Ingegneria Elettrica
Politecnico di Torino

Luca Carlone

Controlli Automatici I

LEZIONE II

Sommario – LEZIONE II

- Trasformata di Laplace
- Proprietà e trasformate notevoli
- Funzioni di trasferimento
- Scomposizione in fratti semplici
- Calcolo della risposta forzata
- Calcolo della risposta libera
- Calcolo della risposta di un sistema LTI
- Esempi ed esercizi numerici…

Trasformata di Laplace

- Associa la funzione di partenza di variabile reale (solitamente il tempo) ad una funzione di variabile complessa

- È uno strumento per la risoluzione e lo studio di equazioni differenziali lineari

  - Esempio:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

- Permette di trasformare operazioni di derivazione e integrazione in operazioni algebriche semplificando la trattazione matematica

Trasformata di Laplace

- DEFINIZIONE: *Trasformata di Laplace*
  - Sia *f* una funzione della variabile reale *t*. La trasformata di Laplace di *f* è una funzione complessa di variabile complessa $s=\alpha+j\omega$, definita come:

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

  nell'ipotesi che tale integrale converga per qualche valore di *s*.
  - **NOTAZIONE**: solitamente si indica con la lettera minuscola la funzione di variabile reale e con la maiuscola corrispondente la funzione nel dominio di Laplace

Trasformata di Laplace

- DEFINIZIONE: *Antitrasformata di Laplace*
  - La funzione *f(t)* di origine si può ottenere dalla funzione *F(s)* attraverso l'antitrasformata di Laplace, definita come:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

  - **OSSERVAZIONE**: la trasformata di Laplace è una <u>trasformazione biunivoca</u>, ovvero ad ogni funzione di variabile reale corrisponde una e una sola trasformata di Laplace

Trasformata di Laplace

- Motivazioni
  - Per risolvere le equazioni differenziali che descrivono un sistema lineare tempo-invariante:

1. Si applica la **trasformata di Laplace** trasformando il problema differenziale in problema algebrico

2. Si ricava una **soluzione nel dominio di Laplace**

3. Per ottenere la soluzione si applica la trasformazione inversa, nota come **antitrasformata di Laplace**

Proprietà e trasformate notevoli

- PROPRIETA':
  - **Linearità** $\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$
  - **Coniugazione** $F(s^*) = F^*(s)$
  - **Traslazione in t** $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = F(s)e^{-st_0}$
  - **Traslazione in s** $\mathcal{L}\left[e^{s_0 t} f(t)\right] = F(s - s_0)$
  - **Derivazione in t** $\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = sF(s) - f(0)$

Proprietà e trasformate notevoli

- PROPRIETA':
  - **Derivazione in *s*** $\mathcal{L}\left[t\, f(t)\right] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
  - **Integrazione in *t*** $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\xi)d\xi\right] = \dfrac{1}{s}F(s)$
  - **Convoluzione** $\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(s)\cdot F_2(s)$
  - **Teorema valore iniziale** $f(0) = \lim_{s\to+\infty} sF(s)$
  - **Teorema valore finale** $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$g(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$\dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}g(t)$	$\dfrac{1}{s^m}$
$\sin(\omega t)g(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)g(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{\alpha t}\dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}g(t)$	$\dfrac{1}{(s-\alpha)^m}$
$e^{\alpha t}\sin(\omega t)g(t)$	$\dfrac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{\alpha t}\cos(\omega t)g(t)$	$\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$t\,e^{\alpha t}\sin(\omega t)g(t)$	$\dfrac{2\omega(s-\alpha)}{((s-\alpha)^2+\omega^2)^2}$
$t\,e^{\alpha t}\cos(\omega t)g(t)$	$\dfrac{(s-\alpha)^2-\omega^2}{((s-\alpha)^2+\omega^2)^2}$

- NOTA: *g(t)* è il gradino unitario e serve a limitare lo studio a $t \geq 0$

Funzioni di trasferimento

- RAPPRESENTAZIONE INGRESSO-USCITA E FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\Big\Downarrow \; \mathcal{L}$$

$$Y(s) = \underbrace{\boxed{C(sI - A)^{-1} \cdot x(0)}}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{\boxed{[C(sI - A)^{-1} B + D] \cdot U(s)}}_{\text{Risposta forzata}}$$

Funzioni di trasferimento

- RAPPRESENTAZIONE INGRESSO-USCITA E FUNZIONI DI TRASFERIMENTO (SISO)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = [C(sI-A)^{-1}B+D] = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad n \geq m$$

$$\Downarrow$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (fdt)

W(s)

Esempio di fdt:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s+1}{s^2-5s-6}$$

Funzioni di trasferimento

- RAPPRESENTAZIONE INGRESSO-USCITA E FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Le radici del numeratore prendono il nome di **zeri**

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad n \geq m$$

Le radici del denominatore prendono il nome di **poli**

Funzioni di trasferimento

- FORME DI RAPPRESENTAZIONE
  - Forma polinomiale:

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad n \geq m$$

  - Forma guadagno-zeri-poli:

$$W(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

Funzioni di trasferimento

- FORME DI RAPPRESENTAZIONE
  - Forma coefficienti e poli:

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{ij}}{(s - p_i)^j}$$

  - Forma costanti di tempo:

$$W(s) = \frac{k}{s^h} \frac{\prod_i (1 - \tau'_i s)}{\prod_i (1 - \tau_i s)} \frac{\prod_i \left(1 + \frac{2\zeta'}{\omega'_i} s + \frac{1}{\omega'^2_i} s^2\right)}{\prod_i \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_i} s + \frac{1}{\omega^2_i} s^2\right)}$$

Scomposizione in fratti semplici

- Per ottenere la risposta nel tempo, antitrasformando la corrispondente trasformata di Laplace, è conveniente utilizzare la rappresentazione **<u>coefficienti e poli</u>**

  - Negli esercizi numerici si parte solitamente da una rappresentazione **polinomiale**

- In particolare, è possibile esprimere la *F(s)* come una combinazione lineare di termini, detti **<u>fratti semplici</u>**:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(s-p)^{j}}$$

Scomposizione in fratti semplici

- POLI REALI DI MOLTEPLICITA' UNITARIA:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

$$\Downarrow$$

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s - p_i}$$

$$\Downarrow \ \mathcal{L}^{-1}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i e^{p_i t} g(t)$$

Calcolo dei residui

1. $r_i = [(s - p_i) F(s)]_{s=p_i}$
2. Principio d'identità dei polinomi

OSSERVAZIONE: residui associati a poli reali sono reali

Scomposizione in fratti semplici

- POLI REALI MULTIPLI

$$F(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s + a_0} \Rightarrow F(s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{r_{i,j}}{(s-p_i)^j}$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} r_{i,j}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{p_i t}g(t)$$

Calcolo dei residui

1. $$r_{i,j}=\frac{1}{(n_i-j)!}\left[\frac{d^{n_i-j}}{ds^{n_i-j}}\left((s-p_i)^{n_i}F(s)\right)\right]_{s=p_i}$$
2. Principio d'identità dei polinomi

Scomposizione in fratti semplici

- POLI COMPLESSI CONIUGATI
  - **Generano una risposta oscillatoria il cui inviluppo è determinato dalla parte reale dei poli**

OSSERVAZIONE: residui associati a poli complessi coniugati sono a loro volta complessi coniugati

$$F(s) = \frac{ms+n}{s^2+as+b} = \frac{r}{s+p-jq} + \frac{r^*}{s+p+jq}$$

  - Si possono calcolare utilizzando la procedura vista per I poli reali di molteplicità unitaria oppure utilizzando SCILAB

Scomposizione in fratti semplici

- POLI COMPLESSI CONIUGATI
  - **La risposta nel tempo corrispondente ad una coppia di poli complessi coniugati è data dall'espressione:**

$$F(s) = \frac{r}{s-p-jq} + \frac{r^*}{s-p+jq}$$

$$\Big\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$f(t) = 2|r|e^{pt}\cos\left(qt + \underline{|r}\right)\cdot g(t)$$

p = parte reale del polo
q = parte immaginaria del polo
|r| = modulo del residuo associato al polo
$\underline{|r}$ = fase del residuo associato al polo

Calcolo della risposta forzata

- PROBLEMA: dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con *A*, *B*, *C* e *D* note e tempo-invarianti,

DETERMINARE

- L'espressione analitica della risposta del sistema *y(t)* a fronte di un ingresso *u(t)* polinomiale
  - OSSERVAZIONE: la risposta per ingressi sinusoidali sarà trattata nella LEZIONE IV

Calcolo della risposta forzata

- SOLUZIONE:

1. Trasformare la rappresentazione ingresso-stato-uscita in funzione di trasferimento

2. Applicare la trasformata di Laplace alla funzione $u(t)$

3. Ottenere l'uscita del sistema nel dominio di Laplace

4. Scomporre in fratti semplici e antitrasformare, ottenendo la risposta forzata $y_f(t)$

Calcolo della risposta forzata

1. Trasformare la rappresentazione ingresso-stato-uscita in funzione di trasferimento

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\Big\Downarrow \; \mathcal{L}$$

$$W(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad n \geq m$$

- **OSSERVAZIONE**: In sede d'esame questo passaggio si può svolgere utilizzando il calcolatore (vedi [SCILAB])

Calcolo della risposta forzata

2. Applicare la trasformata di Laplace alla funzione *u(t)*

$$u(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} g(t) \quad t \geq 0$$

$$\Big\Downarrow \; \mathcal{L}$$

$$U(s) = \frac{1}{s^m}$$

- **OSSERVAZIONE**: Questo passaggio si può svolgere utilizzando le tavole con le trasformate e antitrasformate di Laplace

Calcolo della risposta forzata

3. Ottenere l'uscita del sistema nel dominio di Laplace

$$\underbrace{W(s) \qquad\qquad\qquad\qquad U(s)}$$

Ottenuta al passo 1

Ottenuta al passo 2

$$Y_f(s) = W(s) \cdot U(s)$$

Calcolo della risposta forzata

4. Scomporre in fratti semplici e antitrasformare, ottenendo la risposta forzata *y(t)*

Forma polinomiale

$\Downarrow$

Forma coefficienti e poli (fratti semplici)

$\left.\begin{array}{c}\textbf{Forma polinomiale}\\ \Downarrow \\ \textbf{Forma coefficienti e poli (fratti semplici)}\end{array}\right\} Y_f(s)$

$\Big\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$y_f(t)$$

- **OSSERVAZIONE**: Questo passaggio si può svolgere utilizzando il calcolatore (vedi [SCILAB]) o seguendo le indicazioni contenute nelle slide precedenti (SCOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI)

Calcolo della risposta libera

- La risposta libera si ottiene dal primo addendo della relazione:

$$Y(s) = \boxed{C(sI - A)^{-1} \cdot x(0)} + \boxed{[C(sI - A)^{-1} B + D] \cdot U(s)}$$

Risposta libera　　　　　　　　Risposta forzata

- Dopo aver ottenuto $C(sI - A)^{-1} \cdot x(0)$ è necessario antitrasformare per ottenere la risposta libera nel tempo che rappresenta l'evoluzione naturale di un sistema senza ingressi a partire dalla condizione iniziale *x(0)*

Calcolo della risposta libera

- SOLUZIONE:

1. Calcolare $Y_l(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot x(0)$ a partire da *A*, *C* e le condizioni iniziali *x(0)*

2. Scomporre in fratti semplici e antitrasformare, ottenendo la risposta libera $y_l(t)$

Calcolo della risposta di un sistema LTI

- Il calcolo dell'espressione analitica della risposta di un sistema lineare tempo-invariante (LTI) a fronte di un ingresso $u(t)$ a partire dalle condizioni iniziali $x(0)$ si ottiene, per linearità, sommando il contributo della risposta libera a quello dovuto alla risposta forzata

- SOLUZIONE:

1. Calcolare la risposta forzata $y_f(t)$ all'ingresso $u(t)$ trascurando l'evoluzione libera

2. Calcolare la risposta libera $y_l(t)$ trascurando l'evoluzione forzata

3. La risposta del sistema si ottiene sommando i due contributi:

$$y(t) = y_f(t) + y_l(t)$$

- Esempi ed esercizi numerici…