è rivolto essenzialmente a studenti di corsi di automazione industriale e modellistica e controllo di sistemi ad eventi discreti della laurea di primo livello in Ingegneria dell'automazione, informatica, elettronica, elettrica, gestionale, chimica e meccanica.

Luca Ferrarini nasce a Castiglione delle Stiviere (MN) il 5 luglio 1963. Nel 1988 consegue la laurea con lode in Ingegneria Elettronica presso il Politecnico di Milano e nel 1990 il diploma di specializzazione in Information Technology dal CEFRIEL. Dal 1990 lavora presso il Dipartimento di Elettronica e Informazione del Politecnico di Milano, dove attualmente è professore associato e insegna vari corsi di Automazione Industriale. I suoi interessi di ricerca riguardano la modellistica, la simulazione e il controllo di impianti e processi industriali, con particolare attenzione al controllo logico. E' autore di oltre 80 pubblicazioni scientifiche e di 7 brevetti nel campo della progettazione e collaudo di sistemi di automazione industriale. Infine, collabora con ANIPLA, Associazione Nazionale Italiana Per L'Automazione, di cui è presidente per la sezione di Milano nel biennio 2001-2002.

Luigi Piroddi nasce a Londra (Regno Unito) il 26 novembre 1966. Nel 1990 consegue la laurea a pieni voti in Ingegneria Elettronica e nel 1995 il titolo di Dottorato di Ricerca in Ingegneria Informatica e Automatica, entrambi presso il Politecnico di Milano. Dal 1999 è ricercatore di ruolo presso il Dipartimento di Elettronica e Informazione del Politecnico di Milano, ove attualmente insegna corsi di Automazione Industriale e di Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati. I suoi interessi scientifici includono le tecniche di identificazione non lineare e la modellistica e il controllo di sistemi ad eventi discreti. E' autore di oltre 30 pubblicazioni scientifiche.