Diagrammi di Nyquist

Il diagramma di Nyquist di una funzione di trasferimento $G(s)$ è il diagramma di $G(j\omega)$ per ω che varia da $-\infty$ a $+\infty$.

Nel diagramma di Nyquist si riportano sul piano complesso parte reale $Re\{G(j\omega)\}$ e parte immaginaria $Im\{G(j\omega)\}$

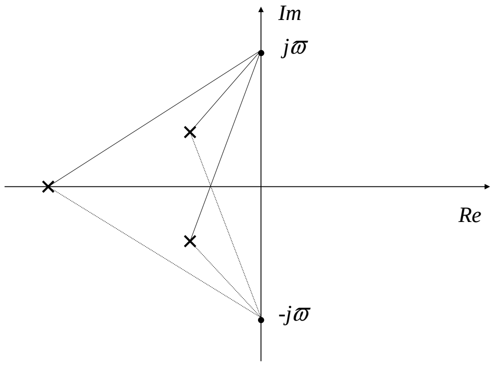
Risulta:

$$|G(j\omega)| = |G(-j\omega)|$$
$$\arg G(j\omega) = -\arg G(-j\omega)$$

e, quindi:

$$Re\{G(j\omega)\} = Re\{G(-j\omega)\}$$
$$Im\{G(j\omega)\} = -Im\{G(-j\omega)\}$$

Tali proprietà si vedono bene se si fa riferimento alla figura seguente dove modulo e fase di $G(j\omega)$ e $G(-j\omega)$ vengono valutati graficamente nel piano complesso.



Quindi nel diagramma di Nyquist si ha simmetria rispetto all'asse reale.

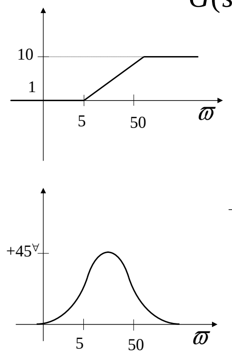
Il diagramma di $G(j\omega)$ per $\omega \in (-\infty, 0^-]$ è l'immagine speculare del diagramma di $G(j\omega)$ per $\omega \in [0^+, +\infty)$

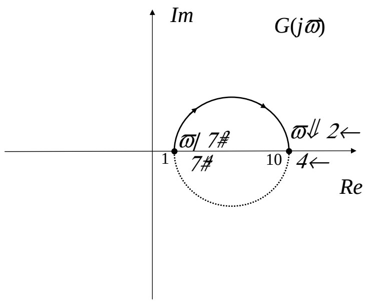
Il diagramma di Nyquist può essere tracciato a partire dal diagramma di Bode.

Modulo e fase di $G(j\omega)$ vengono riportati per punti sul piano complesso, quindi si traccia il diagramma speculare rispetto all'asse reale.

Esempio

$$G(s) = \frac{10(s+5)}{(s+50)} = \frac{1+\frac{s}{5}}{1+\frac{s}{50}}$$





Valore finale per $\omega \to \infty$:

se $G(s)$ ha tanti zeri quanti poli allora

$$\lim_{\omega \to \infty} |G(j\omega)| \text{ è un valore finito.}$$

La fase è sempre un multiplo di −90° e si può calcolare analiticamente o dal grafico di Bode della fase stessa.

Valore iniziale: andamento di $G(j\omega)$ per valori molto bassi di ω. Poniamo

$$G(s) = k s^{\sigma} \frac{\prod \left(1+\frac{s}{z_i}\right) \prod \left(1+\frac{2\zeta_i}{\omega_i} s+\frac{s^2}{\omega_i^2}\right)}{\prod \left(1+\frac{s}{p_i}\right) \prod \left(1+\frac{2\zeta_i}{\omega_i} s+\frac{s^2}{\omega_i^2}\right)}$$

σ è positivo o negativo a seconda che si abbiano zeri o poli nell'origine

Se $G(j\omega)$ non ha né poli né zeri nell'origine ($\sigma=0$) allora $|G(j\omega)|_{\omega=0}$ è un valore finito e la fase di $G(j\omega)$ è

$$\begin{array}{ll} 0° & \text{se } k > 0 \\ -180° & \text{se } k < 0 \end{array}$$

Se $G(j\omega)$ ha zeri nell'origine ($\sigma>0$) allora $|G(j\omega)|_{\omega=0} = 0$.

Questo caso non è di interesse pratico.

Se $G(j\omega)$ ha poli nell'origine ($\sigma<0$) allora

$$\lim_{\omega \to 0} |G(j\omega)| = \infty$$

e la fase è

$$\begin{array}{ll} 90° \cdot \sigma & \text{se } k > 0 \\ 90° \cdot \sigma - 180° & \text{se } k < 0 \end{array}$$

(Nota: è una fase negativa perché $\sigma<0$)

Nel caso di poli nell'origine il modulo $|G(j\omega)|$ tende a ∞ per $\omega \to 0$ come la parte reale $Re[G(j\omega)]$ o la parte immaginaria $Im[G(j\omega)]$ a seconda che la molteplicità del polo sia pari o dispari.

Per conoscere il comportamento dell'altra parte bisogna esaminarlo specificatamente.

Esempio

$$G(s)=\frac{K}{s\left(1+\frac{s}{p_1}\right)\left(1+\frac{s}{p_2}\right)}=\frac{K}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$$

$$=\frac{K}{\tau_1\tau_2 s^3+(\tau_1+\tau_2)s^2+s}$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1-\tau_1\tau_2\omega^2)-(\tau_1+\tau_2)\omega^2}=$$

$$=\frac{K\{j\omega(1-\tau_1\tau_2\omega^2)+(\tau_1+\tau_2)\omega^2\}}{-\omega^2(1-\tau_1\tau_2\omega^2)^2+(\tau_1+\tau_2)^2\omega^4}$$

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)]=\frac{-K(\tau_1+\tau_2)}{(1-\tau_1\tau_2\omega^2)^2+(\tau_1+\tau_2)^2\omega^2}$$

$$\mathrm{Im}[G(j\omega)]=\frac{-K(1-\tau_1\tau_2\omega^2)}{\omega(1-\tau_1\tau_2\omega^2)^2+(\tau_1+\tau_2)^2\omega^3}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}[G(j\omega)]=-K(\tau_1+\tau_2)$$

$$\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Im}[G(j\omega)]=-\infty$$

$$\mathrm{Im}[\cdot]=0 \;\Rightarrow\; -K(1-\tau_1\tau_2\omega^2)=0$$

$$\omega^2=1/\tau_1\tau_2$$

$$\mathrm{Im}[\cdot]=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}[\cdot]=\frac{-K(\tau_1+\tau_2)}{(\tau_1+\tau_2)^2\left(1/\tau_1\tau_2\right)}$$

$$\mathrm{Re}[\cdot]=-K\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$$

Si ha che:

$$-K(\tau_1+\tau_2)<-K\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$$

Infatti da tale relazione

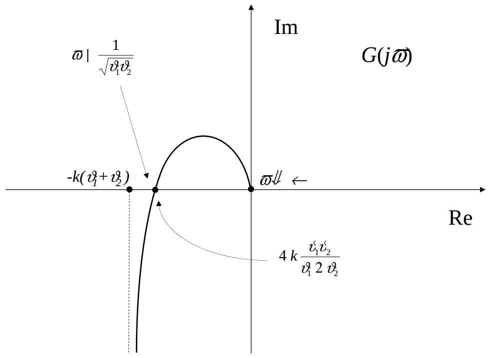
$$(\tau_1+\tau_2)>\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$$

$$(\tau_1+\tau_2)^2>\tau_1\tau_2$$

$$\tau_1^2+2\tau_1\tau_2+\tau_2^2>\tau_1\tau_2$$

nell'ipotesi che $\tau_1,\tau_2>0$

Quindi il diagramma di $G(j\omega)$ risulta

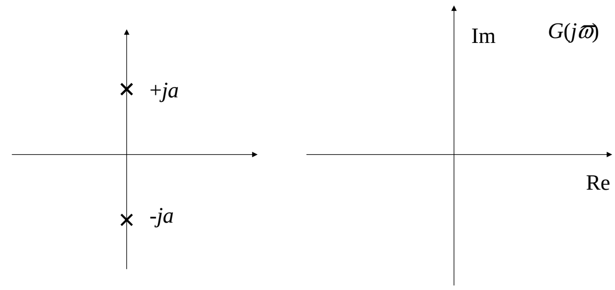


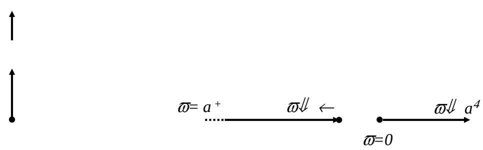
Poli sull'asse immaginario

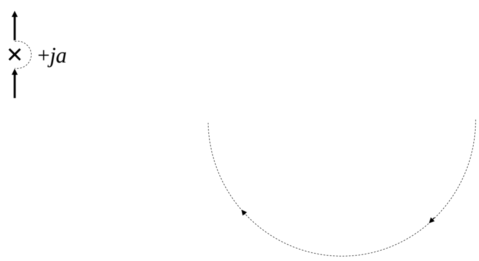
Per analizzare questo caso conviene fare riferimento al caso in cui modulo e fase di $G(j\omega)$ vengono valutati graficamente sul piano complesso.

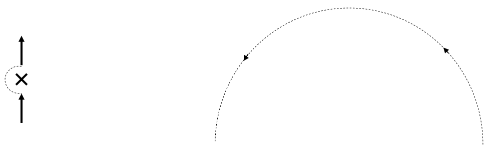
Quando, percorrendo l'asse $j\omega$ nel verso delle ω crescenti, ci si avvicina a un polo il modulo $|G(j\omega)|$ tende a infinito, mentre la fase ha una discontinuità di 180° in corrispondenza dello scavalcamento del punto ja in cui si trova il polo.

Esempio $G(s) = \frac{1}{(s + ja)(s - ja)}$









Per studiare il comportamento asintotico di $G(j\varpi)$ in prossimità di poli sull'asse immaginario, si studia

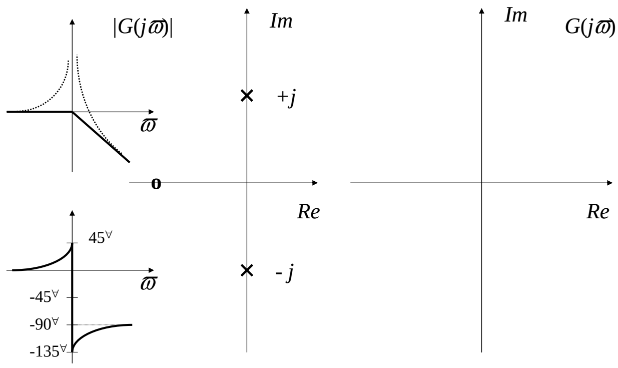
$$G/j\varpi 0 \Big|_{\varpi \,|\, \varpi_i\, 2\, \kappa}$$

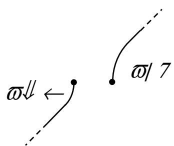
dove ϖ_i è il valore del polo immaginario e κ è piccolo a piacere.

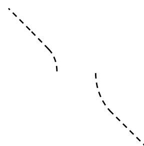
Essendo κ infinitesimo si possono semplificare tutte le espressioni in cui via siano termini infinitesimi di ordine diverso.

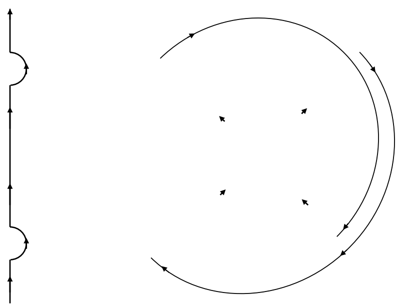
Esempio

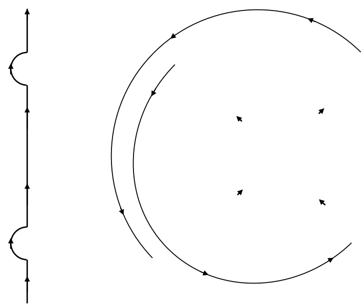
$$G/s0| \frac{s\,2\,1}{s^2\,2\,1}$$

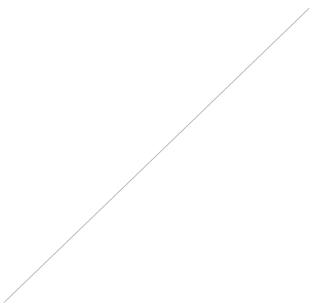












Calcolo del comportamento asintotico

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega+1}{1-\omega^2} = \frac{1}{1-\omega^2} + j\frac{\omega}{1-\omega^2}$$

Poniamo $\omega = 1+\kappa$

si ottiene:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1-(1+2\kappa+\kappa^2)} + j\frac{1+\kappa}{1-(1+2\kappa+\kappa^2)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\kappa(2+\kappa)} + j\frac{1+\kappa}{-\kappa(2+\kappa)}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{-\kappa(2+\kappa)} \\ y = \dfrac{1+\kappa}{-\kappa(2+\kappa)} = \dfrac{1}{-\kappa(2+\kappa)} + \dfrac{\kappa}{-\kappa(2+\kappa)} = \end{cases}$$

$$y = x + \frac{1}{-(2+\kappa)} = x - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

κ è infinitesimo rispetto a 2

Comandi MATLAB:

```
[re,im]=nyquist(num,den,w)
plot(re,im)
plot(re,im,re,-im)
```

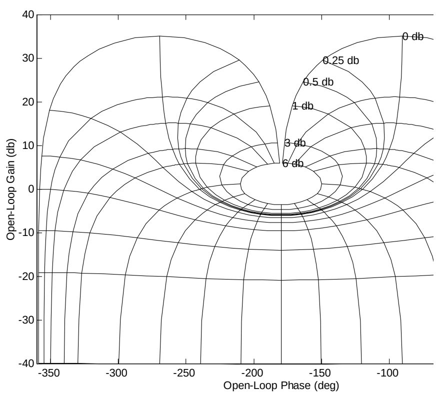
Attenzione: *si usano scale lineari mentre il modulo può variare di diverse decadi*

Carte e Diagrammi di Nichols

Il diagramma di Nichols è il diagramma di

$$G(s)\big|_{s=j\omega} \quad 0 \le \omega < \infty$$

Riportato sul piano che ha per ascisse la fase di $G(j\omega)$ espressa in gradi e per ordinate il modulo di $G(j\omega)$ espresso in decibel.



Il diagramma di Nichols può essere ottenuto facilmente per punti a partire dal diagramma di Bode.

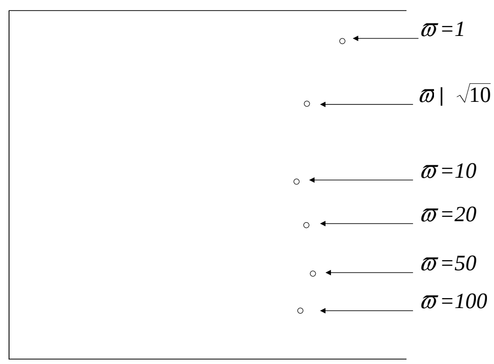
Esempio

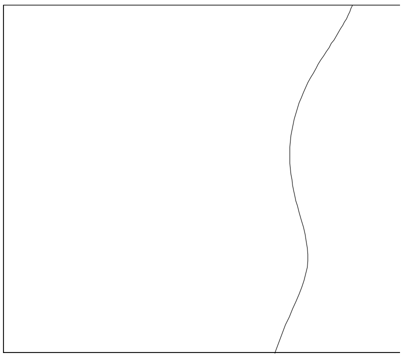
$$G(s) = \frac{500(s+20)}{s(s+2)(s+100)}$$

Si costruisce una tabella:

ω	$\lvert G(j\omega)\rvert$	$\angle G(j\omega)$
1	50 ≅ 34 dB	-120°
$\sqrt{10}$	10 ≅ 20 dB	-135°
10	1 ≅ 0 dB	-135°
20	0.25 ≅ -12 dB	-150°
50	0.1 ≅ -20 dB	-150°
100	0.036 ≅ - 29 dB	-150°

(I valori sono ottenuti dai diagrammi approssimati)





Margine di fase e margine di guadagno

Il margine di fase m_π è:

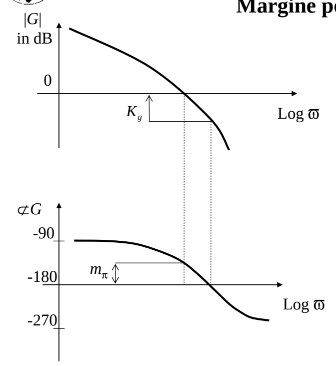
$$m_\pi = 180° + \arg\left(G(j\varpi)\right)\Big|_{\varpi=\varpi_c}$$

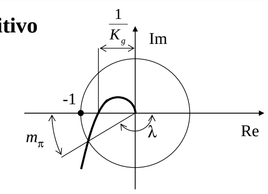
Il margine di guadagno è:

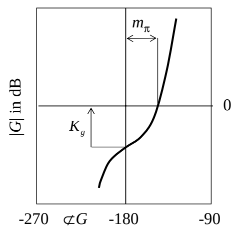
$$Kg = \frac{1}{\left|G(j\varpi)\right|_{\varpi=\varpi_{180}}}$$

dove ϖ_{180} è la pulsazione a cui la fase di $G(j\varpi)$ è pari a $-180°$

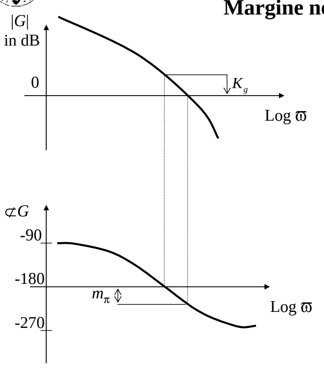
Margine positivo

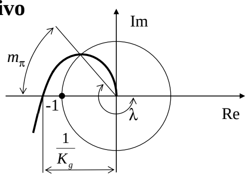


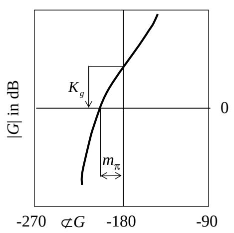




Margine negativo







Attraversamenti Multipli