

## CAPITOLO 6

### ANALISI IN REGIME PERMANENTE

#### 6.1 Circuiti dinamici in regime permanente

I Capitoli 3 e 4 sono stati dedicati, ad eccezione del paragrafo sugli induttori accoppiati, esclusivamente all'analisi di circuiti costituiti di soli *elementi adinamici lineari*, cioè resistori, generatori ideali (indipendenti), generatori controllati lineari, giratori, trasformatori ideali. Abbiamo introdotto il concetto di equivalenza, le regole dei partitori, la proprietà della sovrapposizione degli effetti, il generatore equivalente di Thévenin-Norton, la trasformazione stella-triangolo. In questi circuiti la variabile temporale non gioca nessun ruolo se non quello di un semplice parametro.

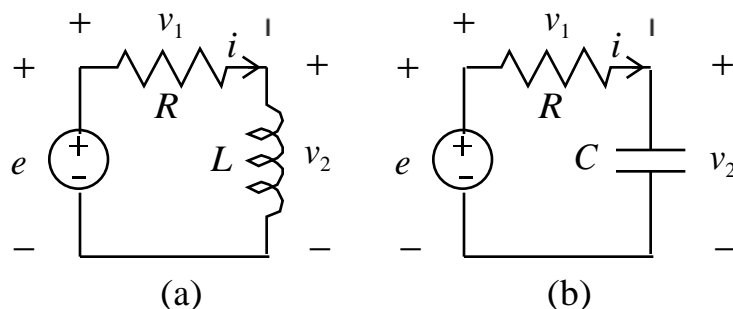
Nel Capitolo 2 abbiamo già studiato approfonditamente circuiti dinamici “*semplici*”, che contengono resistori, induttori e condensatori (lineari e tempo invarianti) passivi, del tipo illustrati in Figura 6.1, vedi § 2.4. La grandezza di stato del circuito riportato in Figura 6.1a è l'intensità della corrente elettrica che attraversa l'induttore, mentre la grandezza di stato del circuito riportato in Figura 6.1b è la tensione del condensatore. Abbiamo trovato che, per qualsiasi andamento temporale della tensione impressa  $e(t)$ , la soluzione, cioè qualsiasi grandezza del circuito, può essere sempre espressa come somma di due termini, un termine *transitorio* e un termine di *regime permanente*

$$x(t) = \underbrace{A \exp(-t/\tau)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{Regime permanente}} ; \quad (1)$$

$\tau = RC$  è l'espressione della costante di tempo per il circuito  $RC$  e  $\tau = L/R$  è l'espressione della costante di tempo per il circuito  $RL$ .

Il termine transitorio, che dipende dallo stato iniziale del circuito, tende esponenzialmente a zero per  $t \rightarrow +\infty$  a causa della dissipazione del resistore e della passività dell'elemento dinamico.

Il termine di regime permanente è la soluzione che si instaurerebbe nel circuito al generico istante attuale  $t$  se il circuito avesse iniziato a funzionare all'istante iniziale  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Esso non dipende dal particolare stato iniziale del circuito ed è, in generale, diverso da zero per  $t \rightarrow +\infty$  (ovviamente, se la tensione  $e(t)$  è diversa da zero per  $t \rightarrow +\infty$ ).



**Fig. 6.1** Circuiti dinamici del primo ordine.

Si consideri un generico circuito globalmente passivo e dissipativo. Si considerino due diverse soluzioni dello stesso circuito che differiscono solo per il valore iniziale della grandezza di stato. La passività del circuito fa sì che la differenza tra le due soluzioni rimanga limitata nel tempo sia per  $t_0 \rightarrow -\infty$  che per  $t \rightarrow +\infty$ , mentre la dissipazione fa sì che essa tenda, con legge esponenziale, a zero sia per  $t_0 \rightarrow -\infty$  che per  $t \rightarrow +\infty$ . È evidente che, dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo (ad esempio, cinque volte la costante di tempo), il comportamento del circuito è indipendente dallo stato iniziale e dipende solo dalla tensione impressa dal generatore: la soluzione del circuito tende per  $t \rightarrow +\infty$  a quella di regime. Questa è una proprietà generale dei circuiti lineari, tempo invarianti, passivi e dissipativi, che non dipende da come essi sono costituiti in dettaglio. Dal dettaglio della loro costituzione dipende solo il tempo necessario per

raggiungere il regime permanente. Ritorneremo su questi aspetti nel prossimo Capitolo, dove verranno approfonditi.

La forma d'onda del regime permanente dipende solo dalla forma d'onda delle tensioni dei generatori ideali di tensione e dalle intensità di corrente dei generatori ideali di corrente. Per i due circuiti riportati in Figura 6.1 abbiamo trovato che (vedi § 2.4):

- il regime permanente è stazionario se la tensione impressa è stazionaria (costante nel tempo);
- il regime permanente è sinusoidale con pulsazione  $\omega$  se la tensione impressa è sinusoidale con pulsazione  $\omega$ .

Anche questi due risultati sono due proprietà generali dei circuiti lineari, tempo invarianti, passivi e dissipativi, che non dipendono dal particolare circuito in esame.

In un circuito lineare, tempo-invariante e dissipativo, dopo l'esaurimento del transitorio, le tensioni e le correnti sono costanti nel tempo se tutti i generatori sono costanti nel tempo: il circuito raggiunge il *regime stazionario*.

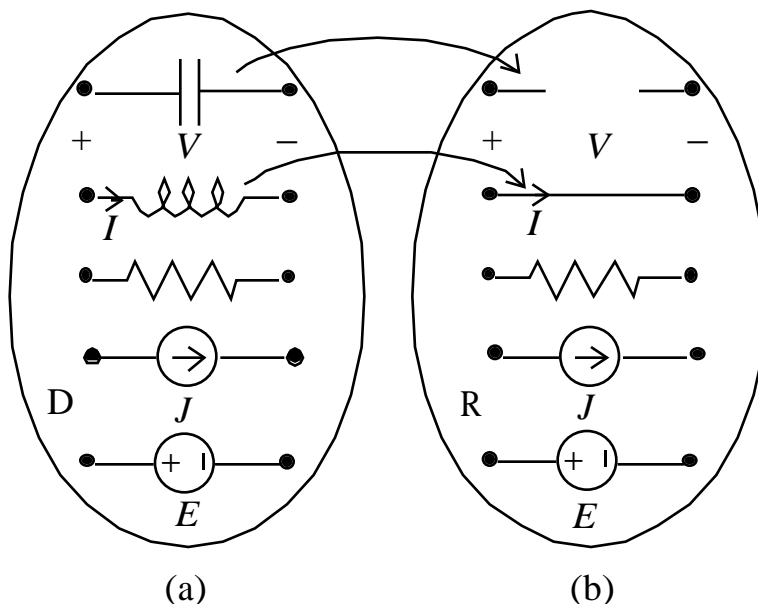
In un circuito lineare, tempo-invariante e dissipativo alimentato da uno o più generatori sinusoidali tutti con la stessa pulsazione  $\omega$ , dopo l'esaurimento del transitorio, tutte le tensioni e le correnti sono sinusoidali alla stessa pulsazione: il circuito raggiunge il *regime sinusoidale*.

Nel presente Capitolo si considerano esclusivamente circuiti lineari in regime stazionario e in regime sinusoidale. Molti circuiti operano in regime stazionario o in regime sinusoidale. Come si vedrà in seguito, se è nota la *risposta* di un circuito lineare, tempo-invariante e dissipativo ad un ingresso costante e uno sinusoidale di frequenza arbitraria, allora è possibile calcolare la risposta ad un segnale arbitrario (sotto opportune condizioni che non sono molto restrittive).

## 6.2 Circuiti in regime stazionario

Si consideri un circuito  $D$  lineare tempo invariante costituito da resistori, condensatori, induttori e generatori ideali (indipendenti) stazionari di tensione e/o

di corrente. Si assuma che il circuito D sia in regime stazionario (il transitorio si è estinto). Quindi tutte le tensioni e le intensità di corrente del circuito sono costanti nel tempo.



**Fig. 6.2** (a) Circuito dinamico in regime stazionario e (b) circuito resistivo equivalente.

Si consideri un generico condensatore del circuito D e siano  $V_C$ ,  $I_C$  e  $C$  la tensione, l'intensità della corrente elettrica e la capacità, rispettivamente, Figura 6.2a. È evidente, allora, che

$$I_C = C \frac{dV_C}{dt} = 0 \quad (2)$$

per ogni valore della tensione  $V_C$ , perché essa è costante. Possiamo concludere che un generico condensatore in regime stazionario si comporta sempre come se fosse un circuito aperto.

Si consideri, ora, un generico induttore del circuito e siano  $V_L$ ,  $I_L$  e  $L$  la tensione, l'intensità della corrente elettrica e l'induttanza, rispettivamente, Figura 6.2a. È evidente, allora, che

$$V_L = L \frac{dI_L}{dt} = 0 \quad (3)$$

per ogni valore della corrente  $I_L$ , perché essa è costante. Possiamo concludere che un generico induttore in regime stazionario si comporta sempre come se fosse un corto circuito.

Le relazioni tra le tensioni e correnti dei resistori sono descritte da equazioni algebriche, quindi non dipendono dal particolare andamento temporale delle tensioni e correnti. È evidente, allora, che la soluzione stazionaria del circuito D coincide con la soluzione del circuito resistivo R ottenuto sostituendo nel circuito D a ogni condensatore un circuito aperto e a ogni induttore un corto circuito, Figura 6.2b. Il circuito resistivo equivalente R può essere analizzato utilizzando i metodi di analisi tipici dei circuiti resistivi illustrati nei Capitoli precedenti.

Le tensioni dei condensatori sono le tensioni dei corrispondenti circuiti aperti nel circuito resistivo equivalente R e le intensità delle correnti che attraversano gli induttori sono le intensità delle correnti che attraversano i corrispondenti corto circuiti, Figura 6.2.

#### **Procedura per la soluzione di un circuito dinamico in regime stazionario**

- (a) Si sostituisca a ogni condensatore un circuito aperto e a ogni induttore un corto circuito.
- (b) Si risolva la rete di resistori, circuiti aperti, corto circuiti e generatori così ottenuta.

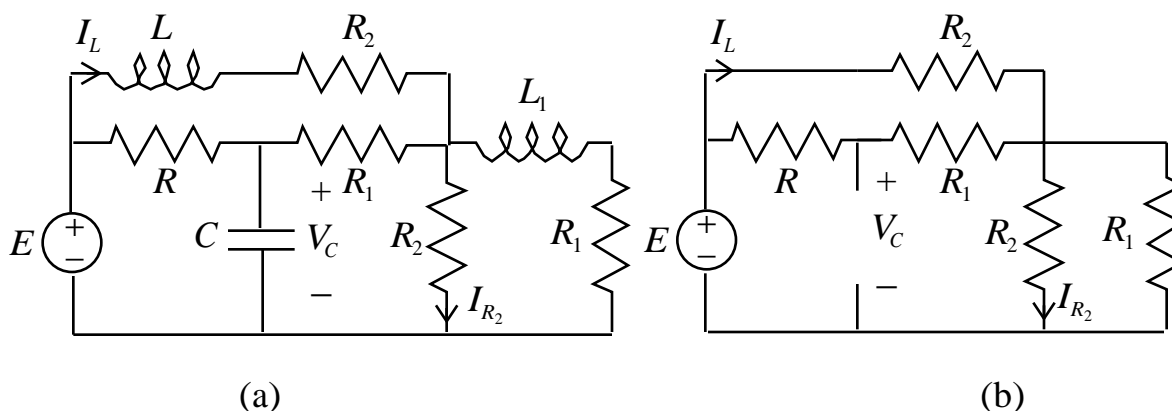
#### **Osservazione**

Abbiamo, solo per non appesantire la trattazione, considerato solo resistori lineari. Questo risultato, ovviamente, resta valido anche quando nel circuito in regime stazionario ci sono, oltre ai resistori, altri tipi di elementi adinamici, come, ad esempio, giratori, generatori controllati, trasformatori ideali. Gli elementi adinamici possono essere anche non lineari, come, ad esempio, diodi a giunzione  $pn$ , diodi tunnel, transistori, ... . In questo caso il circuito equivalente R è un circuito ancora di tipo resistivo, ma non lineare.



## Esercizio

Si consideri il circuito lineare, tempo invariante e dissipativo descritto in Figura 6.3a e si assuma che sia in regime stazionario. Determinare le intensità correnti  $I_L$  e  $I$  che attraversano, rispettivamente, l'induttore di induttanza  $L_1$  e il resistore  $R_2$ , e la tensione  $V_C$  del condensatore. I dati del problema sono riportati in Tabella 6.1. Il circuito resistivo equivalente è rappresentato in Figura 6.3b. Questo circuito è stato ottenuto sostituendo al posto ciascun induttore un corto circuito e al posto del condensatore un circuito aperto. La soluzione del circuito resistivo equivalente può essere ottenuta utilizzando le regole dei partitori e delle equivalenze serie-parallelo. Operando in questo modo si ottiene  $I_L = 25/27$ ,  $I_{R_2} = 100/91$ ,  $V_C = 4,4$ . La soluzione stazionaria è indipendente dai valori delle induttanze e della capacità!



**Fig. 6.3** (a) Circuito in regime stazionario; (b) circuito resistivo equivalente corrispondente.

$E = 10, R = 2, R_1 = 4, R_2 = 6, L = 1 \mu H, L_1 = 10 \mu H, C = 50 \mu F.$
-------------------------------------------------------------------------------

**Tab. 6.1** Parametri del circuito in regime stazionario riportato in Figura 6.3.

## 6.3 I fasori

In un circuito lineare in regime sinusoidale ogni corrente e ogni tensione è una funzione *sinusoidale* del tempo, cioè del tipo

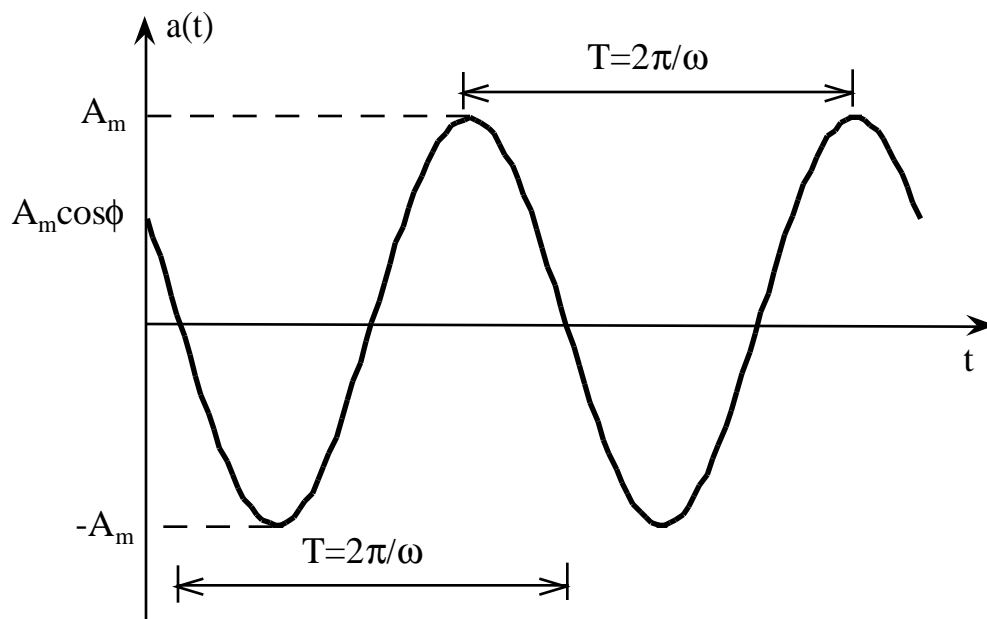
$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) = A_m \cos(2\pi f t + \phi), \quad (4)$$

dove l'ampiezza massima  $A_m$ , la fase “iniziale”  $\phi$  e la pulsazione  $\omega$  sono grandezze costanti reali (la fase dipende dal riferimento scelto per la variabile temporale). La pulsazione  $\omega$  è misurata nel Sistema Internazionale in *rad/s* e la frequenza  $f$  in Hz (*hertz*):  $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$ . L'andamento grafico di questa funzione è riportato in Figura 6.4. L'ampiezza massima  $A_m$  è una grandezza definita positiva. La funzione (4) è una funzione periodica con periodo

$$T = 2\pi/\omega. \quad (5)$$

Infatti si ha

$$a(t + T) = A_m \cos[\omega(t + T) + \phi] = A_m \cos(\omega t + \phi) = a(t). \quad (6)$$



**Fig. 6.4** Funzione sinusoidale di pulsazione  $\omega$ .

Posto  $\phi = \phi - \pi/2$ , è immediato verificare che

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi - \pi/2) = A_m \sin(\omega t + \phi); \quad (7)$$

inoltre, posto  $\phi = \chi + \pi$  si ha anche

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \chi + \pi) = -A_m \cos(\omega t + \chi). \quad (8)$$

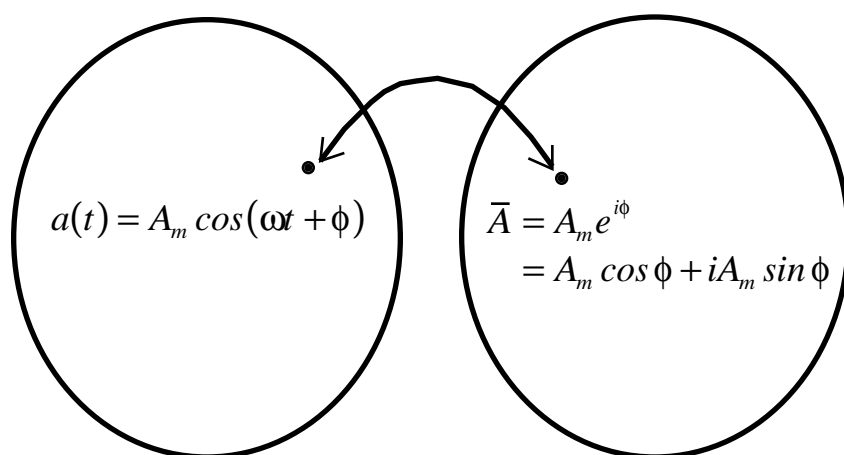
### Osservazione

Per  $\omega \rightarrow 0$  il periodo di  $a(t)$  tende all'infinito, quindi la funzione sinusoidale tende a una funzione costante. Infatti, per  $\omega = 0$  si ha

$$a(t) = A_m \cos \phi = \text{costante}. \quad (9)$$

Quindi, il regime stazionario può essere considerato come il limite per  $\omega \rightarrow 0$  di un regime sinusoidale con  $\phi \neq \pi/2$ .

◆



**Fig. 6.5** *Corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle funzioni sinusoidali a pulsazione  $\omega$  e l'insieme dei numeri complessi.*

Una volta che è stata fissata la pulsazione  $\omega$  (che, ricordiamo, è imposta dai generatori), ogni tensione e ogni corrente sinusoidale è caratterizzata, quindi, da due e solo due grandezze, l'ampiezza massima  $A_m$  e la fase iniziale  $\phi$ . Per questo motivo alla funzione sinusoidale (4) è possibile associare un numero complesso  $\bar{A}$  (nell'**Appendice A4** di questo Capitolo trovate un breve richiamo sui numeri complessi) secondo la regola:

$$\bar{A} = A_m e^{i\phi} = A_m \cos \phi + i A_m \sin \phi. \quad (10)$$

Al numero complesso  $\bar{A}$  si dà il nome di *fasore rappresentativo* della funzione sinusoidale  $a = a(t)$ .

### Osservazione

Ricordiamo che la funzione complessa  $e^{i\phi}$  di variabile reale  $\phi$  può essere sempre espressa come (formula di Eulero)

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi. \quad (11)$$

Per  $\phi = 0$  e  $\phi = \pm 2\pi$  si ha  $e^{i\phi} = 1$ , per  $\phi = \pm \pi$  si ha  $e^{i\phi} = -1$ , per  $\phi = \pm \pi/2$  si ha  $e^{i\phi} = \pm i$ , mentre per  $\phi = \pm 2\pi/3$  si ha  $e^{i\phi} = mi$ . Per gli altri valori di  $\phi$  sia la parte reale che la parte immaginaria di  $e^{i\phi}$  sono diverse da zero.

◆

Il fatto importante è che la regola (10) produce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle funzioni sinusoidali di pulsazione assegnata  $\omega$ ,  $\{a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi)\}^1$  e l'insieme dei fasori rappresentativi  $\{\bar{A} = A_m e^{i\phi}\}$ . Infatti, in base alla regola (10) la funzione sinusoidale  $a(t)$  definisce univocamente il fasore rappresentativo  $\bar{A}$ . D'altra parte, in base alla stessa regola, a ciascun numero complesso  $\bar{A}$  è possibile associare univocamente una funzione sinusoidale  $a(t)$ . Questa corrispondenza biunivoca può essere indicata formalmente attraverso l'espressione

$$\{a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi)\} \Leftrightarrow \{\bar{A} = A_m e^{i\phi}\}, \quad (12)$$

e rappresentata simbolicamente come riportato in Figura 6.6.

Tutte le correnti e tensioni di un circuito in regime sinusoidale possono essere rappresentate tramite i fasori. Si dimostrerà che l'analisi del circuito si può, allora, ricondurre alla risoluzione di sole equazioni algebriche lineari (e non più equazioni

<sup>1</sup> Qui, il simbolo  $\{\cdot\}$  indica un insieme.

algebriche e differenziali lineari), a coefficienti complessi in cui le incognite sono proprio i fasori rappresentativi (quindi numeri complessi e non funzioni del tempo). Una volta determinati i fasori rappresentativi, attraverso la (12) si determinano le corrispondenti funzioni sinusoidali nel dominio del tempo, che descrivono l'andamento delle correnti e delle tensioni. Questo è il *metodo dei fasori* detto, anche, *metodo simbolico*.

### Osservazione

La relazione che fa corrispondere al fasore  $\bar{A}$  la funzione sinusoidale  $a(t)$  di pulsazione  $\omega$  che esso rappresenta può essere espressa come

$$\operatorname{Re}\{\bar{A}e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{A_m e^{i(\omega t + \phi)}\} = A_m \cos(\omega t + \phi) = a(t). \quad (13)$$

È evidente che  $a(t) = \operatorname{Re}\{\bar{A}e^{i\omega t}\} = 0$  (per ogni  $t$ ) implica  $\bar{A} = \bar{0}$  e viceversa.



Il metodo dei fasori che svilupperemo nel prossimo paragrafo si basa sulle seguenti proprietà.

#### 6.3.1 Proprietà di unicità

Due funzioni sinusoidali  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi)$  e  $b(t) = B_m \cos(\omega t + \varphi)$  sono uguali se e solo se sono uguali i corrispondenti fasori rappresentativi  $\bar{A} = A_m e^{i\phi}$  e  $\bar{B} = B_m e^{i\varphi}$ ,

$$a(t) = b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A} = \bar{B}. \quad (14)$$

Questa proprietà è una immediata conseguenza del fatto che la regola che associa alla funzione sinusoidale il fasore rappresentativo dà luogo a una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle funzioni sinusoidali a pulsazione  $\omega$  e l'insieme dei numeri complessi.

### 6.3.2 Proprietà di linearità

Si consideri la funzione sinusoidale

$$c(t) = \alpha a(t) + \beta b(t), \quad (15)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono coefficienti costanti reali. Essa è combinazione lineare delle funzioni sinusoidali  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi)$  e  $b(t) = B_m \cos(\omega t + \phi)$ . Il fasore  $\bar{C}$  rappresentativo della funzione sinusoidale  $c(t)$  è uguale alla stessa combinazione lineare dei fasori  $\bar{A} = A_m e^{i\phi}$ ,  $\bar{B} = B_m e^{i\phi}$  rappresentativi, rispettivamente, delle rispettive funzioni sinusoidali  $a(t)$  e  $b(t)$ ,

$$\bar{C} = \alpha \bar{A} + \beta \bar{B}. \quad (16)$$

Questa proprietà è una immediata conseguenza del fatto che  $\alpha_1 \operatorname{Re}\{\bar{A}_1 e^{i\omega t}\} + \alpha_2 \operatorname{Re}\{\bar{A}_2 e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{(\alpha_1 \bar{A}_1 + \alpha_2 \bar{A}_2) e^{i\omega t}\}$ , se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono numeri reali.

Una corrispondenza biunivoca, per la quale vale la proprietà di linearità, prende il nome di *isomorfismo lineare*.

### 6.3.3 Regola di derivazione

La derivata prima della funzione sinusoidale  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi)$ ,

$$b(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt} [A_m \cos(\omega t + \phi)], \quad (17)$$

è anche essa una funzione sinusoidale con pulsazione  $\omega$ ,

$$b(t) = \frac{d}{dt} [A_m \cos(\omega t + \phi)] = -\omega A_m \sin(\omega t + \phi) = \omega A_m \cos(\omega t + \phi + \pi/2). \quad (18)$$

Sia  $\bar{A} = A_m e^{i\phi}$  è il fasore rappresentativo della funzione sinusoidale  $a(t)$ . Allora, il fasore rappresentativo della derivata prima di  $a(t)$ ,  $\bar{B}$ , è dato da

$$\bar{B} = i\omega \bar{A} = \omega A_m e^{i(\phi + \pi/2)}. \quad (19)$$

## 6.4 Analisi dei circuiti in regime sinusoidale tramite il metodo dei fasori

Si consideri, ora, un circuito lineare tempo invariante, costituito da resistori, condensatori, induttori e generatori ideali (indipendenti) sinusoidali di tensione e/o di corrente, tutti con la stessa pulsazione  $\omega$  (la stessa frequenza  $f = \omega/2\pi$ ) e si assuma che esso sia in regime sinusoidale (il transitorio si è estinto); lo si indichi con il simbolo  $N_\omega$ . Tutte le tensioni e tutte le intensità di corrente del circuito sono funzioni sinusoidali del tempo con la stessa pulsazione  $\omega$  (quella imposta dai generatori ideali).

Il resto di questo Capitolo, ad eccezione degli ultimi due paragrafi, è dedicato allo studio dei circuiti in regime sinusoidale. Negli ultimi due paragrafi considereremo circuiti in regime periodico e circuiti in regime non periodico.

### 6.4.1 Metodo dei fasori

Siano  $n$  i nodi e  $l$  i lati del circuito in esame. Le intensità di corrente e le tensioni del circuito sono funzioni sinusoidali del tempo

$$i_h(t) = I_{mh} \cos(\omega t + \phi_h) \quad h = 1, 2, \dots, l, \quad (20)$$

$$v_h(t) = V_{mh} \cos(\omega t + \varphi_h) \quad h = 1, 2, \dots, l. \quad (21)$$

Siano ( $h = 1, 2, \dots, l$ )

$$\bar{I}_h = I_{mh} e^{i\phi_h}, \quad (22)$$

$$\bar{V}_h = V_{mh} e^{i\varphi_h}, \quad (23)$$

i fasori rappresentativi delle correnti e delle tensioni, rispettivamente: essi rappresentano le intensità di corrente e le tensioni del circuito nel dominio dei fasori.

### Osservazione

Il modulo e, quindi, la parte reale e la parte immaginaria dei fasori rappresentativi delle correnti sono omogenei dimensionalmente a una corrente e, quindi, si misurano in *ampere*; il modulo e, quindi, la parte reale e la parte immaginaria dei fasori rappresentativi delle tensioni sono omogenei dimensionalmente a una tensione e quindi si misurano in *volt*.



È possibile riformulare le equazioni circuitali in modo tale che le incognite siano direttamente i fasori rappresentativi ? Se sì, quali sono queste equazioni ?

Si considerino, in primo luogo, le equazioni che esprimono le leggi di Kirchhoff. Esse sono (nel dominio del tempo):

$$\sum_h (\pm) i_h(t) = 0 \text{ per ogni nodo, ovvero } \mathbf{A}_a \mathbf{i}(t) = \mathbf{0}, \quad (24)$$

$$\sum_k (\pm) v_k(t) = 0 \text{ per ogni maglia, ovvero } \mathbf{B}_a \mathbf{v}(t) = \mathbf{0}. \quad (25)$$

Ricordiamo che  $\mathbf{A}_a$  è la matrice di incidenza del circuito,  $\mathbf{B}_a$  è la matrice delle maglie del circuito,  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_l)^T$  è il vettore rappresentativo delle intensità di corrente del circuito e  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_b)^T$  è il vettore rappresentativo delle tensioni.

Utilizzando la proprietà di linearità (15), dalle (24) e (25) si ottengono le corrispondenti equazioni nel dominio dei fasori:

$$\sum_h (\pm) \bar{i}_h = \bar{0} \text{ per ogni nodo, ovvero } \mathbf{A}_a \bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{0}}, \quad (26)$$

$$\sum_k (\pm) \bar{v}_k = \bar{0} \text{ per ogni maglia, ovvero } \mathbf{B}_a \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (27)$$

$\bar{\mathbf{i}} = (\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_l)^T$  è un vettore con  $l$  componenti complesse rappresentativo dei fasori delle intensità di corrente e  $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_b)^T$  è un vettore con  $l$  componenti

complesse rappresentativo dei fasori delle tensioni. È evidente, anche, che imporre che i fasori rappresentativi delle intensità di corrente e delle tensioni verifichino le equazioni (26) e (27) equivale ad imporre che le intensità di corrente e le tensioni nel dominio del tempo verifichino, rispettivamente, le equazioni di Kirchhoff per le correnti (24) e le equazioni di Kirchhoff per le tensioni (25).

Abbiamo ottenuto un risultato molto importante: anche i fasori rappresentativi delle intensità di corrente e delle tensioni di un circuito in regime sinusoidale verificano le equazioni di Kirchhoff.

Si considerino ora le equazioni caratteristiche degli elementi costituenti il circuito. Solo per non appesantire la trattazione si assuma che il circuito sia costituito di soli bipoli; ovviamente il metodo fasoriale vale anche per i circuiti costituiti di elementi lineari a più terminali, come i trasformatori ideali, i generatori controllati, gli amplificatori operazionali (modello lineare), i giratori e gli induttori accoppiati.

Le equazioni costitutive dei bipoli lineari e tempo-invarianti sono:

$$\begin{aligned} v_k(t) - Ri_k(t) &= 0 && \text{resistori,} \\ C \frac{dv_k}{dt} - i_k(t) &= 0 && \text{condensatori,} \\ v_k(t) - L \frac{di_k}{dt} &= 0 && \text{induttori,} \end{aligned} \quad (28)$$

e quelle dei generatori ideali (indipendenti) sono:

$$\begin{aligned} v_k(t) &= E_{mk} \cos(\omega t + \alpha_k) && \text{generatore ideale di tensione} \\ i_h(t) &= J_{mh} \cos(\omega t + \beta_h) && \text{generatore ideale di corrente.} \end{aligned} \quad (29)$$

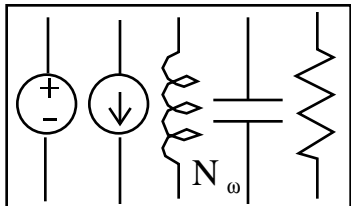
Applicando le proprietà dei fasori, in particolare, la proprietà di linearità e la regola di derivazione, dalle relazioni caratteristiche (28) e (29) si ottengono ulteriori equazioni (tante quanti sono i bipoli) per i fasori rappresentativi delle correnti e delle tensioni. Per i bipoli lineari e tempo-invarianti esse sono

$$\begin{aligned}
\bar{V}_k - R \bar{I}_k &= 0 && \text{resistori,} \\
i \omega C \bar{V}_k - \bar{I}_k &= 0 && \text{condensatori,} \\
\bar{V}_k - i \omega L \bar{I}_k &= 0 && \text{induttori,}
\end{aligned} \tag{30}$$

e per i generatori ideali (indipendenti) esse sono

$$\begin{aligned}
\bar{V}_k &= \bar{E} = E_{mk} e^{i \alpha_k} && \text{generatore ideale di tensione simbolico,} \\
\bar{I}_h &= \bar{J} = J_{mh} e^{i \beta_h} && \text{generatore ideale di corrente simbolico.}
\end{aligned} \tag{31}$$

Per converso, le (30) e (31) implicano, grazie alla proprietà di unicità e alla regola di derivazione, rispettivamente, le (28) e (29).

<p><i>do min io del tempo</i></p> $\mathbf{i}(t) =  v_1(t), \dots, v_l(t) ^T$ $\mathbf{v}(t) =  v_1(t), \dots, v_l(t) ^T$		<p><i>do min io simbolico</i></p> $\bar{\mathbf{I}} =  \bar{I}_1, \dots, \bar{I}_b ^T$ $\bar{\mathbf{V}} =  \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_b ^T$
$\begin{cases} \mathbf{A}_a \mathbf{i}(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_a \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \end{cases}$	<p><i>equazioni di Kirchhoff</i></p> $\Leftrightarrow$	$\begin{cases} \mathbf{A}_a \bar{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_a \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \end{cases}$
$\begin{cases} v_k - R_k i_k = 0 \\ C_k dv_k / dt - i_k = 0 \\ v_k - L_k di_k / dt = 0 \end{cases}$	<p><i>equazioni caratteristiche bipoli lineari tempo-invarianti</i></p> $\Leftrightarrow$	$\begin{cases} \bar{V}_k - R_k \bar{I}_k = 0 \\ (i \omega C_k) \bar{V}_k - \bar{I}_k = 0 \\ \bar{V}_k - (i \omega L_k) \bar{I}_k = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} v_k = e_k(t) = E_{mk} \cos(\omega t + \alpha_k) \\ i_h = j_h(t) = J_{mh} \cos(\omega t + \beta_h) \end{cases}$	<p><i>equazioni caratteristiche generatori ideali</i></p> $\Leftrightarrow$	$\begin{cases} \bar{V}_k = \bar{E}_k = E_{mk} e^{i \alpha_k} \\ \bar{I}_h = \bar{J}_h = J_{mh} e^{i \beta_h} \end{cases}$

**Tab. 6.2** Formulazione delle equazioni di un circuito lineare, tempo-invariante in regime sinusoidale tramite i fasori.

A questo punto possiamo riassumere attraverso il quadro descritto in Tabella 6.2. In questa tabella sono riportate le equazioni circuitali nel *dominio del tempo* e nel *dominio simbolico*. Il simbolo  $\Leftrightarrow$  sta a indicare che le equazioni nel dominio del tempo implicano quelle nel dominio simbolico e viceversa.

Le equazioni circuitali corrispondenti nel dominio dei fasori sono equazioni algebriche lineari. È evidente, allora, che conviene trasformare le equazioni circuitali del dominio del tempo, che sono algebriche lineari e differenziali lineari, nelle corrispondenti del dominio simbolico, che sono tutte algebriche lineari, risolverle e ricostruire, poi, la soluzione nel dominio del tempo attraverso la (13). La proprietà di unicità assicura che questa procedura fornisce la soluzione del problema originale.

### 6.4.2 Circuiti di impedenze

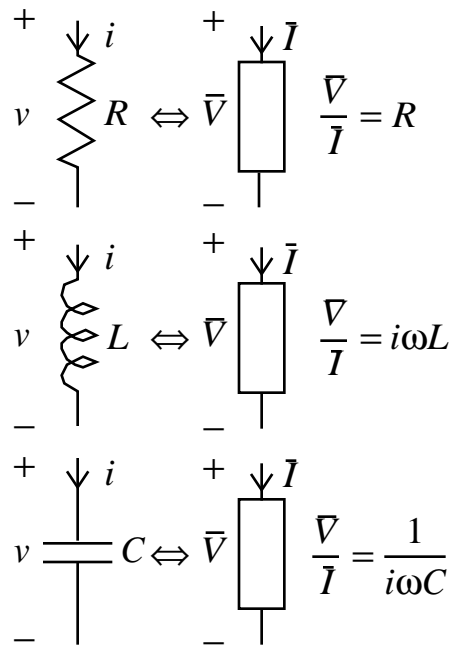
Le equazioni circuitali nel dominio simbolico di un circuito in regime sinusoidale sono analoghe a quelle di un circuito resistivo lineare. In particolare, si osservi che, nel dominio simbolico le equazioni caratteristiche dei bipoli lineari elementari sono tutte dello stesso tipo, cioè equazioni algebriche lineari riconducibili alla forma (vedi Figura 6.6)

$$\bar{V} = \bar{Z}\bar{I}. \quad (32)$$

La grandezza  $\bar{Z}$ , in generale complessa, è indipendente dai fasori rappresentativi dell'intensità di corrente e della tensione. Essa prende il nome di *impedenza* del bipolo. Le espressioni delle impedenze dei bipoli elementari sono:

$$\bar{Z} = \begin{cases} R & \text{resistore di resistenza } R, \\ \frac{1}{i\omega C} & \text{condensatore di capacità } C, \\ i\omega L & \text{induttore di induttanza } L. \end{cases} \quad (33)$$

La parte reale, la parte immaginaria e il modulo delle impedenze sono grandezze omogenee dimensionalmente con una resistenza e quindi si misurano in *ohm*.



**Figura 6.6** Impedenze dei bipoli lineari tempo invarianti elementari.

### Osservazione

I fasori sono numeri complessi che rappresentano le intensità di corrente e tensioni sinusoidali con una pulsazione assegnata. Le impedenze, invece, pur essendo numeri complessi, rappresentano le relazioni tra i fasori rappresentativi delle intensità di corrente e delle tensioni dei bipoli. Questa è la ragione per la quale alle impedenza si dà anche il nome di *operatori di impedenza*.

◆

L' inverso dell'impedenza

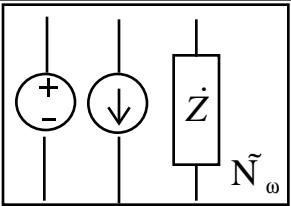
$$\dot{Y} = 1/\dot{Z} \quad (34)$$

prende il nome di *ammettenza* del bipolo. Si noti che sia l'impedenza che l'ammettenza dipendono, in generale, dalla pulsazione  $\omega$ .

Le equazioni circuitali nel dominio simbolico possono essere interpretate come le equazioni di un circuito ausiliario di natura “simbolica” così definito:

- il grafo del circuito simbolico coincide con il grafo del circuito in regime sinusoidale in esame;
- a ogni bipolo lineare elementare corrisponde un “bipolo simbolico” con impedenza corrispondente definita in base alle (33);
- a ogni generatore di tensione indipendente sinusoidale con tensione  $e_k(t)$  corrisponde un “generatore di tensione simbolico” indipendente, con fasore  $\bar{E}_k$ , e a ogni generatore di corrente indipendente sinusoidale con corrente  $j_h(t)$  corrisponde un “generatore di corrente simbolico” indipendente, con fasore  $\bar{J}_h$ .

Il circuito “simbolico”  $\tilde{N}_\omega$  così definito prende il nome di *circuito di impedenze*. Le equazioni del circuito di impedenze sono riassunte in Tabella 6.3. Esso può essere inteso come il corrispondente nel dominio dei fasori del circuito in regime sinusoidale in esame nel dominio del tempo.

		
$\begin{cases} \mathbf{A}_a \bar{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_a \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \end{cases}$	equazioni di Kirchhoff	
$\bar{\mathbf{V}}_k - \dot{\mathbf{Z}}_k \bar{\mathbf{I}}_k = \mathbf{0}$	equazioni caratteristiche impedenze operatoriali	$\dot{\mathbf{Z}}_k(i\omega) = \begin{cases} R & \text{resistore} \\ -i/(\omega C) & \text{condensatore} \\ i\omega L & \text{induttore} \end{cases}$
$\begin{cases} \bar{\mathbf{V}}_k = \bar{\mathbf{E}}_k \\ \bar{\mathbf{I}}_h = \bar{\mathbf{J}}_h \end{cases}$	equazioni caratteristiche generatori indipendenti	

**Tab. 6.3**      *Circuiti di impedenze.*

Il modello matematico dei circuiti di impedenze è analogo a quello dei circuiti di soli resistori lineari e generatori indipendenti (circuiti resistivi lineari). Di conseguenza, per i circuiti di impedenze valgono tutte le proprietà dei circuiti resistivi lineari, ad eccezione della proprietà di non amplificazione, come poi verificheremo. In particolare, le equazioni di Kirchhoff per i fasori non sono tutte linearmente indipendenti: per costruire un insieme massimale di equazioni di linearmente indipendenti si procede come nel dominio del tempo (il grafo del circuito di impedenze coincide con il grafo del circuito in esame nel dominio del tempo). Inoltre, un circuito di impedenze può essere risolto utilizzando le metodologie descritte nei Capitoli 2 e 3, come, ad esempio, le tecniche di riduzione attraverso le equivalenze, le regole dei partitori, la trasformazione stella-triangolo, la sovrapposizione degli effetti, il teorema di Thévenin-Norton.

#### **Procedura per la soluzione di un circuito $N_\omega$ in regime sinusoidale**

- (a) si costruisca la rete di impedenze  $\tilde{N}_\omega$  corrispondente;
- (b) si risolva la rete di impedenze  $\tilde{N}_\omega$ : siano  $\bar{I}_k, \bar{V}_k, k = 1, 2, \dots, l$ , i fasori delle correnti e delle tensioni;
- (c) la soluzione della rete  $N_\omega$  in regime sinusoidale è data nel dominio del tempo da

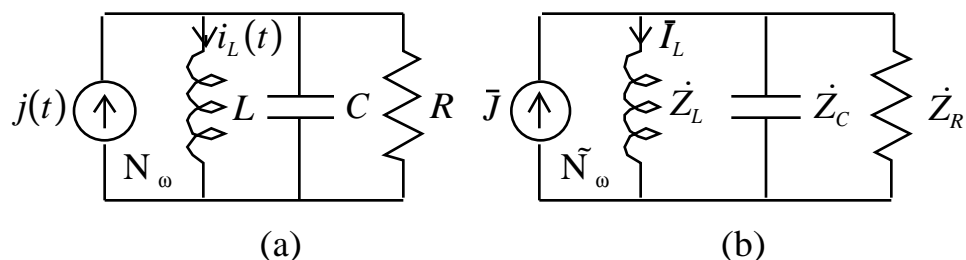
$$i_k(t) = \operatorname{Re}\{\bar{I}_k e^{i\omega t}\}, v_k(t) = \operatorname{Re}\{\bar{V}_k e^{i\omega t}\}.$$

Ora illustreremo questa procedura attraverso un esempio.

#### **Esercizio**

Si consideri il circuito in regime sinusoidale rappresentato in Figura 6.7a;  $j(t) = J_m \sin(\omega t)$ . I dati del problema sono riportati in Tabella 6.4.

Applicheremo il metodo simbolico per determinare l'intensità della corrente  $i_L(t)$  che attraversa l'induttore.



**Fig. 6.7** Rete in regime sinusoidale (a) e rete di impedenze corrispondente (b).

$R = 2 \, \Omega$	$L = 2 \, \text{mH}$	$C = 0,25 \, \text{mF}$	$J_m = 2 \, \text{A}$	$\omega = 10^3 \, \text{rad/s}$
-------------------	----------------------	-------------------------	-----------------------	---------------------------------

**Tab. 6.4** Parametri del circuito riportato in Fig. 6.7.

Si costruisca la rete di impedenze  $\tilde{N}_\omega$  corrispondente (Figura 6.7b), operando nel seguente modo:

- (i)  $\tilde{N}_\omega$  ha lo stesso grafo orientato del circuito in regime sinusoidale in esame;
- (ii) ad ogni bipolo lineare della rete in regime sinusoidale corrisponde una impedenza secondo la Tabella 6.3;
- (iii) al generatore indipendente di corrente corrisponde il generatore simbolico di corrente caratterizzato dal fasore rappresentativo della corrente.

Il fasore  $\bar{J}$  rappresentativo della  $j(t)$  è  $\bar{J} = 2e^{-i\pi/2} = -2i$ : l'ampiezza massima della funzione sinusoidale  $j(t)$  è 2, e la fase è uguale a  $-\pi/2$  perché  $j(t) = J_m \sin(\omega t) = J_m \cos(\omega t - \pi/2)$ .

Le espressioni delle impedenze  $\dot{Z}_R$ ,  $\dot{Z}_L$ ,  $\dot{Z}_C$ , rappresentative, rispettivamente, del resistore, dell'induttore e del condensatore sono date da  $\dot{Z}_R = 2$ ,  $\dot{Z}_L = 2i$ ,  $\dot{Z}_C = -4i$ .

Dopo avere costruito la rete di impedenze, bisogna risolverla. Siccome interessa calcolare l'intensità della corrente  $i_L(t)$  che attraversa l'induttore, basta determinare il fasore  $\bar{I}_L$ , che rappresenta l'intensità delle corrente simbolica che "attraversa" l'impedenza  $\dot{Z}_L$ .

La rete di impedenze è descritta da un modello matematico identico a quello delle reti di soli resistori (lineari) e generatori indipendenti. Quindi può essere risolta utilizzando le stesse metodologie. Siccome le tre impedenze  $\dot{Z}_R$ ,  $\dot{Z}_L$ ,  $\dot{Z}_C$  sono in

parallelo con il generatore di corrente simbolico  $\bar{J}$ , la corrente  $\bar{I}_L$  può essere determinata applicando la regola del partitore di corrente al circuito simbolico  $\tilde{N}_\omega$ . Operando in questo modo si ottiene

$$\bar{I}_L = \bar{J} \frac{\dot{Z}_{eq}}{\dot{Z}_{eq} + \dot{Z}_L}, \quad (35)$$

dove  $\dot{Z}_{eq}$  è l'impedenza equivalente del parallelo costituito da  $\dot{Z}_R$  e  $\dot{Z}_C$ ; essa vale

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_R \dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = -\frac{8i}{2-4i} = \frac{8-4i}{5} = \frac{4}{\sqrt{5}} e^{-i \arctan(0.5)}. \quad (36)$$

Pertanto si ha (tutte i calcoli sono stati svolti troncando dopo le prime due cifre significative)

$$\bar{I}_L = \bar{J} \frac{\dot{Z}_{eq}}{\dot{Z}_{eq} + \dot{Z}_L} = -2i \frac{1.79e^{-i0.46}}{\frac{8-4i}{5} + 2i} = \frac{3.58e^{-i2.03}}{2e^{i0.64}} = 1.79e^{-i2.67}. \quad (37)$$

Dopo avere risolto il circuito di impedenze (in questo caso è stato calcolato il fasore rappresentativo della corrente  $i_L(t)$ ) bisogna costruire la funzione reale corrispondente nel dominio del tempo attraverso la (13). La proprietà di unicità assicura che la procedura fornisce proprio la soluzione del problema originale. Applicando la (13) si ottiene l'intensità di corrente nel dominio del tempo  $i_L(t)$ ,

$$\bar{I}_L = 1.79e^{-i2.67} \Rightarrow i_L(t) = 1.79 \cos(1000t - 2.67). \quad (38)$$

Operando in questo modo è possibile determinare tutte le altre grandezze. Il lettore determini la corrente nel resistore e la tensione sul condensatore.

◆

### Osservazione

Se nel circuito in regime sinusoidale ci sono anche elementi lineari e tempo invarianti a più terminali, come, ad esempio, trasformatori ideali, generatori controllati, giratori, induttori accoppiati, il metodo simbolico, che è stato appena illustrato, resta ancora valido. Le equazioni caratteristiche nel dominio simbolico degli elementi dinamici sono le stesse equazioni che si hanno nel dominio del tempo.

Le equazioni caratteristiche degli elementi dinamici bisogna ricavarle applicando la regola della derivazione. Ad esempio, le equazioni caratteristiche nel dominio simbolico del doppio bipolo che descrive due circuiti accoppiati (trasformatore) sono:

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= i\omega L_1 \bar{I}_1 + i\omega M \bar{I}_2, \\ \bar{V}_2 &= i\omega M \bar{I}_1 + i\omega L_2 \bar{I}_2,\end{aligned}\tag{39}$$

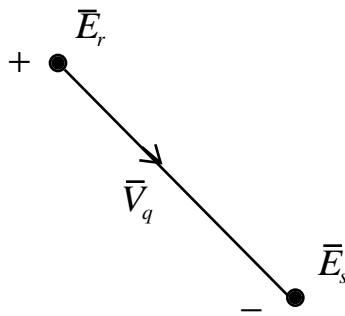
dove  $L_1$ ,  $L_2$  e  $M$  sono, rispettivamente, i coefficienti di autoinduzione del circuito “1”, del circuito “2” e il coefficiente di mutua induzione.



## 6.5 Metodo dei potenziali di nodo e delle correnti di maglia

I fasori rappresentativi delle tensioni verificano le equazioni di Kirchhoff per le tensioni, e quindi è possibile rappresentare il fasore rappresentativo della tensione del generico lato (bipolo o porta) come differenza dei fasori rappresentativi dei potenziali dei due nodi a cui il lato è connesso, Figura 6.8,

$$\bar{V}_q = \bar{E}_r - \bar{E}_s.\tag{40}$$



**Fig. 6.8** *Potenziali di nodo nel dominio simbolico.*

Pertanto si ha

$$\mathbf{B}_a \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{E}}, \quad (41)$$

dove  $\bar{\mathbf{E}}$  è il vettore colonna complesso  $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{n-1})^T$  ed  $\bar{E}_k$  è il fasore rappresentativo del potenziale sinusoidale  $e_k(t)$  del  $k$ -esimo nodo ( $n$  sono i nodi del circuito e si è posto  $\bar{E}_n = 0$ );  $\mathbf{A}$  è la matrice di incidenza ridotta del circuito in esame.

I fasori rappresentativi delle intensità di corrente verificano le equazioni di Kirchhoff per le correnti, e quindi è possibile rappresentare il fasore della intensità di corrente del generico lato (bipolo o porta) come somma algebrica dei fasori rappresentativi delle intensità di correnti di maglia che attraversano quel lato, come nel dominio del tempo (vedi § 2.11.2)

$$\bar{I}_k = \sum_h (\pm) \bar{J}_h. \quad (42)$$

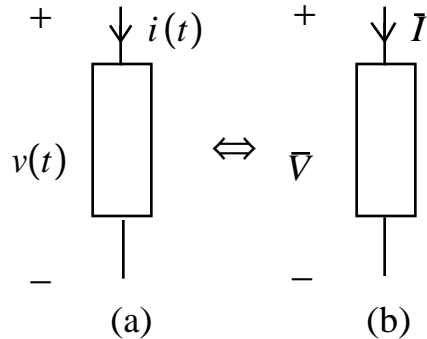
Pertanto si ha

$$\mathbf{A}_a \bar{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{I}} = \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{J}}, \quad (43)$$

dove  $\bar{\mathbf{J}}$  è il vettore colonna complesso  $(\bar{J}_1, \bar{J}_2, \dots, \bar{J}_{b-(n-1)})^T$  ed  $\bar{J}_k$  è il fasore rappresentativo della corrente di maglia della  $k$ -esima maglia fondamentale (le maglie fondamentali sono  $l - (n - 1)$ );  $\mathbf{B}$  è la matrice di un insieme di maglie fondamentali del circuito in esame.

## 6.6 Potenza ed energia in regime sinusoidale

Si consideri una circuito in regime sinusoidale. Le espressioni dell'intensità di corrente e della tensione del generico bipolo del circuito in esame sono  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha)$  e  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \beta)$ , rispettivamente, e i loro versi di riferimento sono scelti in accordo alla convenzione dell'utilizzatore, Figura 6.9.



**Fig. 6.9** Bipolo in regime sinusoidale: (a) dominio del tempo, (b) dominio della frequenza.

### 6.6.1 Potenza elettrica istantanea in regime sinusoidale

La potenza elettrica istantanea assorbita da un generico bipolo del circuito è

$$p(t) = v(t)i(t) = I_m V_m \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta). \quad (43)$$

Applicando l'identità

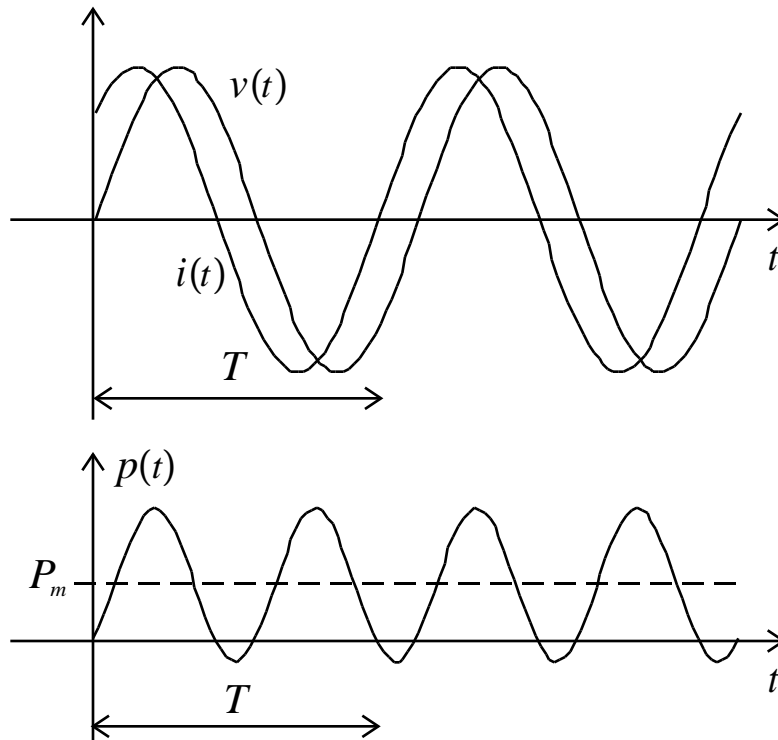
$$2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y). \quad (44)$$

si ottiene:

$$p(t) = \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\beta - \alpha) + \frac{1}{2} I_m V_m \cos(2\omega t + \alpha + \beta). \quad (45)$$

Dunque, la potenza elettrica istantanea assorbita da un generico bipolo di una rete in regime sinusoidale è la somma di un termine sinusoidale a pulsazione  $2\omega$  e un

termine costante, quindi è una funzione periodica di periodo  $T/2$ . Essa oscilla due volte nel periodo  $T = 2\pi/\omega$ , Figura 6.10.



**Fig. 6.10** Andamento temporale della potenza istantanea assorbita da un bipolo in regime sinusoidale.

### 6.6.2 Potenza elettrica media ed energia

Il valore medio della potenza  $p(t)$  sul periodo  $T$ , o *potenza media*, è definito come

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(\tau) d\tau. \quad (46)$$

Sostituendo l'espressione (45) nella (46) si ottiene

$$P_{av} = \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\beta - \alpha). \quad (47)$$

La potenza media è uguale al termine costante della potenza istantanea, data dall'espressione (45). Il valore medio sul periodo  $T$  del termine fluttuante della potenza istantanea è uguale a zero perché esso è una funzione sinusoidale di periodo  $T/2$ . L'unità di misura nel SI della potenza elettrica media è la stessa unità di misura della potenza istantanea, cioè il *watt*.

### Osservazione

La potenza media dipende non solo dalle ampiezze massime della tensione e dell'intensità di corrente, ma anche dalla differenza delle loro fasi  $(\beta - \alpha)$ , attraverso il fattore  $\cos(\beta - \alpha)$ . Nell'ingegneria dei sistemi di potenza a questo fattore si dà il nome di *fattore di potenza*. Come tra poco vedremo, il fattore  $\cos(\beta - \alpha)$ , ad eccezione dei generatori ideali, dipende solo dalla costituzione fisica del bipolo.



L'energia assorbita dal bipolo in regime sinusoidale nell'intervallo di tempo  $(0, \hat{t})$  è data da

$$w(0, \hat{t}) = \int_0^{\hat{t}} p(\tau) d\tau = (nT)P_{av} + \int_{nT}^{nT+\Delta t} p(\tau) d\tau. \quad (47)$$

dove l'intero  $n$  è tale che  $\hat{t} = nT + \Delta t$ , con  $\Delta t < T$ :  $n$  è il numero di periodi  $T$  contenuti nell'intervallo di tempo  $(0, \hat{t})$ . Se  $n \gg 1$  il contributo dovuto all'energia assorbita nell'intervallo di tempo  $(nT, nT + \Delta t)$  è trascurabile rispetto a  $(nT)P_{av}$ . Allora abbiamo

$$w(0, \hat{t}) \cong (nT)P_{av} \cong \hat{t} P_{av}. \quad (48)$$

### Osservazione

Nei sistemi elettrici di potenza, per la produzione e distribuzione dell'energia elettrica, operanti in regime sinusoidale (a frequenza di 50 Hz in Europa e 60 Hz

nell'America) si usa come unità di misura per l'energia elettrica il *chilowattora* (KWh): 1 KWh è l'energia elettrica assorbita (erogata) nell'intervallo di un'ora da un bipolo operante in regime sinusoidale quando assorbe (eroga) 1 KW di potenza media; è immediato che  $1 \text{ kWh} = 3,6 \text{ MJ}$ . Il chilowattora è l'unità di misura utilizzata nelle tariffe dell'energia elettrica.



### 6.6.3 Potenza elettrica complessa, potenza reattiva, potenza apparente

I fasori rappresentativi dell'intensità di corrente e della tensione del bipolo sono, rispettivamente,

$$\bar{I} = I_m e^{i\alpha}, \quad (49)$$

$$\bar{V} = V_m e^{i\beta}. \quad (50)$$

È evidente, allora, che la potenza media  $P_m$ , data dall'espressione (46), può essere espressa direttamente in funzione dei fasori rappresentativi della tensione e dell'intensità di corrente del bipolo.

Si introduca la *potenza elettrica complessa assorbita dal bipolo* definita come

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^*. \quad (51)$$

Il simbolo  $\bar{I}^*$  indica che si considera il numero complesso coniugato del numero complesso  $\bar{I}$ : se  $\bar{I} = a + ib = I_m e^{i\alpha}$ , allora  $\bar{I}^* = a - ib = I_m e^{-i\alpha}$  (vedi **Appendice A4**). Sostituendo nella (51) le espressioni (49) e (50) abbiamo:

$$\hat{P} = \frac{1}{2} I_m V_m e^{i(\beta - \alpha)} = \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\beta - \alpha) + i \frac{1}{2} I_m V_m \sin(\beta - \alpha) = P + iQ, \quad (52)$$

avendo posto

$$P = \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\beta - \alpha), \quad (53)$$

$$Q = \frac{1}{2} I_m V_m \sin(\beta - \alpha). \quad (54)$$

La parte reale  $P$  della potenza complessa, che spesso gli ingegneri dei sistemi di potenza chiamano *potenza attiva*, è uguale alla potenza elettrica media assorbita dal bipolo,

$$P_{av} = \operatorname{Re}\{\hat{P}\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2} \bar{V}\bar{I}^*\right\}. \quad (55)$$

Allora, possiamo calcolare la potenza media assorbita da un bipolo direttamente nel dominio dei fasori attraverso la relazione (55).

La parte immaginaria  $Q$  della potenza complessa prende il nome di *potenza reattiva*. La potenza reattiva, a differenza della potenza media (potenza attiva), non ha nessun significato fisico.

Al modulo della potenza complessa si dà il nome di *potenza apparente*,  $A = |\hat{P}|$ .

La potenza apparente è data da

$$A = \frac{1}{2} V_m I_m = \sqrt{P_{av}^2 + Q^2}. \quad (56)$$

La potenza media e la potenza reattiva assorbite da un bipolo possono essere espresse come

$$P_{av} = A \cos(\beta - \alpha), \quad (57)$$

$$Q = A \sin(\beta - \alpha). \quad (59)$$

L'unità di misura della potenza reattiva è il “ VAr ” (*volt-ampere reattivo*) e l'unità di misura della potenza apparente è il “ VA ” (*volt-ampere*).

### Osservazione

La potenza complessa assorbita da un doppio bipolo lineare tempo invariante in regime sinusoidale è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dalle

singole porte,  $\hat{P} = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^*$ . La parte reale rappresenta la potenza media assorbita dal doppio bipolo e la parte immaginaria è la potenza reattiva assorbita dal doppio bipolo.



#### 6.6.4 Conservazione delle potenze complesse, potenze medie e potenze reattive

Pur non avendo la potenza reattiva assorbita da un bipolo in regime sinusoidale nessun significato fisico, essa ha una proprietà molto importante: la potenza reattiva assorbita da tutti i bipoli si conserva, così come si conserva la potenza media assorbita da tutti gli elementi del circuito. Di conseguenza, si conserva anche la potenza complessa.

Si consideri un circuito di impedenze con  $l$  bipoli. Le potenze complesse assorbite dai singoli elementi del circuito verificano la seguente proprietà.

#### Teorema della conservazione delle potenze elettriche complesse

La somma delle potenze elettriche complesse assorbite dagli elementi di un circuito di impedenze è uguale a zero,

$$\sum_{k=1}^l \hat{P}_k = \sum_{k=1}^l \frac{1}{2} \bar{V}_k \bar{I}_k^* = \bar{0}. \quad (60)$$

La dimostrazione di questa proprietà è analoga alla dimostrazione della conservazione delle potenze elettriche istantanee descritta nel Capitolo 2. Essa si basa sul fatto che i fasori rappresentativi delle tensioni verificano le equazioni di Kirchhoff per le tensioni e i fasori rappresentativi delle intensità di corrente verificano le equazioni di Kirchhoff per le correnti. In conseguenza di quest'ultima proprietà si ha che anche i complessi coniugati dei fasori rappresentativi delle intensità di corrente verificano le equazioni di Kirchhoff per le correnti,

$$\sum_k (\pm) \bar{I}_k = \bar{0} \Leftrightarrow \sum_k (\pm) \bar{I}_k^* = \bar{0} , \quad (61)$$

perché  $\left(\sum (\pm) I_k\right)^* = \sum (\pm) \bar{I}_k^*$ . Il lettore partendo da queste considerazioni dimostri la conservazione delle potenze complesse assorbite da tutti gli elementi del circuito seguendo il percorso che abbiamo seguito nella dimostrazione della conservazione delle potenza elettriche istantanee.

◆

Come ovvi corollari della conservazione delle potenze elettriche complesse si ha che, in un generico circuito in regime sinusoidale:

- la somma delle potenze elettriche medie assorbite da tutti elementi del circuito è uguale a zero (*conservazione delle potenze medie*)

$$\sum_{h=1}^l P_{av,k} = 0. \quad (62)$$

- la somma delle potenze reattive assorbite dagli elementi della rete è uguale a zero (*conservazione delle potenze reattive*)

$$\sum_{h=1}^l Q_k = 0. \quad (63)$$

Dalla relazione (60) si ha:

$$\sum_{k=1}^l \hat{P}_k = \sum_{k=1}^l (P_{kav} + iQ_k) = \sum_{k=1}^l P_{kav} + i \sum_{k=1}^l Q_k = \bar{0}. \quad (64)$$

Quindi deve essere necessariamente

$$\sum_{k=1}^l P_{av,k} = 0 \quad (65)$$

e

$$\sum_{k=1}^l Q_k = 0. \quad (66)$$

Pertanto la conservazione della potenza elettrica complessa non solo implica la conservazione della potenza media, ma anche la conservazione della potenza reattiva. Di conseguenza, se un certo elemento di una rete assorbe potenza reattiva, allora ci devono essere almeno un altro elemento del circuito che deve “generarla”. Questo risultato è d’importanza fondamentale nell’ingegneria dei sistemi elettrici di potenza.

La potenza apparente, essendo una grandezza definita positiva, non verifica nessuna proprietà di conservazione.

### 6.6.5 Potenza virtuale complessa e teorema di Tellegen

Si considerino, ora, due reti di impedenze  $\tilde{N}'_{\omega}$  e  $\tilde{N}''_{\omega}$  che hanno lo stesso grafo orientato. Sia  $\bar{I}'_1, \dots, \bar{I}'_l$  l’insieme dei fasori delle correnti della rete  $\tilde{N}'_{\omega}$  e  $\bar{V}''_1, \dots, \bar{V}''_l$  l’insieme dei fasori delle tensioni della rete  $\tilde{N}''_{\omega}$ . Come per i circuiti nel dominio del tempo, si definisce la potenza virtuale complessa  $\hat{S}_k$  assorbita dal  $k$  – esimo lato

$$\hat{S}_k = \frac{1}{2} \bar{V}''_k \bar{I}'_k{}^*. \quad (67)$$

È possibile definire anche altre potenze virtuali complesse, come, ad esempio,  $\bar{V}''_k \bar{I}'_k$ , ma solo quella definita attraverso la (67) coincide con la potenza elettrica complessa assorbita da un bipolo nel caso in cui  $\bar{V}''_1, \dots, \bar{V}''_l$  e  $\bar{I}'_1, \dots, \bar{I}'_l$  sono le tensioni e correnti di uno stesso circuito.

### **Teorema di Tellegen per le potenze elettriche complesse**

La somma delle potenze virtuali complesse assorbite da un circuito è uguale a zero,

$$\sum_{k=1}^l \hat{S}_k = \sum_{k=1}^l \frac{1}{2} \bar{V}_k'' \bar{I}_k'^* = 0. \quad (68)$$

Per la dimostrazione della (68) valgono le stesse considerazioni svolte per la dimostrazione della conservazione della potenza complessa.

### **6.7 Alcune proprietà degli elementi circuitali in regime sinusoidale; diagrammi fasoriali**

In questo paragrafo ci soffermeremo su alcune caratteristiche generali dei bipoli elementari quando operano in regime sinusoidale. Considereremo prima i bipoli elementari lineari e tempo invarianti e poi estenderemo l'analisi ad alcuni doppi bipoli elementari lineari e tempo invarianti di particolare interesse applicativo.

Siano

$$\bar{I} = I_m e^{i\alpha}, \quad (69)$$

$$\bar{V} = V_m e^{i\beta}, \quad (70)$$

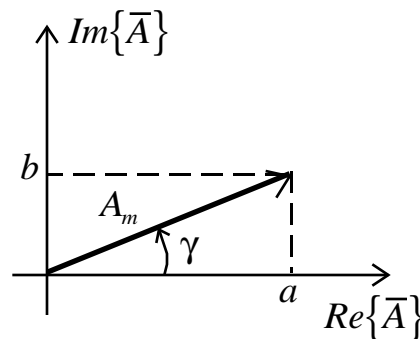
i fasori rappresentativi dell'intensità di corrente e della tensione del particolare bipolo in esame; i versi di riferimento sono scelti in accordo alla convenzione dell'utilizzatore.

Prima di iniziare lo studio oggetto di questo paragrafo, introduciamo una rappresentazione delle grandezze fasoriali molto utilizzata nell'analisi dei circuiti di impedenze. Questa rappresentazione ci aiuterà a mettere meglio in evidenza le proprietà dei bipoli funzionanti in regime sinusoidale.

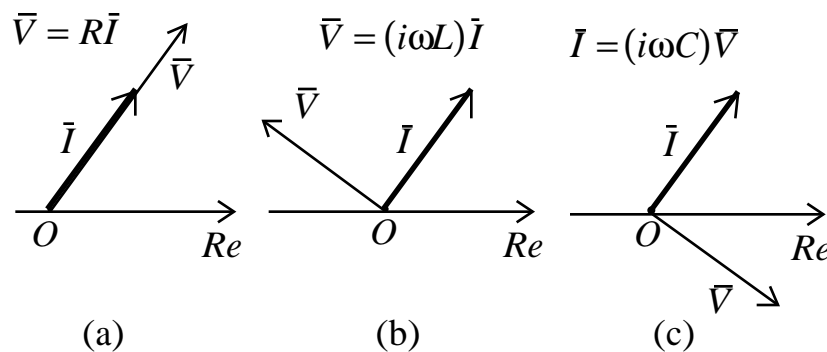
### 6.7.1 Diagrammi fasoriali

Alla funzione sinusoidale  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \gamma)$  è associato il fasore rappresentativo  $\bar{A} = A_m e^{i\gamma} = a + ib$ . È possibile rappresentare il numero complesso  $\bar{A}$  nel piano complesso (piano di Gauss) come un segmento orientato (vettore), congiungente l'origine con il punto di coordinate rettangolari  $(a, b)$  o coordinate polari  $(A_m, \gamma)$ , così come illustrato in Figura 6.11. Adottiamo come verso di riferimento per gli angoli quello antiorario.

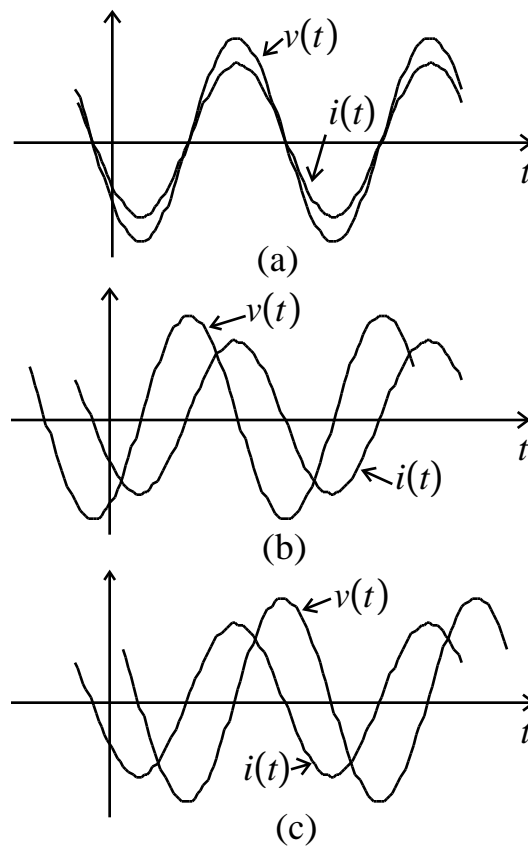
Le equazioni di Kirchhoff e le equazioni caratteristiche nel dominio simbolico possono essere rappresentate graficamente tracciando i fasori rappresentativi delle tensioni e correnti sul piano di Gauss. In Figura 6.12 sono rappresentati i diagrammi fasoriali della tensione e della corrente di un resistore, un induttore e un condensatore.



**Fig. 6.11** Rappresentazione grafica del fasore  $\bar{A}$  sul piano di Gauss.



**Fig. 6.12** Rappresentazione delle caratteristiche del resistore, induttore e condensatore nel dominio simbolico tramite i diagrammi fasoriali.



**Fig. 6.13** Andamenti temporali dell'intensità della corrente elettrica e tensione per un (a) resistore, (b) induttore e (c) condensatore in regime sinusoidale.

### 6.7.2 Resistore

Dalla relazione caratteristica del resistore nel dominio simbolico (convenzione dell'utilizzatore)

$$\bar{V} = R\bar{I}, \quad (71)$$

si ha che

$$V_m = RI_m, \quad \beta = \alpha, \quad (72)$$

se  $R > 0$  (resistore passivo), quindi  $\bar{V}$  ha la stessa fase di  $\bar{I}$ . L'impedenza del resistore è reale e la sua fase è uguale a zero.

Il fasore della tensione di un resistore passivo in regime sinusoidale è in fase con il fasore dell'intensità della corrente, Figura 6.12a. In Figura 6.13a è riportato l'andamento nel dominio del tempo dell'intensità della corrente e della tensione di un resistore. In particolare, osserviamo che quando l'intensità della corrente è massima (o minima) anche la tensione è massima (o minima). Ciò è conseguenza del fatto che i fasori della tensione e dell'intensità di corrente sono in fase.

Indicando con  $\phi$  la differenza tra la fase di  $\bar{V}$  e quella di  $\bar{I}$ ,  $\phi \equiv \beta - \alpha$ , per un generico resistore passivo si ha  $\cos \phi = 1$ . Di conseguenza la potenza complessa assorbita da un resistore passivo ha parte reale maggiore di zero e parte immaginaria uguale a zero. La potenza reattiva assorbita da un resistore è sempre uguale a zero. Invece, la potenza media assorbita è diversa da zero e può essere espressa come

$$P_{av} = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{R I_m^2}{2} = \frac{V_m^2}{2R}. \quad (73)$$

L'andamento temporale della potenza istantanea assorbita dal resistore è descritto dalla funzione

$$p(t) = \frac{R I_m^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]. \quad (74)$$

Essa è una funzione periodica di periodo  $T/2$  che oscilla tra 0 e  $R I_m^2$  ( $V_m^2/R$ ). Il suo valore medio sul periodo  $T$  coincide con il termine costante.

### Osservazione

Per un resistore con resistenza negativa (resistore attivo) si ha, invece,  $\phi = \beta - \alpha = \pi$ . Quindi, nel dominio del tempo, quando l'intensità della corrente è minima (massima) la tensione è massima (minima). Inoltre, la potenza media assorbita è minore di zero. La potenza reattiva assorbita dai resistori attivi è uguale a zero.

### 6.7.3 Induttore

La relazione caratteristica dell'induttore nel dominio simbolico (convenzione dell'utilizzatore) può essere scritta come,

$$\bar{V} = iX_L \bar{I}, \quad (75)$$

dove la grandezza

$$X_L = \omega L, \quad (76)$$

omogenea dimensionalmente a una resistenza, è la cosiddetta *reattanza* dell'induttore. La reattanza di un induttore passivo ( $L > 0$ ) è sempre positiva. L'impedenza dell'induttore può essere, allora, espressa come

$$\dot{Z}_L = iX_L. \quad (77)$$

Essa è immaginaria e la sua fase è uguale a  $+\pi/2$ .

Per l'induttore si ha

$$V_m = X_L I_m, \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}. \quad (78)$$

La reattanza gioca un ruolo analogo a quello della resistenza. La reattanza dell'induttore cresce linearmente al crescere della pulsazione. Per  $\omega \rightarrow 0$  essa tende a zero e, quindi, il suo comportamento tende a quello del corto circuito; invece, per  $\omega \rightarrow \infty$  essa diverge e, quindi, il suo comportamento tende a quello del circuito aperto.

*Il fasore rappresentativo della tensione di un induttore è in anticipo di  $\pi/2$  rispetto al fasore rappresentativo della corrente*, Figura 12.b. In Figura 6.13b è riportato l'andamento nel dominio del tempo dell'intensità della corrente e della tensione. In particolare, osserviamo che quando l'intensità della corrente cresce nel tempo la tensione è positiva; invece, quando l'intensità della corrente decresce

nel tempo la tensione è negativa. Inoltre, quando l'intensità della corrente è massima o minima la tensione è nulla, e viceversa.

La parte reale della potenza complessa assorbita dall'induttore è sempre uguale a zero perché  $\cos\phi = 0$ . Di conseguenza, la potenza media assorbita da un induttore è sempre uguale a zero. La potenza reattiva assorbita è positiva e vale

$$Q_L = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{X_L I_m^2}{2} = \frac{V_m^2}{2 X_L}. \quad (79)$$

Si osservi che  $Q_L = \left(\frac{1}{2} L I_m^2\right) \omega$ , dove  $\frac{1}{2} L I_m^2$  è il valore massimo dell'energia immagazzinata nell'induttore.

La potenza istantanea assorbita da un induttore è data da

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) = Q_L \cos[2(\omega t + \alpha + \pi/4)]. \quad (80)$$

Essa è una funzione periodica di periodo  $T/2$ , che oscilla tra i valori  $-Q_L$  e  $+Q_L$ . È evidente, allora, il perché il valore medio della potenza assorbita dall'induttore è uguale a zero: la potenza istantanea assorbita dall'induttore è positiva in alcuni intervalli di tempo ed è negativa in altri. Infatti, l'induttore è un bipolo conservativo e, quindi, non dissipa l'energia che effettivamente assorbe, al contrario di quanto accade per il resistore passivo: tutta l'energia elettrica effettivamente assorbita, che viene immagazzinata sotto forma di energia associata al campo magnetico, viene poi completamente restituita al circuito in cui l'induttore è inserito.

#### 6.7.4 Condensatore

La relazione caratteristica del condensatore nel dominio simbolico (convenzione dell'utilizzatore) può essere scritta come

$$\bar{V} = i X_C \bar{I}, \quad (81)$$

dove la grandezza

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (82)$$

è la reattanza del condensatore. La reattanza di un condensatore passivo ( $C > 0$ ) è sempre negativa. L'impedenza del condensatore può essere, allora, espressa come

$$\dot{Z}_C = iX_C. \quad (83)$$

Anche essa è immaginaria ma la sua fase è uguale a  $-\pi/2$  perché  $X_C < 0$ .

Per il condensatore si ha

$$V_m = |X_C| I_m, \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}. \quad (84)$$

La reattanza del condensatore è inversamente proporzionale alla pulsazione. Per  $\omega \rightarrow 0$  la reattanza del condensatore diverge e, quindi, il funzionamento del condensatore tende a quello del circuito aperto; invece, per  $\omega \rightarrow \infty$  la reattanza del condensatore tende a zero e, quindi, il funzionamento del condensatore tende a quello del corto circuito.

*Il fasore rappresentativo della tensione di un condensatore è in ritardo di  $\pi/2$  rispetto al fasore rappresentativo della corrente*, Figura 6.12c. In Figura 6.13c è riportato l'andamento nel dominio del tempo dell'intensità della corrente e della tensione. In particolare, osserviamo che quando la tensione cresce nel tempo l'intensità della corrente è positiva; invece, quando la tensione decresce l'intensità della corrente è negativa. Inoltre, quando la tensione è massima o minima l'intensità della corrente è nulla, e viceversa.

Anche per il condensatore la parte reale della potenza complessa assorbita è sempre uguale a zero perché  $\cos \phi = 0$ . Di conseguenza, come per l'induttore, la potenza media assorbita dal condensatore è uguale a zero. La potenza reattiva assorbita è negativa e vale

$$Q_C = -\frac{V_m I_m}{2} = -\frac{X_C I_m^2}{2} = -\frac{V_m^2}{2 X_C}. \quad (85)$$

Si osservi che  $|Q_c| = (\frac{1}{2} CV_m^2) \omega$ , dove  $\frac{1}{2} CV_m^2$  è il valore massimo dell'energia immagazzinata nel condensatore. La potenza istantanea assorbita dal condensatore è data da

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C v^2 \right) = |Q_c| \cos[2(\omega t + \beta + \pi/4)]. \quad (86)$$

Essa, come per l'induttore, è una funzione periodica di periodo  $T/2$ , che oscilla tra i valori  $-|Q_c|$  e  $+|Q_c|$ . È evidente, allora, il perché anche il valore medio della potenza istantanea assorbita dal condensatore è uguale a zero. Il condensatore, come l'induttore, è un bipolo conservativo e, quindi, non dissipa l'energia che effettivamente assorbe. L'energia assorbita, che viene immagazzinata sotto forma di energia associata al campo elettrico, viene poi restituita completamente al circuito in cui il condensatore è inserito.

### 6.7.5 Generatori ideali

Si consideri un generatore ideale di tensione sinusoidale,  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \delta)$ . Il fasore rappresentativo è  $\bar{E} = E_m e^{i\delta}$  ed è indipendente da quello rappresentativo dell'intensità della corrente elettrica che lo attraversa. Quest'ultima grandezza dipende dal circuito a cui il generatore è connesso. Di conseguenza non è possibile prevedere niente circa la potenza complessa assorbita da un generatore di tensione e, quindi, il segno della potenza media e della potenza reattiva, se non si specifica il circuito a cui il generatore è collegato. Nelle condizioni di funzionamento in cui il generatore di tensione eroga effettivamente energia elettrica, la potenza media assorbita risulterà minore di zero e, quindi, quella erogata maggiore di zero. Considerazioni del tutto analoghe valgono per il generatore ideale di corrente sinusoidale.

### 6.7.6 Giratore, trasformatore ideale, trasformatore e generatori controllati

La potenza complessa assorbita da un doppio bipolo lineare tempo invariante in regime sinusoidale è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dalle

singole porte,  $\hat{P} = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^*$ : la parte reale è la potenza media e la parte immaginaria è la potenza reattiva.

### ***Giratore***

Le relazioni caratteristiche del giratore nel dominio simbolico sono le stesse relazioni che abbiamo nel dominio del tempo, perché esse sono algebriche lineari. La potenza istantanea assorbita da un giratore è uguale a zero (vedi § 4.4), quindi la potenza media assorbita è uguale a zero. Invece, la potenza reattiva assorbita è, in generale, diversa da zero. Il lettore determini la sua espressione.

### ***Trasformatore ideale***

Come per il giratore, le relazioni caratteristiche del trasformatore ideale nel dominio simbolico sono le stesse relazioni che abbiamo nel dominio del tempo, perché anche esse sono algebriche lineari.

La potenza complessa assorbita da un trasformatore ideale è uguale a zero in qualsiasi condizione di funzionamento. Quindi, la potenza media e la potenza reattiva sono entrambe uguali a zero. Il lettore dimostri questa proprietà.

### ***Trasformatore (circuiti mutuamente accoppiati)***

La potenza complessa assorbita da un trasformatore (circuiti mutuamente accoppiati) può essere determinata utilizzando il circuito equivalente descritto nel § 4.8.3 e nel § 4.8.4: esso contiene un trasformatore ideale e due induttori. Per la conservazione della potenza complessa, la potenza complessa assorbita dal trasformatore è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dai due induttori e dal trasformatore ideale. Siccome la potenza complessa assorbita dal trasformatore ideale è zero, la potenza complessa assorbita dai due circuiti accoppiati è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite dai due induttori. In conclusione, la potenza media assorbita da un trasformatore è uguale a zero e la potenza reattiva assorbita è maggiore di zero.

### ***Generatori controllati***

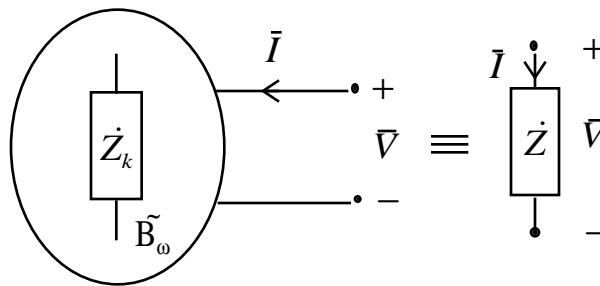
La potenza complessa assorbita dalla porta di controllo di un qualsiasi generatore controllato (purché ideale) è sempre uguale a zero, perché tale porta si comporta o da corto circuito o da circuito aperto. L'altra porta si comporta, dal punto di vista energetico, o come un generatore di tensione ideale o come un generatore di corrente ideale. Di conseguenza valgono tutte le considerazioni che abbiamo svolto nel § 6.7.6.

## **6.8 Proprietà dei circuiti di impedenze**

Il modello matematico di un circuito di impedenze è lo stesso modello che descrive un circuito resistivo lineare (in esso non vi sono operazioni di derivazione). Pertanto per i circuiti di impedenze valgono molte delle proprietà illustrate per le reti resistive lineari: sovrapposizione degli effetti e teorema di Thévenin-Norton. Inoltre, sono estensibili i concetti di equivalenza, le regole del partitore di corrente e di tensione, le regole di trasformazione stella-triangolo e i concetti di  $N$ -polo e  $M$ -porte, con le relative matrici di rappresentazione e alcune proprietà.

### **6.8.1 Bipoli di impedenze**

Si consideri, ora, un generico bipolo lineare tempo-invariante in regime sinusoidale costituito, in generale, da resistori, induttori, condensatori, trasformatori, giratori, generatori controllati (non contiene generatori ideali (indipendenti)); indichiamo con  $\tilde{B}_\omega$  il corrispondente bipolo di impedenze, Figura 6.14. La relazione tra il fasore della tensione  $\bar{V}$  e il fasore dell'intensità di corrente  $\bar{I}$  è lineare. La dimostrazione è del tutto analoga a quella sviluppata nel § 3.2.1 per i bipoli di resistori lineari.



**Fig. 6.14** Bipolo di impedenze.

L'impedenza del bipolo  $\tilde{B}_\omega$  è definita come

$$\dot{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}; \quad (87)$$

l'ammettenza è l'inverso dell'impedenza,

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}. \quad (88)$$

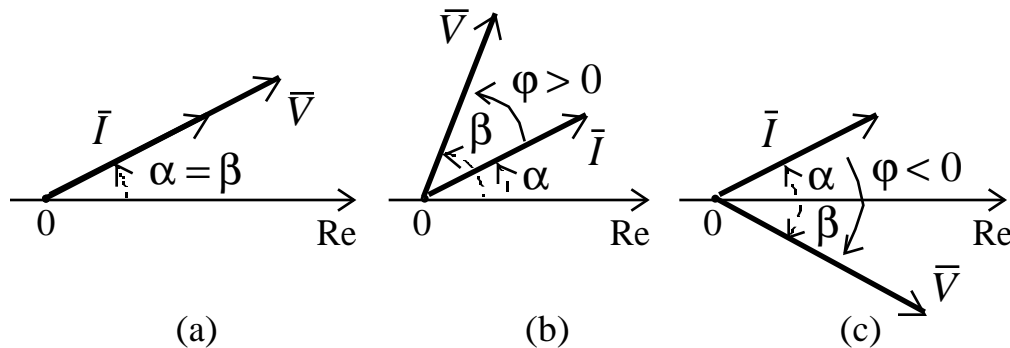
Per la linearità l'impedenza (ammettenza)  $\dot{Z}$  ( $\dot{Y}$ ) è una grandezza indipendente sia da  $\bar{V}$  che da  $\bar{I}$ : essa dipende solo dai valori delle impedenze che costituiscono  $\tilde{B}_\omega$  e da come sono connesse tra loro. Di conseguenza, un qualsiasi bipolo  $\tilde{B}_\omega$  costituito di sole impedenze, comunque complesso, può essere sempre sostituito da un singolo bipolo di impedenza equivalente  $\dot{Z}$ .

L'impedenza  $\dot{Z}$  è una grandezza complessa, con parte reale e parte immaginaria diverse da zero,

$$\dot{Z} = R + iX. \quad (89)$$

Alla parte reale  $R$  si dà il nome di “resistenza” e alla parte immaginaria  $X$  il nome di *reattanza*. Come vedremo tra poco, sia la parte reale che la parte immaginaria dell'impedenza variano al variare della pulsazione  $\omega$  con andamenti che dipendono sia dalla natura dei singoli elementi che dal modo in cui sono tra di loro collegati.

Se il bipolo  $\tilde{B}_\omega$  si riducesse a un singolo resistore la parte reale sarebbe uguale alla resistenza del resistore e la parte immaginaria sarebbe uguale a zero. Se, invece, il bipolo  $\tilde{B}_\omega$  si riducesse a un singolo induttore (o condensatore) la parte reale sarebbe uguale a zero e la parte immaginaria sarebbe uguale alla corrispondente reattanza.



**Fig. 6.15** Diagrammi fasoriali della tensione e corrente di un bipolo di impedenze.

L'espressione (89) è la rappresentazione cartesiana dell'impedenza  $\dot{Z}$ . Nella rappresentazione polare si ha

$$\dot{Z} = Ze^{i\phi}, \quad (90)$$

dove  $Z$  è il modulo dell'impedenza e  $\phi$  è la fase. La parte reale e la parte immaginaria dell'impedenza sono legate al modulo e alla fase per mezzo delle relazioni

$$R = Z \cos \phi, \quad X = Z \sin \phi. \quad (91)$$

Sostituendo l'espressione (90) nella relazione (87) si ottiene

$$V_m e^{i\beta} = (Ze^{i\phi}) I_m e^{i\alpha} = (ZI_m) e^{i(\alpha+\phi)}. \quad (92)$$

Di conseguenza deve essere

$$V_m = ZI_m, \quad (93)$$

e

$$\beta - \alpha = \phi. \quad (94)$$

In Figura 6.15 sono riportati alcuni esempi di diagrammi fasoriali della tensione e corrente (per un generico bipolo): i tre casi  $\phi = 0$ ,  $\phi > 0$  e  $\phi < 0$  sono considerati.

L'espressione generale della potenza media assorbita da un bipolo di impedenze è

$$P_{av} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* \right\} = \frac{1}{2} Z I_m^2 \cos \phi = \frac{1}{2} R I_m^2, \quad (95)$$

ovvero

$$P_{av} = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{Z} \cos \phi. \quad (96)$$

Dunque, il segno della resistenza  $R$  è uguale al segno della potenza media assorbita dal bipolo.

L'espressione della potenza reattiva assorbita è

$$Q = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\bar{V} \bar{I}^*}{2} \right\} = \frac{1}{2} Z I_m^2 \sin \phi = \frac{1}{2} X I_m^2, \quad (97)$$

ovvero

$$Q = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{Z} \sin \phi. \quad (98)$$

Dunque, il segno della resistenza  $X$  è uguale al segno della potenza reattiva assorbita dal bipolo.

Infine, l'espressione della potenza apparente è

$$A = \frac{1}{2} Z I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{Z}. \quad (99)$$

Utilizzando le relazioni (95) e (97) si ha la relazione notevole

$$\dot{Z} = R + iX = 2 \frac{\hat{P}}{I_m^2} = 2 \frac{P_{av} + iQ}{I_m^2}. \quad (100)$$

Per la conservazione della potenza complessa, la potenza media  $P$  e la potenza reattiva  $Q$  assorbite dal bipolo  $\tilde{B}_\omega$  sono uguali, rispettivamente, alla somma delle potenze medie e delle potenze reattive assorbite dai singoli elementi che lo costituiscono. Di conseguenza, la parte reale dell'impedenza  $R$  è positiva se gli elementi del bipolo  $\tilde{B}_\omega$  sono tutti passivi. Invece, il segno della reattanza può essere sia positivo che negativo. Se il bipolo contiene resistori e induttori la sua reattanza è positiva; se, invece, contiene solo resistori e condensatori la sua reattanza è negativa. La parte immaginaria dell'impedenza può essere uguale a zero anche quando nel bipolo ci sono sia induttori che condensatori: ciò accade se la potenza reattiva assorbita dagli induttori è uguale a quella erogata dai condensatori (circuiti risonanti).

Siccome la reattanza dell'induttore è positiva e quella del condensatore è negativa, la reattanza di un generico bipolo si dice che è di tipo induttivo se  $X$  è maggiore di zero; se  $X$  è minore di zero, si dice che la reattanza è di tipo capacitivo.

Inoltre, il bipolo  $\tilde{B}_\omega$  è costituito da soli resistori, generatori controllati e trasformatori ideali la sua impedenza ha solo parte reale perché la potenza reattiva da esso assorbita è uguale a zero. Invece, se il bipolo è costituito di soli induttori, condensatori, trasformatori ideali e giratori la sua impedenza ha solo parte immaginaria perché la potenza media da esso assorbita è uguale a zero.

### **6.8.2 Impedenze connesse in serie e in parallelo, partitore di tensione, partitore di corrente**

Per determinare l'impedenza di un bipolo composto di impedenze elementari, spesso è sufficiente applicare le regole del parallelo, della serie e le trasformazioni stella-triangolo che tra poco illustreremo.

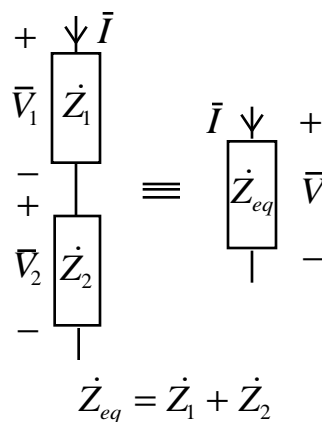
Il concetto di equivalenza serie e parallelo introdotto per le reti resistive si estende alle reti di impedenze senza alcuna limitazione.

### ***Equivalenza serie e partitore di tensione***

Le due impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$  siano collegate in serie, Figura 6.16. Il bipolo simbolico di impedenza

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \quad (101)$$

è equivalente al bipolo costituito dalla serie delle impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$ .



**Fig. 6.16** Serie di impedenze.

Sia  $\bar{V}$  il fasore della tensione della serie delle due impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$ , Figura 6.16. I valori della tensione  $\bar{V}_1$  del bipolo di impedenza  $\dot{Z}_1$  e della tensione  $\bar{V}_2$  del bipolo di impedenza  $\dot{Z}_2$  sono (i versi di riferimento per le tensioni sono quelli indicati in Figura 6.16)

$$\bar{V}_1 = \bar{V} \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}, \quad \bar{V}_2 = \bar{V} \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}. \quad (102)$$

### ***Equivalenza parallelo e partitore di corrente***

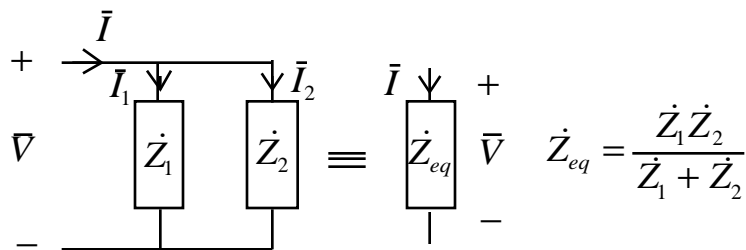
Le due impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$  siano collegate in parallelo, Figura 6.17. Il bipolo simbolico di impedenza

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}, \quad (103)$$

ovvero di ammettenza

$$\dot{Y}_{eq} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2, \quad (104)$$

è equivalente al bipolo costituito dalle impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$  connesse in parallelo, dove  $\dot{Y}_1 = 1/\dot{Z}_1$  e  $\dot{Y}_2 = 1/\dot{Z}_2$ .



**Fig. 6.17** *Parallelo di impedenze.*

Sia  $\bar{I}$  il fasore della corrente che circola nel parallelo delle due impedenze  $\dot{Z}_1$  e  $\dot{Z}_2$ , Figura 6.17. Il fasore della corrente  $\bar{I}_1$  del bipolo di impedenza  $\dot{Z}_1$  e il fasore della corrente  $\bar{I}_2$  del bipolo di impedenza  $\dot{Z}_2$  sono (i riferimenti per i versi delle correnti sono quelli di Figura 6.17)

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}, \quad \bar{I}_2 = \bar{I} \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}. \quad (105)$$

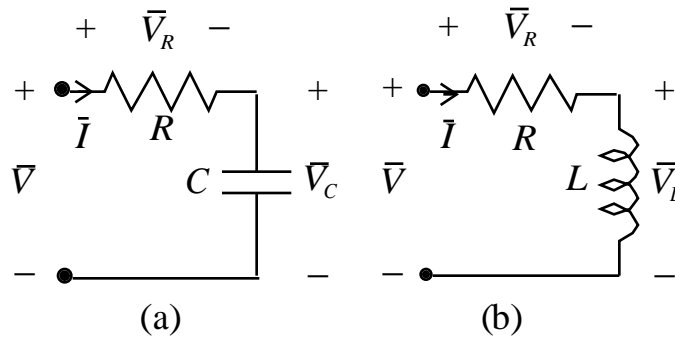
Le situazioni in cui ci sono impedenze connesse in serie o in parallelo a generatori ideali si trattano allo stesso modo di come si trattano le analoghe connessioni costituite da resistori e generatori ideali, vedi § 3.1.

### 6.8.3 Bipolo $RC$ serie

Si consideri il bipolo in regime sinusoidale costituito da un resistore di resistenza  $R$  e un condensatore di capacità  $C$  collegati in serie (bipolo  $RC$  serie), Figura 6.18a. L'impedenza di questo bipolo è

$$\dot{Z}_{RC} = R - i \frac{1}{\omega C}. \quad (106)$$

In questo caso particolare la parte reale è uguale alla resistenza del resistore e la parte immaginaria è uguale alla reattanza del condensatore. Per  $\omega \rightarrow 0$  il bipolo, praticamente, si comporta come se fosse un circuito aperto. Invece, per  $\omega \rightarrow \infty$  la parte immaginaria tende a zero e il comportamento del bipolo è equivalente ad un resistore di resistenza  $R$ .



**Fig. 6.18** Bipoli di impedenze: (a)  $RC$  serie e (b)  $RL$  serie.

Posto (costante di tempo del circuito  $RC$  in evoluzione libera, vedi § 2.4)

$$\tau_{RC} = RC, \quad (107)$$

si ha che per  $\omega \ll 1/\tau_{RC}$  la parte immaginaria di  $\dot{Z}_{RC}$  è molto più grande di quella reale. In queste condizioni il bipolo si comporta, in prima approssimazione, come se il resistore non vi fosse. Per  $\omega \gg 1/\tau$  si ha la situazione duale: il bipolo si comporta, in prima approssimazione, come se il condensatore non vi fosse. L'espressione del modulo dell'impedenza  $\dot{Z}_{RC}$  è

$$Z_{RC} = R \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau_{RC})^2}}, \quad (108)$$

e quella della fase è

$$\phi_{RC} = -\arctg\left(\frac{1}{\omega\tau_{RC}}\right). \quad (109)$$

Il modulo di  $Z_{RC}$  decresce con andamento monotono al crescere della pulsazione mentre la fase cresce (sempre con andamento monotono): per  $\omega \rightarrow 0$  si ha  $Z_{RC} \rightarrow \infty$  e  $\phi_{RC} \rightarrow -\pi/2$ ; per  $\omega \rightarrow \infty$  si ha  $Z_{RC} \rightarrow R$  e  $\phi_{RC} \rightarrow 0$ .

La tensione  $\bar{V}$  della serie RC è in ritardo (Figura 6.15c) di  $\arctg(1/\omega\tau_{RC})$  rispetto all'intensità di corrente  $\bar{I}$  (se si adotta la convenzione dell'utilizzatore).

Il valore del fattore di potenza è compreso tra zero e uno,  $0 < \cos\phi_{RC} < 1$ . Di conseguenza, la potenza complessa assorbita ha parte reale e parte immaginaria diverse da zero. La potenza media assorbita è maggiore di zero e la potenza reattiva assorbita è minore di zero perché  $\phi_{RC} > 0$ . Le loro espressioni sono, rispettivamente,

$$P_{av} = \frac{1}{2} R I_m^2, \quad (110)$$

e

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{I_m^2}{\omega C}, \quad (111)$$

dove  $I_m$  è il modulo del fasore dell'intensità della corrente che attraversa il bipolo.

Consideriamo, ora, la relazione tra le tensioni dei singoli elementi della serie e la tensione totale della serie  $\bar{V}$ . Applicando la formula del partitore di tensione si ha per la tensione del condensatore

$$\bar{V}_C = \bar{V} \frac{1}{i\omega\tau_{RC} + 1}, \quad (112)$$

e per la tensione del resistore

$$\bar{V}_R = \bar{V} \frac{i\omega\tau_{RC}}{i\omega\tau_{RC} + 1}. \quad (113)$$

Per ogni valore della pulsazione si ha che  $|\bar{V}_R|/|\bar{V}| \leq 1$  e  $|\bar{V}_C|/|\bar{V}| \leq 1$ . La tensione del condensatore tende alla tensione della serie,  $\bar{V}$ , per  $\omega \rightarrow 0$  e a zero per  $\omega \rightarrow \infty$ , mentre quella del resistore tende a quella della serie,  $\bar{V}$ , per  $\omega \rightarrow \infty$  e a zero per  $\omega \rightarrow 0$ .

Si assuma che il bipolo sia collegato a un generatore ideale di tensione che imprime la tensione  $\bar{V}$ . Dunque, per questo circuito vale una sorta di proprietà di non amplificazione per i moduli dei fasori rappresentativi delle tensioni e, quindi, per le ampiezze massime delle corrispondenti grandezze sinusoidali nel dominio del tempo. Questa proprietà vale anche per un generico circuito costituito da resistori e condensatori passivi e da un solo generatore.

Tuttavia la proprietà di non amplificazione non vale per i valori istantanei delle tensioni, come ora mostreremo. Nel dominio del tempo le espressioni delle tensioni sono

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \beta), \quad (114)$$

$$v_C(t) = V_{Cm} \cos(\omega t + \beta_C), \quad (115)$$

$$v_R(t) = V_{Rm} \cos(\omega t + \beta_R), \quad (116)$$

dove  $V_m = |\bar{V}|$ ,  $V_{Rm} = |\bar{V}_R|$ ,  $V_{Cm} = |\bar{V}_C|$ ,  $\beta = \arg(\bar{V})$ ,  $\beta_R = \arg(\bar{V}_R)$  e  $\beta_C = \arg(\bar{V}_C)$ <sup>1</sup>. Pur essendo  $V_{Rm} \leq V_m$  esistono intervalli di tempo in cui  $v_R(t)$  è, in valore assoluto, più grande di  $v(t)$  perché  $\beta_R \neq \beta$ . In questi intervalli di tempo il condensatore cede al resto del circuito l'energia assorbita in precedenza (e immagazzinata sotto forma di energia associata al campo elettrico). Considerazioni analoghe valgono anche per il valore istantaneo della tensione del condensatore.

---

<sup>1</sup> Con  $\arg(x)$  si intende la fase del numero complesso  $x$ .

### 6.8.4 Bipolo $RL$ serie

Si consideri il bipolo in regime sinusoidale costituito da un resistore di resistenza  $R$  e un induttore di induttanza  $L$  collegati in serie (bipolo  $RL$  serie), Figura 6.18b. L'impedenza di questo bipolo è

$$\dot{Z}_{RL} = R + i\omega L. \quad (117)$$

Si osservi che, pur essendo la reattanza del bipolo dipendente dalla pulsazione, in questo caso particolare il suo segno è positivo per qualsiasi valore di  $\omega$ . Per  $\omega \rightarrow \infty$  la parte immaginaria di  $\dot{Z}_{RL}$  prevale su quella reale: il bipolo, praticamente, si comporta come se fosse un circuito aperto. Invece, per  $\omega \rightarrow 0$  la parte immaginaria tende a zero e il comportamento del bipolo è equivalente ad un resistore di resistenza  $R$ .

La tensione dell'induttore tende a zero per  $\omega \rightarrow 0$  e tende a quella della serie per  $\omega \rightarrow \infty$ , mentre quella del resistore tende a quella della serie per  $\omega \rightarrow 0$  e a zero per  $\omega \rightarrow \infty$ .

Posto (costante di tempo del circuito  $RL$  in evoluzione libera)

$$\tau_{RL} = L/R, \quad (118)$$

si ha che per  $\omega \ll 1/\tau_{RL}$  la parte reale di  $\dot{Z}_{RL}$  è molto più grande di quella immaginaria. In queste condizioni il bipolo si comporta, in prima approssimazione, come se l'induttore non vi fosse. Per  $\omega \gg 1/\tau_{RL}$  si ha la situazione duale: il bipolo si comporta, in prima approssimazione, come se il resistore non vi fosse.

Il modulo dell'impedenza  $\dot{Z}_{RL}$  è

$$Z_{RL} = R\sqrt{1 + (\omega\tau_{RL})^2}, \quad (119)$$

e la sua fase è data dall'espressione

$$\phi_{RL} = \arctg(\omega\tau_{RL}). \quad (120)$$

Il modulo e la fase di  $\dot{Z}_{RL}$  crescono con andamento monotono al crescere della pulsazione: per  $\omega \rightarrow 0$  si ha che  $Z_{RL} \rightarrow R$  e  $\phi_{RL} \rightarrow 0$ ; per  $\omega \rightarrow \infty$  si ha che  $Z_{RL} \rightarrow \infty$  e  $\phi_{RL} \rightarrow +\pi/2$ .

*Il fasore rappresentativo della tensione della serie RL è in anticipo (Figura 6.15b) di  $\arctg(\omega\tau_{RL})$  rispetto al fasore rappresentativo della corrente.*

Anche in questo caso il valore del fattore di potenza è compreso tra zero e uno,  $0 < \cos\phi_{RL} < 1$ . Di conseguenza, la potenza complessa assorbita ha parte reale e parte immaginaria diverse da zero. La potenza media assorbita è maggiore di zero e può essere espressa come

$$P_{av} = \frac{1}{2} R I_m^2. \quad (121)$$

La potenza reattiva assorbita è sempre maggiore di zero perché  $\phi_{RL} > 0$  ed è data dall'espressione

$$Q = \frac{1}{2} \omega L I_m^2. \quad (122)$$

Consideriamo, ora, la relazione tra le tensioni dei singoli elementi della serie e la tensione totale della serie  $\bar{V}$ . Applicando la formula del partitore di tensione si ha per la tensione dell'induttore

$$\bar{V}_L = \bar{V} \frac{i\omega\tau_{RL}}{i\omega\tau_{RL} + 1}, \quad (123)$$

e per la tensione del resistore

$$\bar{V}_R = \bar{V} \frac{1}{i\omega\tau_{RL} + 1}. \quad (124)$$

Anche in questo caso per ogni valore della pulsazione si ha che  $|\bar{V}_R|/|\bar{V}| \leq 1$  e  $|\bar{V}_L|/|\bar{V}| \leq 1$ . La tensione dell'induttore tende alla tensione della serie,  $\bar{V}$ , per

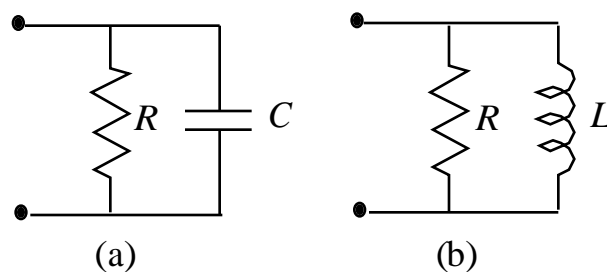
$\omega \rightarrow \infty$  e a zero per  $\omega \rightarrow 0$ , mentre quella del resistore tende a quella della serie,  $\bar{V}$ , per  $\omega \rightarrow 0$  e a zero per  $\omega \rightarrow \infty$ .

Si assuma che il bipolo sia collegato a un generatore ideale di tensione che imprime la tensione  $\bar{V}$ . Dunque, anche per questo circuito vale una sorta di proprietà di non amplificazione per i moduli dei fasori rappresentativi delle tensioni e, quindi, per le ampiezze massime delle corrispondenti grandezze sinusoidali nel dominio del tempo. Questa proprietà vale anche per un generico circuito costituito da resistori e induttori passivi e da un solo generatore.

Come per il circuito  $RC$  studiato precedentemente, la proprietà di non amplificazione non vale per i valori istantanei delle tensioni. Lasciamo al lettore la verifica.

### Esercizio: bipolo $RC$ parallelo e bipolo $RL$ parallelo

Il lettore prima determini e dopo studi le impedenze dei due bipoli riportati in Figura 6.19.



**Fig. 6.19** Bipoli di impedenze: (a)  $RC$  parallelo e (b)  $RL$  parallelo.

◆

### 6.8.5 Bipolo $RLC$ serie (parallelo)

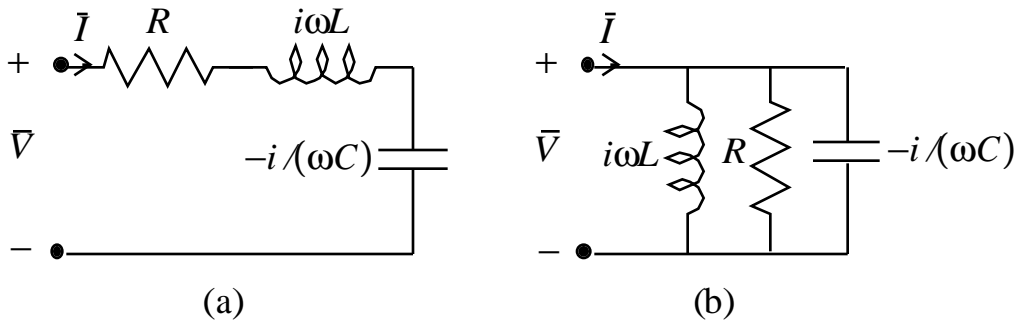
Si consideri, ora, il bipolo in regime sinusoidale costituito da un resistore di resistenza  $R$ , un induttore di induttanza  $L$  e un condensatore di capacità  $C$  collegati in serie (bipolo  $RLC$  serie), Figura 6.20a. L'impedenza di questo bipolo è

$$\dot{Z}_{RLC} = R + i[\omega L - 1/(\omega C)]. \quad (125)$$

La parte reale di  $\dot{Z}_{RLC}$  è indipendente dalla pulsazione, ed è maggiore di zero se  $R > 0$ . Invece, la parte immaginaria dipende dalla frequenza e cambia segno al variare della pulsazione  $\omega$ . Posto

$$\omega_r = 1/\sqrt{LC}, \quad (126)$$

si ha che la reattanza è uguale a zero per  $\omega = \omega_r$ , è minore di zero per  $\omega < \omega_r$  ed è maggiore di zero per  $\omega > \omega_r$ : il contributo del condensatore alla reattanza del bipolo è prevalente per  $\omega \ll \omega_r$ , mentre quello dell'induttore è prevalente per  $\omega \gg \omega_r$ . La pulsazione caratteristica  $\omega_r$  è la *pulsazione di risonanza* del bipolo *RLC* serie. Il fenomeno della risonanza sarà studiato nel prossimo capitolo.



**Fig. 6.20** Bipoli di impedenze: (a) *RLC* serie e (b) *RLC* parallelo.

La tensione del resistore è uguale a quella della serie *RLC* per  $\omega = \omega_r$  e tende a zero sia per  $\omega \rightarrow 0$  che per  $\omega \rightarrow \infty$ . Per  $\omega = \omega_r$  la tensione della sola serie *LC* è uguale a zero pur essendo le tensioni dei singoli elementi diverse da zero: alla pulsazione di risonanza la serie *LC* si comporta come se fosse un corto circuito. Per  $\omega \rightarrow 0$  il comportamento del bipolo è determinato, prevalentemente, dal condensatore, mentre per  $\omega \rightarrow \infty$  è determinato, prevalentemente, dall'induttore. L'espressione del modulo dell'impedenza  $\dot{Z}_{RLC}$  è

$$Z_{RLC} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)^2}, \quad (127)$$

e quella della fase è

$$\phi_{RLC} = \arctg \left[ \frac{\omega L}{R} \left( 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} \right) \right]. \quad (128)$$

Il modulo di  $\dot{Z}_{RLC}$  non è una funzione monotona della pulsazione: esso diverge sia per  $\omega \rightarrow 0$  che per  $\omega \rightarrow \infty$  e assume il valore minimo, uguale a  $R$ , in corrispondenza della pulsazione di risonanza. Invece, la fase di  $\dot{Z}_{RLC}$  cresce con andamento monotono al crescere della pulsazione: per  $\omega \rightarrow 0$  si ha  $\phi_{RLC} \rightarrow -\pi/2$ ; per  $\omega = \omega_r$  si ha  $\phi_{RLC} = 0$ ; per  $\omega \rightarrow \infty$  si ha  $\phi_{RLC} \rightarrow +\pi/2$ .

*Il fasore rappresentativo della tensione della serie RLC è in ritardo rispetto al fasore rappresentativo della corrente se  $\omega < \omega_r$ , è in fase se  $\omega = \omega_r$  ed è in anticipo  $\omega > \omega_r$ .*

Il fattore di potenza che, in generale, ha un valore compreso tra zero e uno, è uguale a uno per  $\omega = \omega_r$ . Di conseguenza, la potenza complessa assorbita dal bipolo RLC serie ha parte immaginaria uguale a zero per  $\omega = \omega_r$ . La potenza media assorbita è maggiore di zero e può essere anche espressa come

$$P_{av} = \frac{1}{2} R I_m^2. \quad (129)$$

La potenza reattiva assorbita può essere anche espressa come

$$Q = \frac{1}{2} \omega L I_m^2 \left( 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2} \right). \quad (130)$$

Per  $\omega = \omega_r$  la potenza reattiva assorbita è uguale a zero, per  $\omega < \omega_r$  è minore di zero e per  $\omega > \omega_r$  è maggiore di zero.

Consideriamo, ora, la relazione tra le tensioni dei singoli elementi della serie e la tensione totale della serie  $\bar{V}$ . Applicando la formula del partitore di tensione si ha

$$\bar{V}_R = \bar{V} \frac{R}{R + i\omega L \left[ 1 - \omega_r^2 / \omega^2 \right]}, \quad (131)$$

$$\bar{V}_L = \bar{V} \frac{i\omega L}{R + i\omega L[1 - \omega_r^2/\omega^2]}, \quad (132)$$

$$\bar{V}_C = \bar{V} \frac{-i/\omega C}{R + i\omega L[1 - \omega_r^2/\omega^2]}. \quad (133)$$

Per ogni valore della pulsazione si ha che  $|\bar{V}_R|/|\bar{V}| \leq 1$ . In questo caso, però, questa proprietà non vale per le tensioni degli elementi dinamici. Ad esempio, per  $\omega = \omega_r$  si ottiene

$$\bar{V}_L = -\bar{V}_C = iQ_f \bar{V}, \quad (134)$$

dove

$$Q_f = \frac{\omega_r L}{R}. \quad (135)$$

Questo parametro prende il nome di *fattore di merito* del bipolo *RLC* serie e, come vedremo, svolge un ruolo fondamentale nel fenomeno della risonanza. Alla pulsazione di risonanza si ha  $|\bar{V}_L| = |\bar{V}_C| > |\bar{V}|$  se il fattore di merito del bipolo è maggiore di uno. Di conseguenza, per il circuito *RLC* serie alimentato con un generatore ideale di tensione sinusoidale non vale, in generale, la proprietà di non amplificazione delle tensioni sia per i valori istantanei che per quelli massimi.

### **Esercizio: bipolo *RLC* parallelo**

Si consideri, ora, il bipolo in regime sinusoidale costituito da un resistore di resistenza  $R$ , un induttore di induttanza  $L$  e un condensatore di capacità  $C$  collegati in parallelo (bipolo *RLC* parallelo), Figura 6.20b. Il lettore prima determini e poi studi l'ammittenza di questo bipolo. Anche per questo bipolo gioca un ruolo particolare la pulsazione caratteristica  $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ : alla pulsazione di risonanza il parallelo *LC* si comporta come se fosse un circuito aperto.

◆

### 6.8.6 Sovrapposizione degli effetti nel dominio dei fasori

La proprietà della sovrapposizione degli effetti vale per le reti di impedenze, perché il modello matematico che le descrive è costituito di sole equazioni lineari. Il fasore rappresentativo della generica corrente (o tensione) di un circuito di impedenze e generatori indipendenti, è la somma dei fasori rappresentativi delle correnti (o tensioni) che ciascuno dei generatori indipendenti produrrebbe se agisse da solo con tutti gli altri generatori indipendenti “spenti”.

Ricordiamo che spegnere un generatore indipendente di tensione equivale a sostituirlo con un corto circuito e spegnere un generatore indipendente di corrente equivale a sostituirlo con un circuito aperto.

### 6.8.7 Generatore equivalente di Thévenin-Norton

Si consideri, ora, un bipolo  $\tilde{N}_\omega$  composto da impedenze e generatori ideali, (Figura 6.21). La relazione tra la tensione  $\bar{V}$  e la corrente  $\bar{I}$  è

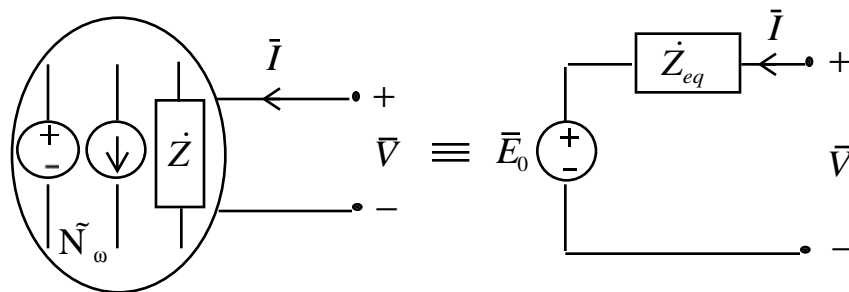
$$\bar{V} = \dot{Z}_{eq} \bar{I} + \bar{E}_0 \quad (136)$$

dove:

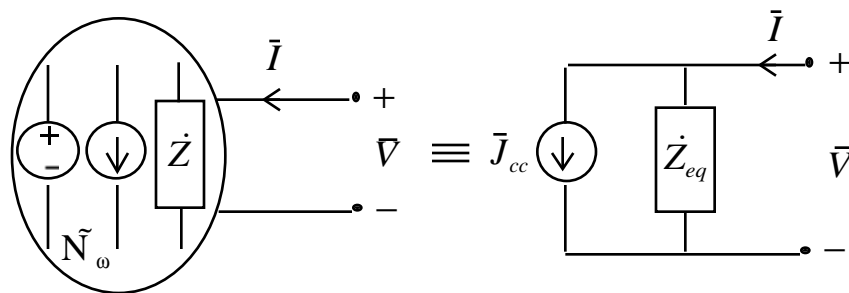
$\dot{Z}_{eq}$  è l'*impedenza equivalente di Thévenin* del bipolo  $\tilde{N}_\omega$ , cioè l'impedenza di  $\tilde{N}_\omega$  quando tutti i suoi generatori ideali (indipendenti) sono spenti;

$\bar{E}_0$  è il *fasore rappresentativo della tensione a vuoto*, cioè il fasore rappresentativo della tensione fra i terminali “1” e “2” di  $\tilde{N}_\omega$  quando esso è collegato a un circuito aperto.

Di conseguenza il comportamento del bipolo  $\tilde{N}_\omega$  può essere rappresentato attraverso il generatore equivalente di Thévenin rappresentato in Figura 6.21.



**Fig. 6.21** *Generatore equivalente di Thévenin.*



**Fig. 6.22** *Generatore equivalente di Norton.*

Dalla relazione (136) abbiamo anche

$$\bar{I} = \dot{Y}_{eq} \bar{V} + \bar{J}_{cc}, \quad (137)$$

dove:

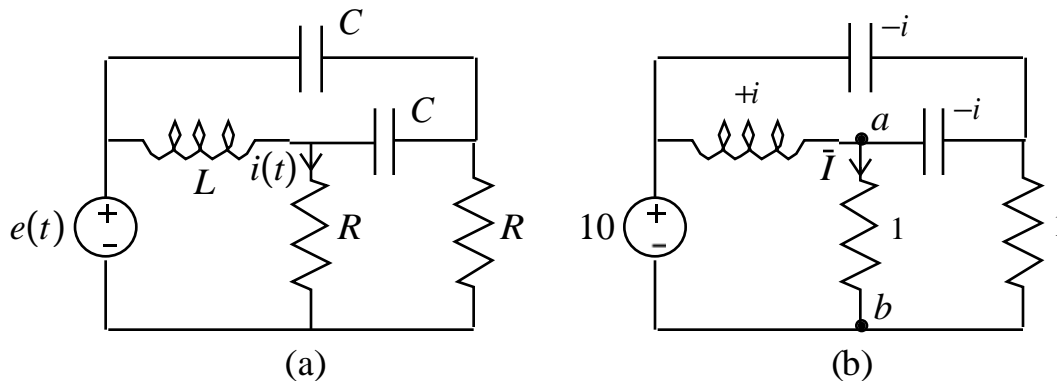
$\dot{Y}_{eq} = 1/\dot{Z}_{eq}$  è l'*ammettenza equivalente di Norton* del bipolo  $\tilde{N}_\omega$ , cioè l'ammettenza del bipolo  $\tilde{N}_\omega$  quando sono spenti tutti i suoi generatori ideali (indipendenti);

$\bar{J}_{cc} = -\bar{E}_0/\dot{Z}_{eq}$  è il *fasore rappresentativo dell'intensità di corrente di corto circuito*, cioè il fasore rappresentativo dell'intensità di corrente del bipolo  $\tilde{N}_\omega$  quando esso è collegato a un corto circuito.

Di conseguenza, il comportamento del bipolo di impedenze  $\tilde{N}_\omega$  può essere rappresentato anche attraverso il generatore equivalente di Norton riportato in Figura 6.22.

## Esercizio

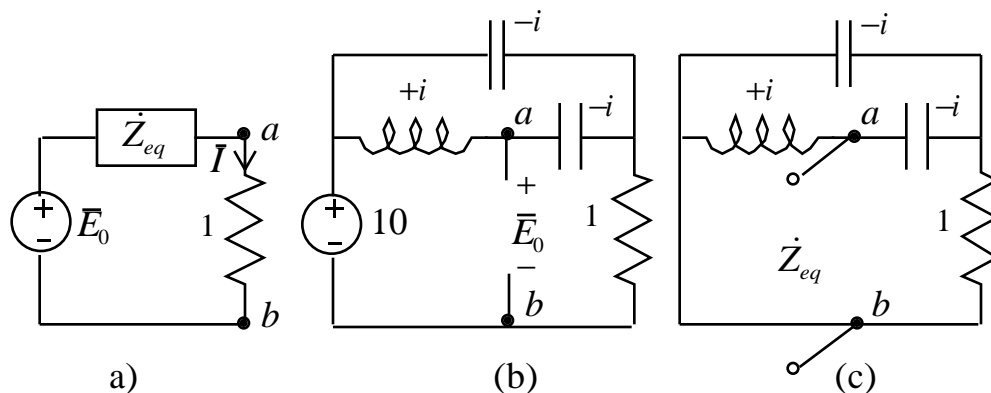
Si consideri il circuito in regime sinusoidale illustrato in Figura 6.23a, dove  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \pi/4)$ . I parametri del circuito sono riportati in Tabella 6.6. Determinare l'intensità della corrente  $i(t)$  che attraversa il resistore di resistenza  $R$ , così come riportato in Figura 6.23a. In Figura 6.23b è rappresentato il circuito di impedenze corrispondente al circuito in esame.



**Fig. 6.23** (a) Circuito in esame, (b) corrispondente circuito nel dominio simbolico.

$R = 1 \, \Omega$	$L = 10 \, \text{mH}$	$C = 10 \, \text{mF}$	$\omega = 10 \, \text{rad/s}$	$E_m = 10 \, \text{V}$	$\delta = \pi/4$
-------------------	-----------------------	-----------------------	-------------------------------	------------------------	------------------

**Tab. 6.5** Parametri del circuito riportato in Fig. 6.23.



**Fig. 6.24** Circuito equivalente di Thévenin (a); circuiti ausiliari per (b) il calcolo della tensione a vuoto  $\bar{E}_0$  e (c) l'impedenza equivalente di Thévenin  $\dot{Z}_{eq}$ .

Il calcolo dell'intensità della corrente  $\bar{I}$  che attraversa il resistore può essere semplificato notevolmente se si usa il generatore equivalente di Thévenin per descrivere la restante parte del circuito. In Figura 6.24a è rappresentato il circuito equivalente ottenuto applicando Thévenin. Bisogna determinare la tensione a vuoto  $\bar{E}_0$ , cioè la tensione tra i nodi “a” e “b” dopo che è stato sconnesso il resistore e l'impedenza equivalente dopo avere spento il generatore di tensione. La tensione a vuoto  $\bar{E}_0$  (vedi circuito riportato in Figura 6.24b) è

$$\bar{E} = 10(1 - i) = 10\sqrt{2} e^{-i\pi/4}, \quad (138)$$

e l'impedenza equivalente è (vedi bipolo riportato in Figura 6.24c)

$$\bar{Z} = \frac{\left(-i + \frac{-i}{1-i}\right)i}{-i + \frac{-i}{1-i} + i} = -\frac{2-i}{i} = 1 + 2i. \quad (139)$$

Pertanto l'intensità della corrente vale

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{R} + \bar{Z}} = \frac{10\sqrt{2} e^{-i\pi/4}}{1 + 1 + 2i} = 5\sqrt{2} e^{-i\pi/2}, \quad (140)$$

quindi  $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(100t)$ .

### 6.8.8 Trasformazioni stella-triangolo

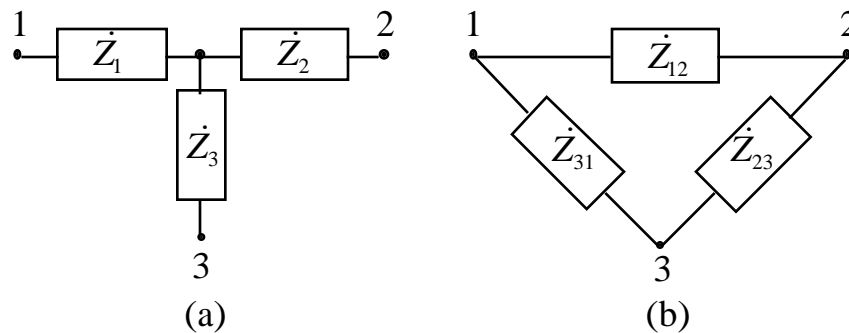
Il tripolo costituito di tre impedenze connesse a stella (Figura 6.25a) può essere sempre “rappresentato” attraverso un tripolo equivalente costituito di tre impedenze collegate a triangolo (Figura 6.25b), e viceversa, secondo le seguenti regole di trasformazione.

### Trasformazione triangolo $\rightarrow$ stella

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_{12}\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \quad \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{12}\dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \quad \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_{23}\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}. \quad (141)$$

Nel caso in cui le tre impedenze della configurazione a triangolo siano uguali,  $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_{31} \equiv \dot{Z}_T$ , la regola di trasformazione si semplifica notevolmente, e diventa

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \frac{1}{3} \dot{Z}_T. \quad (142)$$



**Fig. 6.25** (a) Tripolo di impedenze collegate a stella, (b) tripolo di impedenze collegate a triangolo.

### Trasformazione stella $\rightarrow$ triangolo

La trasformazione inversa è descritta dalle relazioni

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}, \quad \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}, \quad \dot{Z}_{31} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2}. \quad (143)$$

Nel caso in cui le tre impedenze della configurazione a stella siano uguali,  $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 \equiv \dot{Z}_S$ , la regola di trasformazione si semplifica notevolmente e diventa

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_{31} = 3\dot{Z}_S. \quad (144)$$

La dimostrazione di queste regole di equivalenza è del tutto simile a quella che è stata fatta nel Capitolo 4, § 4.7.3, per i tripoli di resistori.

### 6.8.9 Doppi bipoli di impedenze, reciprocità

In generale è possibile caratterizzare un doppio bipolo di impedenze così come si caratterizza un doppio bipolo di resistori lineari.

#### *Matrice delle impedenze*

Si consideri un doppio bipolo di impedenze, cioè una rete di sole impedenze con quattro terminali, associati a due a due, in modo tale da costituire due porte. Si assuma che il doppio bipolo possa essere caratterizzato su base corrente. La relazione tra la coppia dei fasori delle tensioni di porta  $\bar{V}_1$ ,  $\bar{V}_2$  e la coppia dei fasori delle correnti di porta  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$  è, in generale,

$$\bar{V}_1 = \dot{Z}_{11}\bar{I}_1 + \dot{Z}_{12}\bar{I}_2, \quad (145)$$

$$\bar{V}_2 = \dot{Z}_{21}\bar{I}_1 + \dot{Z}_{22}\bar{I}_2. \quad (146)$$

I parametri  $\dot{Z}_{hk}$  sono operatori di impedenza, in generale complessi, indipendenti dai fasori delle tensioni e delle correnti:  $\dot{Z}_{11} = \bar{V}_1 / I_1 \big|_{\bar{I}_2=0}$  e  $\dot{Z}_{22} = \bar{V}_2 / I_2 \big|_{\bar{I}_1=0}$  sono le *impedenze proprie*,  $\dot{Z}_{12} = \bar{V}_1 / I_2 \big|_{\bar{I}_1=0}$  e  $\dot{Z}_{21} = \bar{V}_2 / I_1 \big|_{\bar{I}_2=0}$  sono le *impedenze mutue*.

Esse sono gli elementi della *matrice delle impedenze* del doppio bipolo.

Un doppio bipolo di impedenze composto da resistori, induttori, condensatori, trasformatori ideali e circuiti mutuamente accoppiati è un doppio bipolo reciproco, quindi la matrice delle impedenze è simmetrica

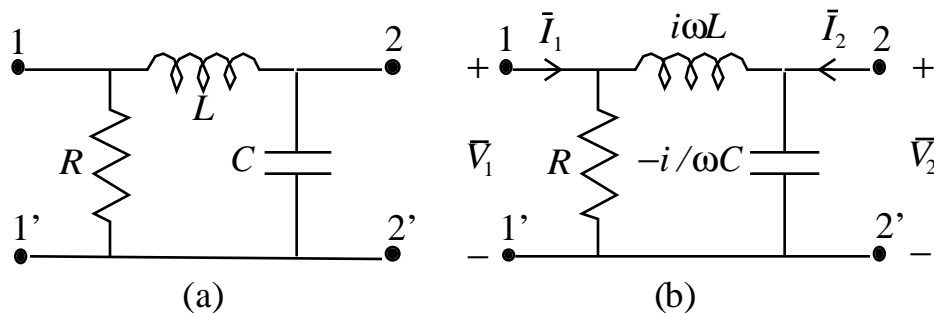
$$\dot{Z}_{21} = \dot{Z}_{12}. \quad (147)$$

Stiamo estendendo la proprietà di reciprocità dei doppi bipoli di resistori, che abbiamo studiato nel Capitolo 5, ai doppi bipoli di impedenze. La dimostrazione è analoga a quella che si fa per i doppi bipoli di resistori e si basa sul teorema di

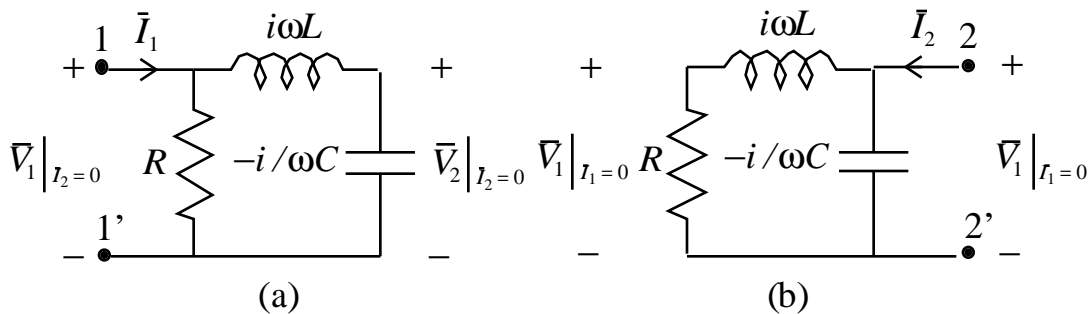
Tellegen per le potenze virtuali complesse, vedi § 6.7. Inoltre, la parte reale delle impedenze proprie non può essere mai minore di zero se il doppio bipolo è costituito di soli elementi passivi.

### Esercizio

Il doppio bipolo rappresentato in Figura 6.26a è in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega$ . Ora determineremo la matrice delle impedenze del corrispondente doppio bipolo di impedenze, Figura 6.26b.



**Fig. 6.26** (a) Doppio bipolo in regime sinusoidale; (b) corrispondente doppio bipolo di impedenze.



**Fig. 6.27** Doppio bipolo di Figura 6.21b con (a)  $\bar{I}_2 = 0$  e (b)  $\bar{I}_1 = 0$ .

L'impedenza propria  $\dot{Z}_{11} = \bar{V}_1 / \bar{I}_1|_{\bar{I}_2=0}$  è l'impedenza equivalente alla porta "1" quando la porta "2" è collegata a un circuito aperto, cioè  $\bar{I}_2 = 0$ , Figura 6.27a. In questa situazione l'impedenza dell'induttore è effettivamente in serie con quella

del condensatore; a sua volta, questa serie è in parallelo con l'impedenza del resistore. Di conseguenza deve essere

$$\dot{Z}_{11} = \frac{iR(\omega L - 1/\omega C)}{R + i(\omega L - 1/\omega C)}. \quad (148)$$

Per determinare l'impedenza mutua  $\dot{Z}_{21} = \bar{V}_2/I_1|_{\bar{I}_2=0}$  bisogna determinare la tensione  $\bar{V}_2|_{\bar{I}_2=0}$  nel circuito di Figura 6.27a. Applicando il partitore di tensione alla serie costituita dall'induttore e condensatore e utilizzando la definizione dell'impedenza propria  $\dot{Z}_{11}$  si ha immediatamente:

$$\bar{V}_2|_{\bar{I}_2=0} = \bar{V}_1|_{\bar{I}_2=0} \frac{-i/\omega C}{i(\omega L - 1/\omega C)} = \dot{Z}_{11} \bar{I}_1 \frac{-i/\omega C}{i(\omega L - 1/\omega C)}. \quad (149)$$

Essendo  $\dot{Z}_{21} = \bar{V}_2/I_1|_{\bar{I}_2=0}$ , dalle (148) e (149) abbiamo

$$\dot{Z}_{21} = \dot{Z}_{11} \frac{-i/\omega C}{i(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{-iR/\omega C}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{R}{(1 - \omega^2 LC) + i\omega RC}. \quad (150)$$

L'impedenza propria  $\dot{Z}_{22} = \bar{V}_2/I_2|_{\bar{I}_1=0}$  è l'impedenza equivalente alla porta "2" quando la porta "1" è collegata a un circuito aperto, cioè  $\bar{I}_1 = 0$ , Figura 6.27b. In questa situazione, a differenza di prima, l'impedenza dell'induttore è effettivamente in serie con quella del resistore; a sua volta questa serie è in parallelo con l'impedenza del condensatore. Di conseguenza deve essere

$$\dot{Z}_{22} = \frac{(R + i\omega L)(-i/\omega C)}{R + i(\omega L - 1/\omega C)}. \quad (151)$$

Lasciamo al lettore il calcolo dell'impedenza mutua  $\dot{Z}_{12} = \bar{V}_1/I_2|_{\bar{I}_1=0}$  e la verifica della proprietà di reciprocità  $\dot{Z}_{21} = \dot{Z}_{12}$ .

◆

### **Matrice delle ammettenze**

Se il doppio bipolo è caratterizzato su base tensione, il legame tra i fasori delle correnti e tensioni di porta è descritto dalle relazioni

$$\bar{I}_1 = \dot{Y}_{11} \bar{V}_1 + \dot{Y}_{12} \bar{V}_2, \quad (152)$$

$$\bar{I}_2 = \dot{Y}_{21} \bar{V}_1 + \dot{Y}_{22} \bar{V}_2, \quad (153)$$

dove  $\dot{Y}_{ij}$  sono gli elementi della *matrice delle ammettenze*.

La matrice delle impedenze (ammettenze), se è invertibile, è l'inversa della matrice delle ammettenze (impedenze). Se si escludono casi molto particolari, le matrici delle impedenze e delle ammettenze sono sempre invertibili.

Per un doppio reciproco la matrice delle ammettenze è simmetrica,

$$\dot{Y}_{21} = \dot{Y}_{12}. \quad (154)$$

Inoltre, la parte reale delle ammettenze proprie,  $\dot{Y}_{11}$  e  $\dot{Y}_{22}$ , non può essere mai minore di zero se il doppio bipolo è costituito di soli elementi passivi.

### **Esercizio**

Si determini la matrice delle ammettenze del doppio bipolo riportato in Figura 6.26b.



La caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo di impedenze è descritto dalle relazioni

$$\bar{V}_1 = \dot{H}_{11} \bar{I}_1 + \dot{H}_{12} \bar{V}_2, \quad (155)$$

$$\bar{I}_2 = \dot{H}_{12} \bar{I}_1 + \dot{H}_{22} \bar{V}_2; \quad (156)$$

$\dot{H}_{ij}$  sono gli elementi della *matrice ibrida*.

Per un doppio reciproco gli elementi mutui della matrice ibrida verificano la relazione

$$\dot{H}_{21} = -\dot{H}_{12}. \quad (157)$$

Inoltre, la parte reale degli elementi propri  $\dot{H}_{11}$  e  $\dot{H}_{22}$  non può essere mai minore di zero se il doppio bipolo è costituito di soli elementi passivi.

### Esercizio

Si determini la matrice delle ammettenze del doppio bipolo riportato in Figura 6.26b.



La caratterizzazione di un doppio bipolo di impedenze attraverso la matrice di trasmissione è descritto dalle relazioni

$$\bar{V}_1 = \dot{T}_{11} \bar{V}_2 + \dot{T}_{12} (-\bar{I}_2), \quad (158)$$

$$\bar{I}_1 = \dot{T}_{21} \bar{V}_2 + \dot{T}_{22} (-\bar{I}_2). \quad (159)$$

Per un doppio reciproco la matrice di trasmissione  $\dot{T}$  verifica la relazione

$$\det(\dot{T}) = 1. \quad (160)$$

La matrice di trasmissione di due doppi bipoli di impedenze collegati in cascata (vedi § 4.6.5) con matrici di trasmissione  $\dot{T}'$  e  $\dot{T}''$  è data da

$$\dot{T} = \dot{T}' \dot{T}''. \quad (161)$$

### Esercizio

Si determini la matrice di trasmissione del doppio bipolo riportato in Figura 6.26b.

## 6.9 Reti in regime periodico e quasi-periodico

Nello studio dei circuiti in regime sinusoidale condotto finora, si è visto come calcolare tensioni e correnti di un circuito quando le frequenze dei generatori sinusoidali sono uguali.

Spesso nei circuiti sono presenti generatori sinusoidali con frequenze diverse; inoltre, può verificarsi che il circuito contenga oltre a generatori sinusoidali anche generatori stazionari. La situazione in cui la tensione (l'intensità di corrente) di un generatore ideale di tensione (corrente) è esprimibile come somma di funzioni sinusoidali con diverse frequenze può essere trattata come se vi fossero tanti generatori di tensione sinusoidali collegati in serie. In questo paragrafo analizzeremo tutte queste situazioni che sono molto importanti nelle applicazioni.

### 6.9.1 Sovrapposizione di un regime stazionario e di un regime sinusoidale

Si consideri un circuito lineare  $C$  tempo invariante e dissipativo alimentato, ad esempio, da due generatori indipendenti di tensione, uno sinusoidale con pulsazione  $\omega$  e l'altro stazionario, Figura 6.28. I due generatori impongono al circuito un regime permanente dato dalla sovrapposizione dei regimi che ciascun generatore imporrebbe se agisse da solo: il regime stazionario imposto dal generatore stazionario e il regime sinusoidale a pulsazione  $\omega$  imposto dal generatore sinusoidale. Lasciamo al lettore la verifica di questa proprietà.

Si considerino i due circuiti ausiliari  $C'$  e  $C''$  ottenuti spegnendo un generatore per volta. Il circuito ausiliario  $C'$  è in regime stazionario e il circuito ausiliario  $C''$  è in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega$ . La soluzione di regime del circuito  $C$  è data da ( $k = 1, 2, \dots, l$ )

$$\begin{aligned} i_k(t) &= i'_k(t) + i''_k(t), \\ v_k(t) &= v'_k(t) + v''_k(t), \end{aligned} \tag{162}$$

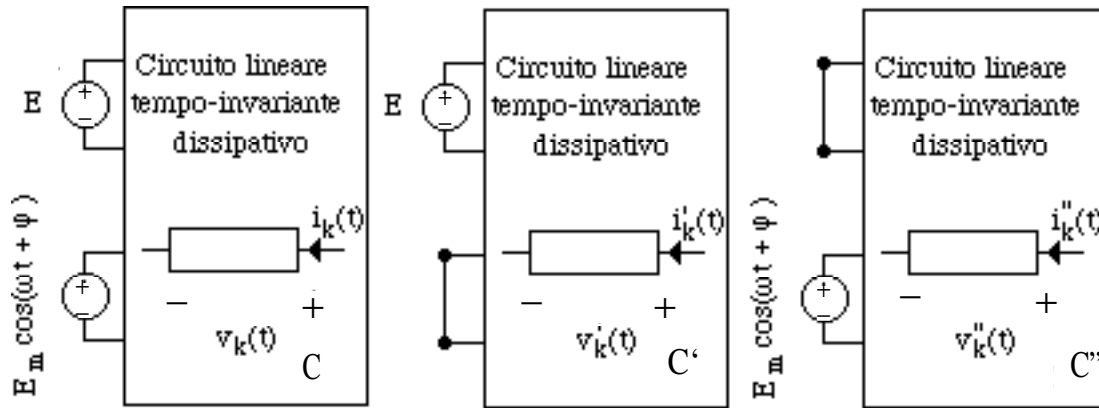
dove

$$\begin{aligned} i'_k(t) &= I_k, \\ v'_k(t) &= V_k, \end{aligned} \tag{163}$$

sono le soluzioni del circuito ausiliario  $C'$  in regime stazionario, e

$$\begin{aligned} i_k''(t) &= I_{mk} \cos(\omega t + \alpha_k), \\ v_k''(t) &= V_{mk} \cos(\omega t + \beta_k), \end{aligned} \quad (164)$$

sono le soluzioni del circuito  $C''$  in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega$ .



**Fig. 6.28** (a) Circuito a regime con un generatore stazionario e uno sinusoidale; (b) e (c) circuiti ausiliari.

Pertanto la soluzione di regime del circuito  $N$  è ( $k = 1, 2, \dots, l$ )

$$\begin{aligned} i_k(t) &= I_k + I_{mk} \cos(\omega t + \alpha_k), \\ v_k(t) &= V_k + V_{mk} \cos(\omega t + \beta_k). \end{aligned} \quad (165)$$

Questo regime non è più sinusoidale, ma è periodico: il periodo è quello imposto dal generatore sinusoidale,  $T = 2\pi/\omega$ .

Il circuito  $C'$  in regime stazionario può essere risolto con la tecnica illustrata nel § 6.2, mentre il circuito in regime sinusoidale  $C''$  può essere risolto con il metodo dei fasori.

La potenza istantanea  $p_k(t)$  assorbita dal  $k$ -esimo bipolo vale

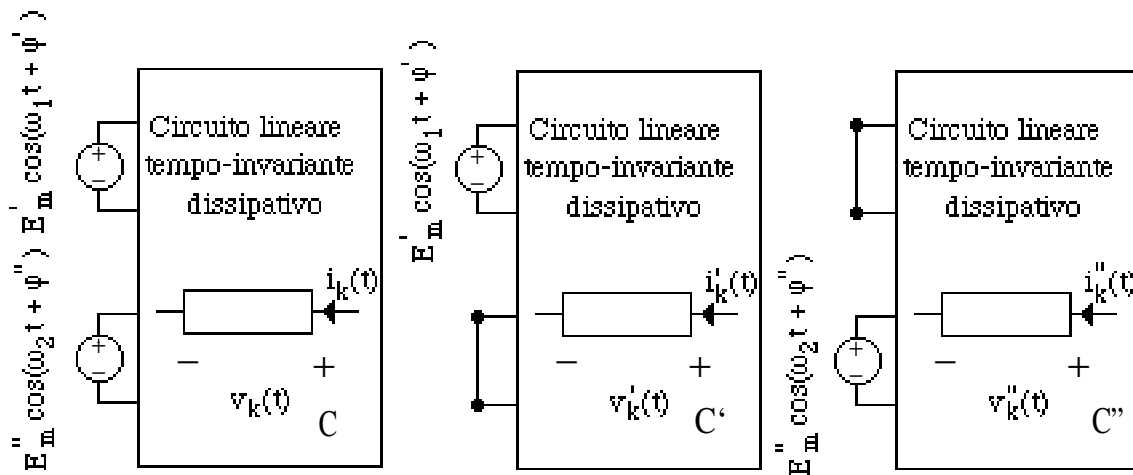
$$p_k(t) = v_k(t) i_k(t) = [V_k + V_{mk} \cos(\omega t + \beta_k)] [I_k + I_{mk} \cos(\omega t + \alpha_k)] \quad (166)$$

Per la potenza istantanea non vale la proprietà della sovrapposizione degli effetti: l'espressione (166) non è la somma delle potenze istantanee assorbite dal  $k$ -esimo bipolo nel circuito  $C'$  e nel circuito  $C''$ .

La potenza istantanea  $p_k(t)$  è una funzione periodica con periodo  $T = 2\pi/\omega$ . Si consideri il suo valore medio  $P_{av}^{(k)}$  sul periodo  $T$ . Si ottiene:

$$P_{av}^{(k)} = \frac{1}{T} \int_0^T p_k(\tau) d\tau = V_k I_k + \frac{1}{2} V_{mk} I_{mk} \cos(\alpha_k - \beta_k). \quad (167)$$

Questo è un risultato molto importante: la potenza media  $P_{av}^{(k)}$  è uguale alla somma delle potenze medie assorbite dal  $k$ -esimo bipolo nel regime stazionario del circuito  $C'$  e nel regime sinusoidale del circuito  $C''$ . Come si vedrà, tale risultato è di validità generale.



**Fig. 6.29** (a) Circuito a regime con due generatori sinusoidali; (b) e (c) circuiti ausiliari.

## 6.9.2 Sovrapposizione di regimi sinusoidali con diverse pulsazioni

Si consideri un circuito  $C$  lineare, tempo invariante e dissipativo, alimentato, ad esempio, da due generatori ideali di tensione sinusoidali che funzionano, rispettivamente, alle pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  con  $\omega_1 \neq \omega_2$ , (Figura 6.29). I due generatori impongono il regime dato dalla sovrapposizione dei regimi che ciascun generatore imporrebbe se agisse da solo: il regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_1$

imposto dal generatore sinusoidale a pulsazione  $\omega_1$  e il regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_2$  imposto dall'altro generatore sinusoidale a pulsazione  $\omega_2$ . Lasciamo al lettore la verifica di questa proprietà.

Si considerino i due circuiti ausiliari ottenuti spegnendo un generatore per volta. Il circuito ausiliario  $C'$  è in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_1$  e il circuito ausiliario  $C''$  è in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_2$ . La soluzione di regime del circuito  $C$  è data da ( $k = 1, 2, \dots, l$ )

$$\begin{aligned} i_k(t) &= i'_k(t) + i''_k(t), \\ v_k(t) &= v'_k(t) + v''_k(t), \end{aligned} \quad (168)$$

dove

$$\begin{aligned} i'_k(t) &= I'_{mk} \cos(\omega_1 t + \alpha'_k), \\ v'_k(t) &= V'_{mk} \cos(\omega_1 t + \beta'_k), \end{aligned} \quad (169)$$

sono le soluzioni del circuito  $C'$  in regime sinusoidale, e

$$\begin{aligned} i''_k(t) &= I''_{mk} \cos(\omega_2 t + \alpha''_k), \\ v''_k(t) &= V''_{mk} \cos(\omega_2 t + \beta''_k), \end{aligned} \quad (170)$$

sono le soluzioni del circuito  $C''$  in regime sinusoidale. Pertanto la soluzione di regime del circuito  $C$  è ( $k = 1, 2, \dots, l$ )

$$\begin{aligned} i_k(t) &= I'_{mk} \cos(\omega_1 t + \alpha'_k) + I''_{mk} \cos(\omega_2 t + \alpha''_k), \\ v_k(t) &= V'_{mk} \cos(\omega_1 t + \beta'_k) + V''_{mk} \cos(\omega_2 t + \beta''_k). \end{aligned} \quad (171)$$

Il circuito  $C'$  in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_1$  e il circuito  $C''$  in regime sinusoidale a pulsazione  $\omega_2$  possono essere risolti con il metodo fasoriale.

**Attenzione !!!:** il circuito di impedenze associato al circuito  $C'$  è diverso da quello associato al circuito  $C''$ , perché le pulsazioni di funzionamento sono diverse!

Il regime che si instaura nel circuito C non è sinusoidale, perché  $\omega_1 \neq \omega_2$ . È sempre possibile porre

$$\omega_1 = r \omega_2 \quad (172)$$

dove  $r$  è un numero reale positivo. Se  $r$  è un numero razionale, cioè  $r$  può essere espresso come rapporto tra due numeri interi,

$$r = \frac{n_1}{n_2} \quad (173)$$

allora le due sinusoidi hanno un periodo comune,

$$T_c = n_1 \frac{2\pi}{\omega_1} = n_2 \frac{2\pi}{\omega_2} \quad (174)$$

In questo caso le intensità di corrente e le tensioni descritte dalle (171) sono funzioni periodiche di periodo  $T_c$ , e quindi il regime è periodico di periodo  $T_c$ . Il caso più semplice è quando  $\omega_2 = m \omega_1$  con  $m$  intero (positivo).

Se  $r$  è un numero irrazionale, cioè non esprimibile come rapporto tra interi, (per esempio  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $e$ ,  $\ln 2$ , ...), allora le funzioni (171) non sono periodiche e, quindi, il regime che esse descrivono non è periodico: in questo caso il regime si dice *quasi-periodico* (pur essendo entrambe le componenti periodiche la loro somma dà luogo a un andamento temporale non periodico).

La potenza istantanea  $p_k(t)$  assorbita dal  $k$  – esimo bipolo vale

$$p_k(t) = v_k(t) i_k(t) = \left[ V'_{mk} \cos(\omega_1 t + \beta'_k) + V''_{mk} \cos(\omega_2 t + \beta''_k) \right] \cdot \left[ I'_{mk} \cos(\omega_1 t + \alpha'_k) + I''_{mk} \cos(\omega_2 t + \alpha''_k) \right] \quad (175)$$

Per la potenza istantanea, come nel caso analizzato in precedenza, non vale la proprietà della sovrapposizione degli effetti. L'espressione (175) non è la somma delle potenze istantanee assorbite dal  $k$  – esimo bipolo nel circuito C' e nel circuito C''.

Si assuma che  $r$  sia un numero razionale. La potenza istantanea  $p_k(t)$  è una funzione periodica con periodo  $T_c$ . Allora, il suo valore medio sul periodo  $T_c$ ,  $P_{av}^{(k)}$ , vale:

$$P_{mk} = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} p_k(\tau) d\tau = \frac{1}{2} V'_k I'_k \cos(\alpha'_k - \beta'_k) + \frac{1}{2} V''_{mk} I''_{mk} \cos(\alpha''_k - \beta''). \quad (176)$$

La potenza media  $P_{av}^{(k)}$  è uguale alla somma delle potenze medie assorbite dal  $k$ -esimo bipolo nel circuito  $C'$  e nel circuito  $C''$  se  $r$  è un numero razionale, cioè alla somma delle potenze medie assorbite se i generatori agissero uno alla volta.

### Osservazione

Attenzione !!!: la (176) non vale se  $\omega_1 = \omega_2$ , cioè se  $r = 1$ . Le relazioni (167) e (176) sono state ottenute utilizzando l'integrale definito notevole

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 1/2 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases} \quad (177)$$

dove  $m$  e  $n$  sono due numeri interi. Infatti, quando le frequenze dei generatori sinusoidali sono uguali non vale la sovrapposizione delle potenze medie.

Se  $r$  non è un numero razionale, non esiste un periodo comune, e la potenza media non può essere definita come nella (176). Per un regime quasi-periodico si definisce la potenza media  $P_{av}^{(k)}$  come

$$P_{av}^{(k)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T p_k(\tau) d\tau \right\}. \quad (178)$$

Sostituendo le (171) nella (178) si ottiene ancora (i calcoli sono un poco lunghi, ma semplici)

$$P_{av}^{(k)} = \frac{1}{2} V_k' I_k' \cos(\alpha_k' - \beta') + \frac{1}{2} V_{mk}'' I_{mk}'' \cos(\alpha_k'' - \beta''). \quad (179)$$

### **Proprietà: sovrapposizione delle potenze medie**

Si consideri una rete lineare, tempo-invariante in regime permanente con due generatori sinusoidali indipendenti con pulsazioni diverse. La potenza media assorbita dal generico bipolo è uguale alla somma delle potenze medie assorbite dal bipolo se i generatori agissero uno alla volta.

Tutti i risultati di questo paragrafo si estendono immediatamente al caso di  $m$  generatori sinusoidali indipendenti con  $m$  pulsazioni diverse.

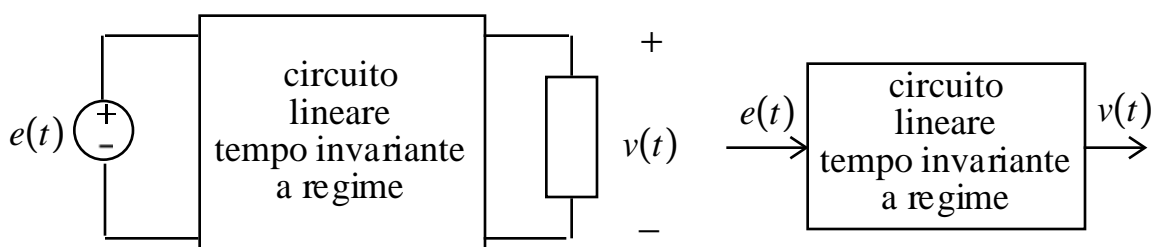
### **6.10 Risposta in frequenza di un circuito e funzione di rete**

Nell'analisi dei circuiti in regime sinusoidale condotta finora, si è visto come calcolare tensioni e correnti di un circuito quando le pulsazioni dei generatori sono assegnate. Nel caso in cui vi siano generatori con pulsazioni diverse, applicando la sovrapposizione degli effetti nel dominio del tempo, si può ricondurre l'analisi del problema allo studio di tanti circuiti ausiliari ciascuno dei quali contenga solo generatori sinusoidali con la stessa pulsazione.

Si consideri, ora, un circuito che contenga solo un generatore ideale (indipendente). Se si fa in modo che l'ampiezza della tensione (dell'intensità di corrente) del generatore sinusoidale di tensione (corrente) rimanga costante, e si fa variare la pulsazione del generatore stesso, si ottiene la cosiddetta *risposta in frequenza* del circuito. La risposta in frequenza può essere considerata come la descrizione del comportamento in regime sinusoidale in funzione della pulsazione.

La risposta in frequenza dei circuiti risulta importante per molte applicazioni, in particolare nelle telecomunicazioni. Una applicazione specifica si ha, ad esempio, nei filtri, che sono sistemi in grado di eliminare o attenuare fortemente segnali a frequenze indesiderate e invece far passare inalterati i segnali alle frequenze di interesse. Essi sono utilizzati nei sistemi radio, TV e telefonici per separare il canale di interesse da tutti quelli che sono effettivamente nel sistema.

Si consideri un circuito lineare tempo invariante in regime permanente con un solo generatore ideale (indipendente), ad esempio, un generatore di tensione  $e(t)$ , e lo si descriva come un *sistema ingresso-uscita*: la tensione del generatore  $e(t)$  svolge il ruolo di ingresso (ad, esempio, una grandezza da elaborare), mentre la tensione di un determinato bipolo o porta svolge il ruolo di uscita (la corrispondente grandezza elaborata). La tensione  $v(t)$  è la risposta (a regime) del circuito al segnale  $e(t)$ .



**Fig. 6.30**      *Circuito in regime permanente.*

### Osservazione

Siccome per i circuiti lineari a regime vale la sovrapposizione degli effetti, il caso più generale in cui sono presenti più *ingressi* può essere analizzato considerando acceso un solo generatore per volta e sovrapponendo, poi, gli effetti. In questo modo lo studio del problema più generale è ricondotto allo studio di circuiti a regime con un solo generatore.



Il circuito di Figura 6.30 può essere considerato come un doppio bipolo. Il generatore ideale potrebbe rappresentare una tensione applicata alla porta di ingresso e prodotta da un altro circuito. Il più delle volte essa rappresenta un “segnale” che deve essere “elaborato”. A sua volta, la tensione della porta di uscita potrebbe sollecitare un altro circuito.

Si assuma che il “segnale” in ingresso  $e(t)$ , definito per  $-\infty < t < +\infty$ , sia rappresentabile attraverso la somma discreta (e finita) di armoniche

$$e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \gamma_0) + E_1 \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + \dots + E_h \cos(\omega_h t + \gamma_h) + \dots \quad (180)$$

di funzioni sinusoidali con pulsazioni  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_h, \dots$ ;  $E_0, E_1, \dots, E_h, \dots$  e  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_h, \dots$  sono, rispettivamente, l'ampiezza e la fase delle singole componenti armoniche che costituiscono il segnale.

### Osservazione

In particolare, se

$$\omega_h = h\omega_0, \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (181)$$

$e(t)$  è una funzione periodica di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (182)$$

cioè  $e(t) = e(t + T)$  per ogni valore di  $t$ .

La somma data dalla (180) può essere costituita da un numero finito o infinito di termini. Quando il numero di termini è infinito ed è verificata la (182), la (180) è una serie di Fourier.

Una funzione periodica con periodo  $T$  può essere rappresentata attraverso la *serie di Fourier*

$$e(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_n e^{in\omega_0 t}, \quad (183)$$

dove

$$\tilde{E}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad (184)$$

se esiste l'integrale definito

$$\int_{-T/2}^{T/2} |e(t)| dt. \quad (185)$$

I coefficienti  $\tilde{E}_n$  sono complessi e verificano la condizione

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_{-n}^*, \quad (186)$$

perché  $e(t)$  è una funzione reale di variabile reale. Posto

$$\tilde{E}_n = \frac{1}{2} E_n e^{i\gamma_n}, \quad (187)$$

dove  $E_n/2$  è il modulo e  $\gamma_n$  è la fase del coefficiente complesso  $\tilde{E}_n$ , e utilizzando la condizione (186), la serie (183) può essere riscritta come

$$e(t) = \sum_{h=0}^{+\infty} E_h \cos(n\omega_0 t + \gamma_n). \quad (188)$$

Ci sono funzioni che possono essere rappresentate solo tramite una somma continua di funzioni sinusoidali, cioè attraverso l'*integrale di Fourier*

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (189)$$

dove  $\tilde{E} = \tilde{E}(\omega)$  è la *trasformata di Fourier* della funzione  $e(t)$

$$\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (190)$$

La trasformata di Fourier esiste se l'integrale definito

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)| dt \quad (191)$$

esiste. La trasformata di Fourier  $\tilde{E} = \tilde{E}(\omega)$  è una funzione complessa della variabile reale  $\omega$  e verifica la condizione

$$\tilde{E}(-\omega) = \tilde{E}^*(\omega), \quad (192)$$

perché  $e(t)$  è una funzione reale di variabile reale. Posto

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{2} E(\omega) e^{i\gamma(\omega)}, \quad (193)$$

( $E(\omega)/2$  è il modulo e  $\gamma(\omega)$  è la fase della funzione complessa  $\tilde{E}(\omega)$ ) e utilizzando la condizione (193) l'integrale (189) può essere riscritto come

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty E(\omega) \cos[\omega t + \gamma(\omega)] d\omega. \quad (194)$$

Le espressioni (188) e (194) possono considerarsi come una generalizzazione della somma discreta finita (180).



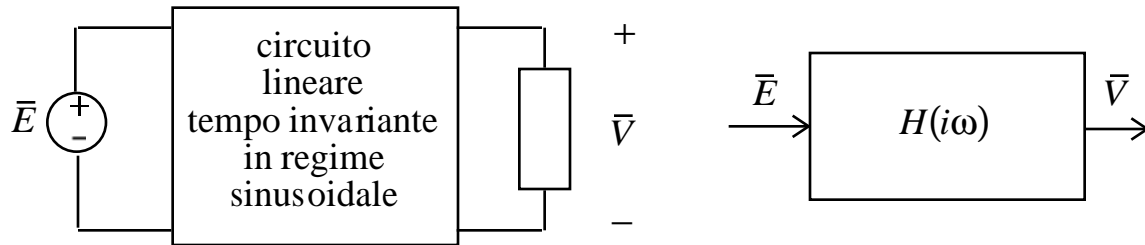
Il circuito in esame è lineare e quindi vale la sovrapposizione degli effetti. Indichiamo con  $v_h(t)$  la risposta (a regime) che si avrebbe se il generico termine sinusoidale  $E_h \cos(\omega t + \gamma_h)$  nella somma (180) fosse presente da solo; quindi  $v_h(t)$  è una funzione sinusoidale. La risposta (a regime)  $v = v(t)$  all'ingresso  $e = e(t)$  dato dalla somma (180) è uguale alla somma delle risposte (a regime)  $v_h(t)$  che si avrebbero se i singoli termini  $E_h \cos(\omega_h t + \gamma_h)$  agissero da soli, quindi

$$v(t) = v_0(t) + v_1(t) + \dots + v_h(t) + \dots \quad (195)$$

È evidente, allora, che bisogna determinare la risposta (a regime) quando l'ingresso è una generica funzione sinusoidale

$$e(t) = E \cos(\omega t + \gamma), \quad (196)$$

per ogni valore della pulsazione  $\omega$ . In questo modo la soluzione del problema è ricondotta allo studio di un circuito in regime sinusoidale al variare della pulsazione  $\omega$ . Quando si fa in modo che l'ampiezza e la fase iniziale del generatore rimanga costante e si fa variare la pulsazione del generatore stesso, si ottiene la cosiddetta *risposta in frequenza* del circuito.



**Fig. 6.31** Funzione di rete.

Il circuito in esame quando la tensione in ingresso è data dalla (197) può essere analizzato al variare della pulsazione  $\omega$  utilizzando il metodo dei fasori, Figura 6.31. Il fasore rappresentativo della tensione in ingresso è

$$\bar{E} = E e^{i\gamma}. \quad (197)$$

Indichiamo con

$$\bar{V} = V e^{i\beta} \quad (198)$$

il fasore rappresentativo della grandezza d'uscita. Il rapporto tra il fasore rappresentativo della grandezza d'uscita e il fasore rappresentativo della grandezza di ingresso

$$H(i\omega) = \frac{\bar{V}}{\bar{E}} \quad (199)$$

è, in generale, una grandezza complessa che è indipendente dal fasore di ingresso e dal fasore di uscita (per la linearità del circuito di impedenze e perché è presente

un solo generatore indipendente). Una volta fissate le grandezze di ingresso e di uscita,  $H$  dipende solo dalla costituzione del circuito in esame. Alla funzione complessa  $H = H(i\omega)$  di variabile si dà il nome di *funzione di rete* del circuito. Attraverso di essa si descrive la *risposta in frequenza* del circuito. Si intuisce che la dipendenza dalla pulsazione della funzione di rete è del tipo  $H = H(i\omega)$  perché le impedenze elementari che compongono il circuito dipendono dalla pulsazione o come  $i\omega L_k$  o come  $1/(i\omega C_k)$ .

Poniamo

$$H(i\omega) = A(\omega)e^{i\alpha(\omega)}. \quad (200)$$

Il modulo della funzione di rete,  $A = A(\omega)$ , prende il nome di risposta in ampiezza e l'argomento,  $\varphi = \varphi(\omega)$ , prende il nome di risposta in fase.

Si assuma che sia nota la risposta in frequenza  $H = H(i\omega)$  del circuito in esame. Sia  $\bar{V}_h$  il fasore rappresentativo della risposta (a regime) all'ingresso  $E_h \cos(\omega t + \gamma_h)$  e  $\bar{E}_h$  il fasore rappresentativo di quest'ultima. Allora dalla definizione di funzione di rete si ha

$$\bar{V}_h = H(i\omega_h)\bar{E}_h, \quad (201)$$

quindi

$$\bar{V}_h = A(\omega_h)e^{i\alpha(\omega_h)}\bar{E}_h, \quad (202)$$

ovvero

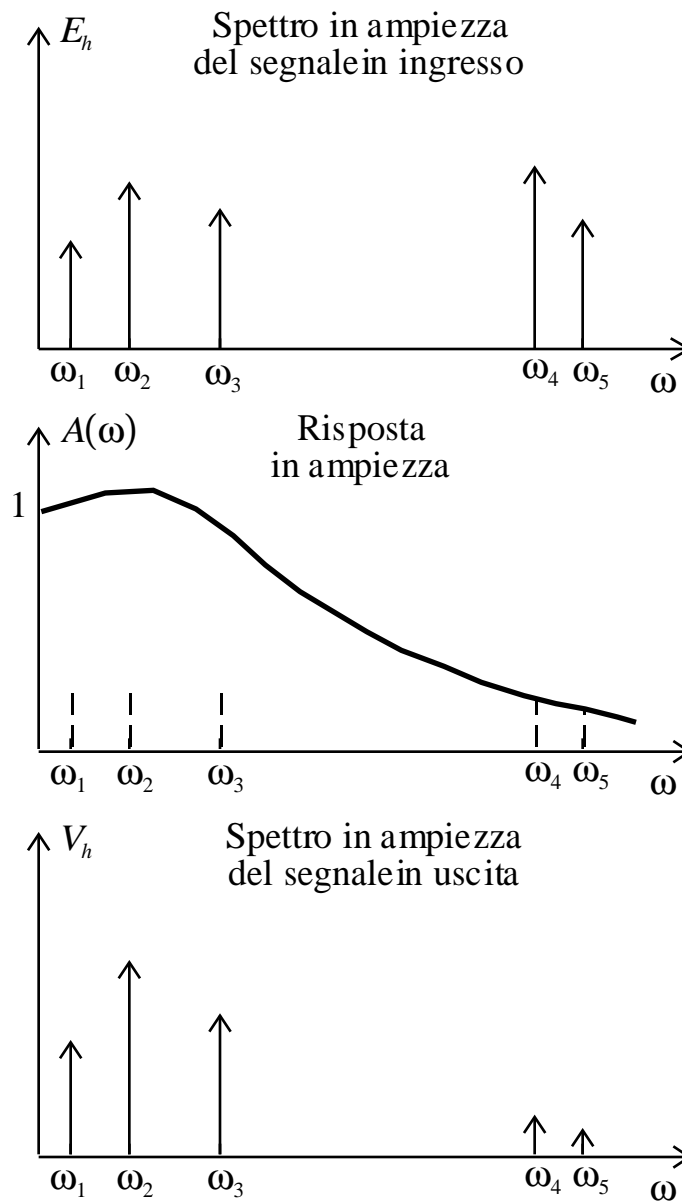
$$V_h = A(\omega_h)E_h \quad \text{e} \quad \beta_h = \varphi(\omega_h) + \gamma_h. \quad (203)$$

Di conseguenza per  $v_h(t)$  si ha

$$v_h(t) = A(\omega_h)E_h \cos[\omega_h t + \gamma_h + \varphi(\omega_h)], \quad (204)$$

quindi dalla (195) si ottiene

$$v(t) = \sum_h A(\omega_h) E_h \cos[\omega_h t + \gamma_h + \varphi(\omega_h)] . \quad (205)$$



**Fig. 6.32**     *Analisi di un circuito attraverso la risposta in frequenza.*

Le ampiezze massime delle funzioni sinusoidali presenti nella somma (180) e della somma (205) possono essere rappresentata graficamente attraverso una sequenza di segmenti verticali, dove la lunghezza di ciascun segmento è uguale all'ampiezza

dell'armonica corrispondente, così come illustrato in Figura 6.32. Nell'esempio riportato in questa figura la risposta in ampiezza introduce una forte attenuazione per le ampiezze delle armoniche con pulsazioni  $\omega_4$  e  $\omega_5$ , e una lieve amplificazione per le ampiezze delle armoniche con pulsazioni  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$ .

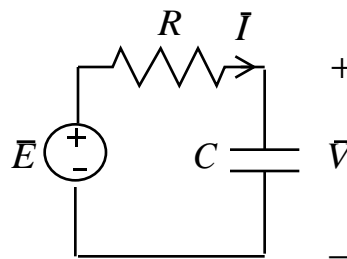
### Osservazione

È possibile misurare la risposta in ampiezza e la risposta in fase di un circuito (dissipativo) applicando in ingresso un generatore sinusoidale, misurando la grandezza di uscita quando il circuito è in regime sinusoidale, cioè dopo che il transitorio si è esaurito e ripetendo le misure per diversi valori delle frequenze del generatore. Esistono degli apparati di misura che realizzano in maniera automatica queste operazioni. Essi sono gli analizzatori di spettro.

◆

#### 6.10.1 Filtro passa-basso

Si consideri il circuito  $RC$  serie riportato in Figura 6.33. Si assuma come grandezza di ingresso la tensione  $\bar{E}$  e come grandezza d'uscita la tensione del condensatore  $\bar{V}$ .



**Fig. 6.33** *Circuito RC serie.*

La funzione di rete in questo caso è

$$H(i\omega) = \frac{\bar{V}}{\bar{E}} = \frac{-i/\omega C}{R - i/\omega C} = \frac{1}{1 + i\omega\tau}, \quad (206)$$

dove

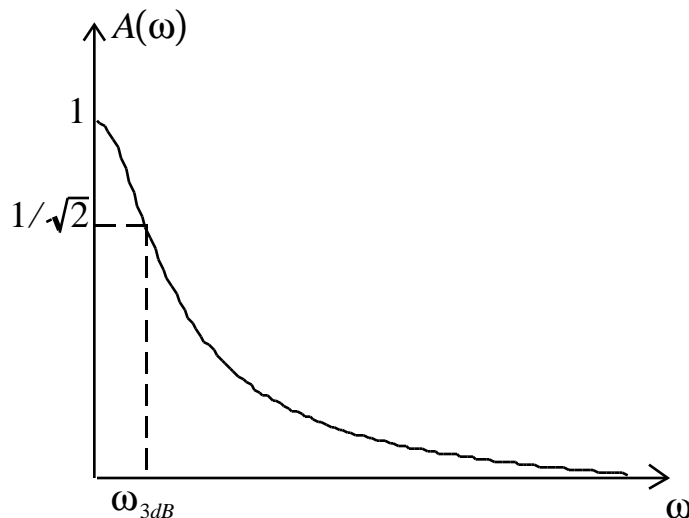
$$\tau = RC \quad (207)$$

è la costante di tempo del circuito  $RC$ . La risposta in ampiezza è

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad (208)$$

e la risposta in fase è

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau). \quad (209)$$



**Fig. 6.34** Risposta in ampiezza del filtro passa-basso.

In questo caso la risposta in ampiezza è una funzione monotona della pulsazione: essa assume il valore massimo  $A(0) = 1$  per  $\omega = 0$ , e decresce con legge monotona al crescere della pulsazione. Si noti che per  $\omega = 1/\tau$   $A(1/\tau) = 1/\sqrt{2}$ .

La pulsazione caratteristica  $\omega_{3dB} = 1/\tau$  prende il nome di *pulsazione di taglio a 3dB*<sup>2</sup>: alla pulsazione  $\omega_{3dB}$  la risposta in ampiezza è inferiore di 3dB al valore

<sup>2</sup> La grandezza  $y = 20 \log A = 10 \log A^2$  è la cosiddetta rappresentazione in *decibel* (dB) della risposta in ampiezza ( $\log(\cdot)$  è il logaritmo in base 10);  $A(\omega_1)$  è inferiore a  $A(\omega_2)$  di 3 dB se

massimo  $A(0) = 1$ . Infatti,  $1/\sqrt{2}$  rappresentato in *decibel* è uguale all'incirca a  $-3$ . In Figura 6.34 è illustrato l'andamento della risposta in ampiezza.

### Osservazione

La spiegazione dell'andamento qualitativo della risposta in ampiezza rappresentata in Figura 6.34 è la seguente. Nel circuito  $RC$  riportato in Figura 6.33 per  $\omega \rightarrow 0$  l'impedenza del condensatore tende all'infinito e quindi la tensione in uscita è proprio quella impressa dal generatore. Invece, per  $\omega \rightarrow \infty$  l'impedenza del condensatore tende a zero e quindi l'uscita tende anche essa a zero.



Un circuito con una risposta in ampiezza di questo tipo è l'esempio più semplice di *filtro passa-basso*. La sua funzione è quella di sopprimere tutte le componenti armoniche del segnale in ingresso ad alta frequenza, cioè tutte le armoniche con pulsazioni al di sopra di una *pulsazione di taglio* caratteristica  $\Omega_{LPF}$ , che potremmo fissare, ad esempio, uguale a tre volte la pulsazione di taglio a 3dB,  $\Omega_{LPF} = 3\omega_{3dB}$ . La *banda oscura* è l'intervallo di pulsazioni  $3\omega_{3dB} < \omega < \infty$ .

La *banda passante* del filtro passa-basso è l'intervallo di pulsazioni in cui la risposta in ampiezza è molto prossima al valore unitario, ad esempio l'intervallo  $0 < \omega < \omega_{3dB}$ . Le ampiezze delle armoniche con pulsazioni comprese nella banda passante sono praticamente inalterate. L'intervallo restante,  $\omega_{3dB} < \omega < 3\omega_{3dB}$ , prende il nome di *banda di transizione* tra la banda passante e la banda oscura. In questa banda c'è un'attenuazione delle ampiezze delle armoniche, ma non la loro completa soppressione.

### 6.10.2 Filtro passa-alto

Se nel circuito  $RC$  di Figura 6.33 si assume la corrente  $\bar{I}$  come grandezza di uscita, si ha la funzione di rete:

---


$$20 \log A(\omega_1) - 20 \log A(\omega_2) = -3, \text{ cioè se } A^2(\omega_1) = 10^{-0.3} A^2(\omega_2) \cong A^2(\omega_2)/2 \text{ e quindi se } A(\omega_1) \cong 0.71 A(\omega_2).$$

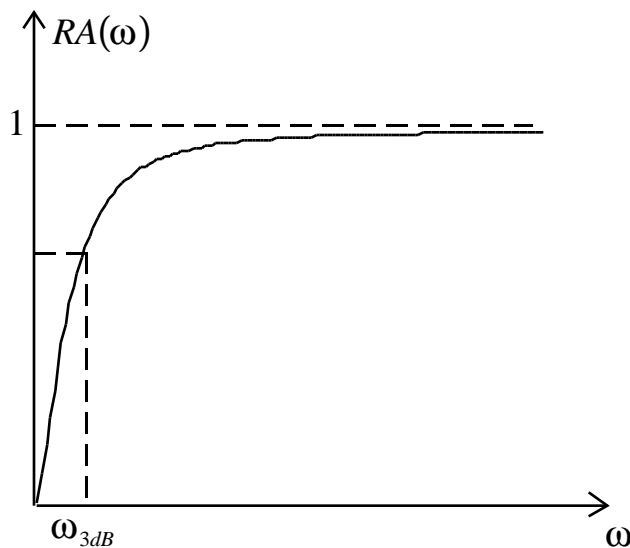
$$H(i\omega) = \frac{\bar{I}}{\bar{E}} = \frac{1}{R - i/\omega C} = C \frac{i\omega}{1 + i\omega\tau}. \quad (210)$$

La risposta in ampiezza è data da (per  $\omega > 0$ )

$$A(\omega) = C \frac{\omega}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}. \quad (211)$$

e la risposta in fase vale (per  $\omega > 0$ ):

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau). \quad (212)$$



**Fig. 6.35** *Risposta in ampiezza del filtro passa-alto.*

In questo caso, a causa della presenza del fattore  $|\omega|$  la risposta in ampiezza è uguale a zero per  $\omega = 0$  (questo è anche il valore minimo);  $A(\omega)$  cresce con legge monotona al crescere della pulsazione. Il valore massimo della risposta in ampiezza è  $A(\infty) = C/\tau = 1/R$ .

Anche in questo caso  $\omega_{3dB} = 1/\tau$  è la pulsazione di taglio a 3dB. Infatti si ha

$$A(\omega_{3dB}) = A(\infty)/\sqrt{2}. \quad (213)$$

In Figura 6.35 è illustrato l'andamento della risposta in ampiezza.

### Osservazione

L'andamento qualitativo della risposta in ampiezza riportata in Figura 6.35 si spiega facilmente in questo modo: per  $\omega \rightarrow 0$  l'impedenza del condensatore tende all'infinito, quindi si comporta da circuito aperto, di conseguenza la corrente tende a zero. Invece per  $\omega \rightarrow \infty$  l'impedenza tende a zero e l'ampiezza della corrente tende ad assumere il massimo valore.



Un circuito con una risposta in ampiezza di questo tipo è l'esempio più semplice di *filtro passa-alto*. La sua funzione è quella di sopprimere tutte le componenti armoniche a bassa frequenza di un segnale, cioè tutte le armoniche con pulsazioni al di sotto di una *pulsazione di taglio* caratteristica  $\Omega_c$ , che potrebbe essere, ad esempio, scelta uguale a un terzo della pulsazione di taglio a 3dB,  $\Omega_{HPF} = \omega_{3dB}/3$ , consentendo il passaggio di tutte le armoniche con pulsazioni superiori a  $\omega_{3dB}$ . In questo caso  $0 \leq \omega < \omega_{3dB}/3$  è la banda oscura del filtro, mentre  $\omega_{3dB} < \omega$  è la banda passante. La banda di transizione è  $\omega_{3dB}/3 < \omega < \omega_{3dB}$ .

Possiamo concludere che, il circuito *RC* illustrato in Figura 6.33 si comporta come un filtro passa-basso quando la grandezza di uscita è la tensione del condensatore, invece si comporta come filtro passa-alto quando la grandezza di uscita è la corrente, ovvero la tensione del resistore.

Il lettore dimostri che il circuito *RL* serie ha un comportamento duale a quello del circuito *RC* serie. Anche il circuito *RC* parallelo ha un comportamento duale se si considera la corrente del parallelo come grandezza di ingresso. Invece, il circuito *RL* parallelo si comporta come il circuito *RC* serie se si considera come grandezza di ingresso la corrente totale del parallelo e come uscita la corrente dell'induttore.

### 6.10.3 Filtro passa-banda

Si consideri ora il circuito *RLC* serie di Figura 6.36a e si assuma come grandezza di uscita la corrente  $\bar{I}$ . La funzione di rete è in questo caso l'ammettenza del bipolo *RLC* serie

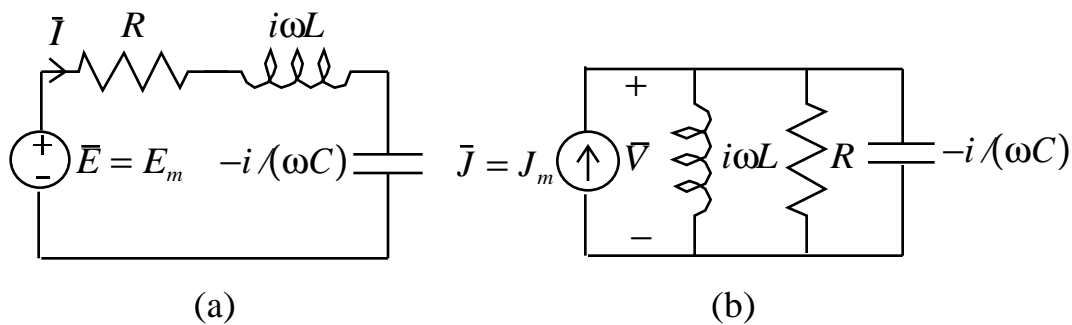
$$H(i\omega) = \frac{\bar{I}}{\bar{E}} = \frac{1}{R + i\omega L \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)}, \quad (214)$$

dove  $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$  è la pulsazione di risonanza. Per la risposta in ampiezza abbiamo

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)^2}}; \quad (215)$$

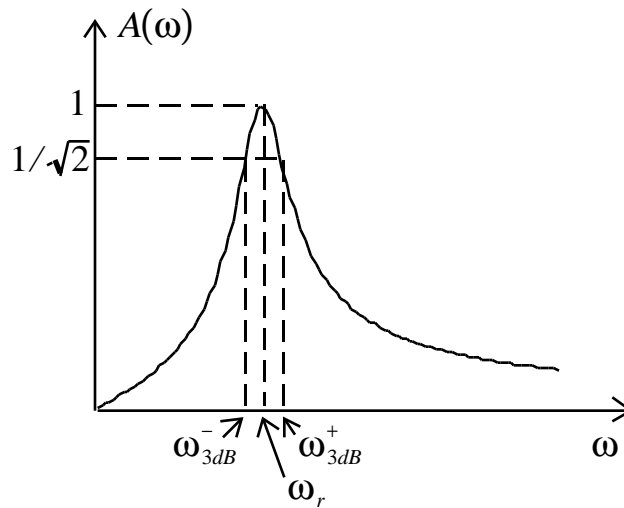
la risposta in fase è data dall'espressione

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[ \omega RC \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right) \right]. \quad (216)$$



**Fig. 6.36** (a) Circuito RLC serie, (b) circuito RLC parallelo.

L'andamento della risposta in ampiezza è riportato in Figura 6.37. La risposta in ampiezza in questo caso tende a zero per  $\omega \rightarrow 0$  e  $\omega \rightarrow \infty$ , ed è massima alla pulsazione  $\omega = \omega_r$ ; il massimo di  $A(\omega)$  è uguale a  $1/R$ .



**Fig. 6.37** Risposta in ampiezza del filtro passa-banda.

### Osservazione

L'andamento qualitativo della risposta in ampiezza riportata in Figura 6.37 si può spiegare qualitativamente in questo modo: per  $\omega \rightarrow 0$  l'impedenza del condensatore tende all'infinito, quindi si comporta come un circuito aperto, di conseguenza la corrente tende a zero; per  $\omega \rightarrow \infty$  l'impedenza dell'induttore tende all'infinito, quindi si comporta da circuito aperto, di conseguenza la corrente tende di nuovo a zero. Invece, per  $\omega = \omega_r$  l'impedenza della serie  $LC$  è uguale a zero e l'impedenza del bipolo  $RLC$  serie è, in modulo, minima; di conseguenza l'ampiezza della corrente è massima.

◆

Anche in questo caso possiamo definire la pulsazione di taglio a 3dB,  $\omega_{3dB}$ , come quel valore della pulsazione in corrispondenza del quale l'ampiezza massima è inferiore di 3 dB rispetto al valore massimo di  $A(\omega)$ ,

$$A(\omega_{3dB}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{R}. \quad (217)$$

La pulsazione  $\omega_{3dB}$  deve essere soluzione dell'equazione

$$\left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_{3dB}^2}\right)^2 = \frac{1}{Q_f^2} \frac{\omega_r^2}{\omega_{3dB}^2}, \quad (218)$$

dove  $Q_f$  è il fattore di qualità del circuito  $RLC$  serie,  $Q_f = \omega_r L / R$ . Posto  $x \equiv \frac{\omega_r^2}{\omega_{3dB}^2}$ , la (218) diventa

$$x^2 - \left(2 + \frac{1}{Q_f^2}\right)x + 1 = 0. \quad (219)$$

Questa equazione ha due radici positive, quindi esistono due valori positivi di  $\omega_{3dB}$  che verificano la (218). Facilmente si verifica che un valore di  $\omega_{3dB}$  è più piccolo di  $\omega_r$ ,  $\omega_{3dB}^-$ , e l'altro più grande,  $\omega_{3dB}^+$ .

Per  $Q_f \gg 1$  è possibile ottenere un'espressione approssimata per le pulsazioni di taglio che è molto semplice,

$$\omega_{3dB}^{\pm} \cong \omega_r \pm \frac{R}{2L} = \omega_r \left(1 \pm \frac{1}{2Q_f}\right). \quad (220)$$

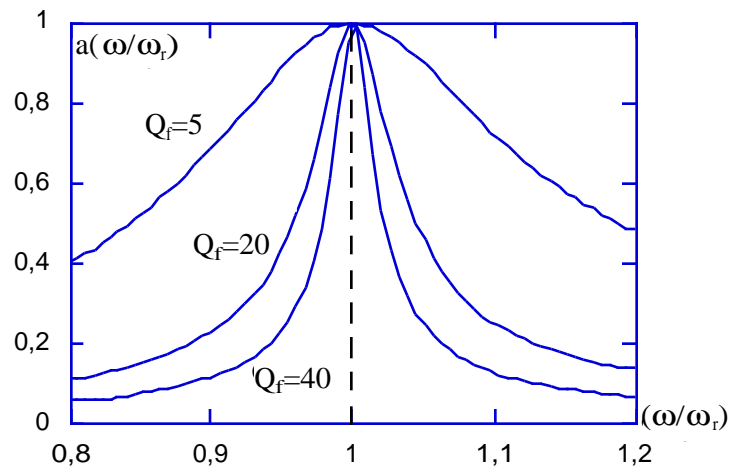
I valori della risposta in ampiezza sono compresi nell'intervallo  $\left(\frac{1}{R\sqrt{2}}, \frac{1}{R}\right)$  se i valori delle pulsazioni sono compresi nell'intervallo che ha il baricentro a  $\omega = \omega_r$  e lunghezza

$$\omega_{3dB}^+ - \omega_{3dB}^- \cong \frac{\omega_r}{Q_f}. \quad (221)$$

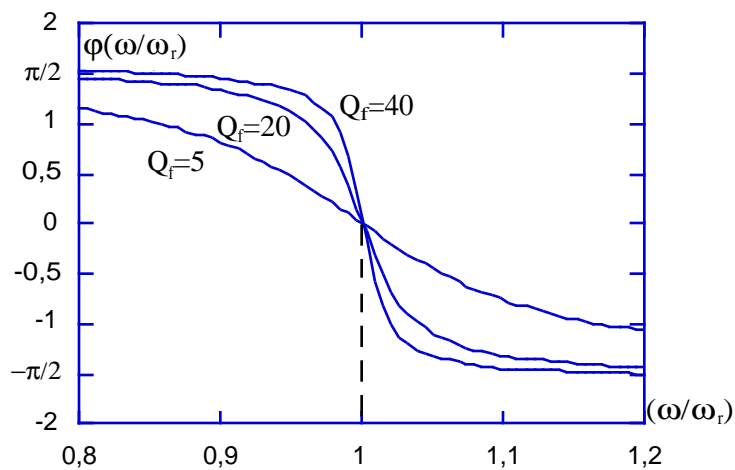
### Osservazione

Per evidenziare meglio la dipendenza della risposta in ampiezza dal fattore di qualità  $Q_f$  si consideri l'espressione della risposta in ampiezza normalizzata al suo valore massimo  $1/R$ ,

$$a(\omega/\omega_r) = \frac{A}{\frac{1}{R}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \frac{L^2}{R^2} \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\right)^2}}. \quad (222)$$



**Fig. 6.38** Grafici della risposta in ampiezza normalizzata per diversi valori di  $Q_f$ .



**Fig. 6.39** Grafici della risposta in fase per diversi valori di  $Q_f$ .

È immediato verificare che

$$a(\omega/\omega_r) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left[ \left(\omega/\omega_r\right) - \left(\omega_r/\omega\right) \right]^2}}. \quad (223)$$

Per la risposta in fase si ottiene

$$\varphi(\omega/\omega_r) = -\arctg\{Q[(\omega/\omega_r) - (\omega_r/\omega)]\}. \quad (224)$$

Nelle Figure 6.38 e 6.39 sono illustrati i grafici dell'ampiezza  $a(\omega/\omega_r)$  e della fase  $\varphi(\omega/\omega_r)$  al crescere del fattore di qualità. Quanto più alto è il fattore di qualità tanto più stretta è la regione nell'intorno di  $\omega/\omega_r = 1$  in cui la funzione  $a(\omega/\omega_r)$  è vicina al valore massimo e tanto più brusco è il cambiamento di pendenza della curva della fase iniziale.

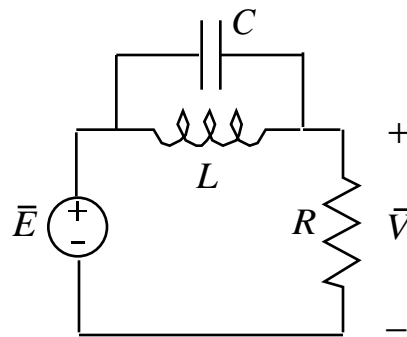


Il circuito in esame si comporta da *filtro passa-banda*. Un filtro passa-banda sopprime tutte le componenti armoniche di un segnale con pulsazioni all'esterno di un intervallo (banda) centrato alla frequenza di risonanza, lasciando praticamente inalterate le ampiezze delle armoniche con pulsazioni all'interno di quella banda. Nel caso in esame le ampiezze delle armoniche con pulsazioni esterne a una banda  $(\omega_r - \Omega_{BPF}, \omega_r + \Omega_{BPF})$  centrata in  $\omega_r$  (banda oscura del filtro passa-banda) vengono notevolmente attenuate, rispetto alle ampiezze delle armoniche con pulsazioni esterne a tale intervallo. Potremmo fissare, anche in questo caso,  $\Omega_{BPF}$  uguale a due o tre volte la pulsazione di taglio a 3dB,  $\Omega_{BPF} = 3\omega_{3dB}$ . La banda passante del filtro è l'intervallo  $(\omega_r - \omega_{3dB}, \omega_r + \omega_{3dB})$ ;  $2\omega_{3dB}$  è la larghezza della banda passante del filtro a 3dB. La larghezza della banda passante tende a zero per  $Q_f \rightarrow \infty$  come  $1/Q_f$ .

Un circuito con una risposta in ampiezza di questo tipo è un circuito *risonante alla pulsazione*  $\omega_r$ ; ( $\omega_r/2\pi$  è la frequenza di risonanza del circuito). In corrispondenza della pulsazione di risonanza l'impedenza equivalente della serie costituita dall'induttore e dal condensatore è nulla e quindi il modulo dell'impedenza equivalente vista dal generatore è minima (il fenomeno della risonanza in un circuito *RLC* serie viene descritto nel Capitolo 6).

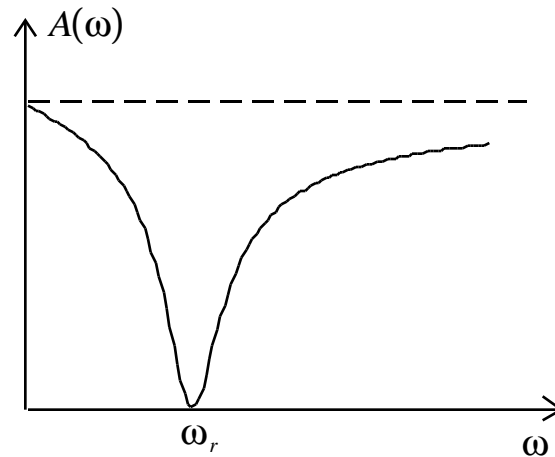
### 6.10.4 Filtro taglia-banda

Si consideri ora il circuito  $RLC$  riportato in Figura 6.40, si assuma come grandezza di uscita la tensione del resistore  $\bar{V}$  e come grandezza di ingresso la tensione  $\bar{E}$ .



**Fig. 6.40** Un circuito che funziona da filtro taglia banda.

Il lettore determini la funzione di rete, la risposta in ampiezza e la risposta in fase e verifichi che l'andamento qualitativo della risposta in ampiezza è quello riportato in Figura 6.41.



**Fig. 6.41** Risposta in ampiezza del filtro taglia-banda.

Questo circuito si comporta come un *filtro taglia-banda*. Un filtro taglia-banda ha la funzione di sopprimere tutte le componenti armoniche di un segnale con

pulsazioni all'interno di una certa banda e lasciare inalterate le ampiezze di tutte le armoniche con pulsazioni all'esterno di quella banda.

### Osservazione

L'andamento qualitativo della risposta in ampiezza riportata in Figura 6.41 si può spiegare qualitativamente in questo modo: per  $\omega \rightarrow 0$  l'impedenza dell'induttore tende a zero, quindi si comporta come un corto circuito, di conseguenza l'uscita  $\bar{V} \rightarrow \bar{E}$ ; per  $\omega \rightarrow \infty$  l'impedenza del condensatore tende all'infinito, quindi si comporta come un corto circuito, di conseguenza di nuovo l'uscita  $\bar{V} \rightarrow \bar{E}$ . Invece, per  $\omega = \omega_r$  l'ammettenza del parallelo  $LC$  è uguale a zero e, quindi, l'impedenza è infinita, di conseguenza  $\bar{V} = \bar{0}$ .



## 6.11 Cenni sui sistemi elettrici di potenza e sulle reti elettriche trifase

Nell'ingegneria dei sistemi elettrici di potenza funzionanti in regime sinusoidale (come quelli che producono energia elettrica e poi la distribuiscono per essere utilizzata nelle abitazioni, negli uffici, nei laboratori, nelle industrie, nei servizi, ...) si usa definire il fasore rappresentativo di una generica grandezza sinusoidale usando come modulo, al posto del valore massimo, il valore efficace della grandezza sinusoidale.

Il valore efficace  $X_{eff}$  (*valore quadratico medio*) di una grandezza periodica  $x(t)$  di periodo  $T$  è così definito

$$X_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} . \quad (225)$$

Allora il valore efficace della grandezza sinusoidale  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$  è dato da

$$A_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [A_m \cos(\omega t + \alpha)]^2 dt} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}. \quad (226)$$

Il fasore rappresentativo della grandezza sinusoidale  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$  può essere, allora, definito usando il valore efficace come modulo, cioè

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \bar{A} = A_{eff} e^{i\alpha}. \quad (227)$$

È immediato verificare che l'espressione della potenza media assorbita da un generico bipolo in regime sinusoidale è (non c'è più il fattore 1/2 !!!)

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(\tau) d\tau = I_{eff} V_{eff} \cos(\beta - \alpha) = I_{eff} V_{eff} \cos \phi, \quad (228)$$

dove abbiamo posto  $\phi = (\beta - \alpha)$ ; l'espressione dell'intensità di corrente è  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha)$  e quella della tensione è  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \beta)$ . La potenza media assorbita dal resistore è

$$P_{av} = R I_{eff}^2 = \frac{V_{eff}^2}{R}; \quad (229)$$

essa ricorda l'espressione del caso stazionario. La potenza complessa può essere espressa come

$$P = \bar{V} \bar{I}^* \quad (230)$$

(non c'è più il fattore 1/2 perché il modulo del fasore rappresentativo della tensione è il valore efficace della tensione e il modulo del fasore rappresentativo della corrente è il valore efficace della corrente). L'espressione della potenza reattiva assorbita da un bipolo diventa

$$Q = I_{eff} V_{eff} \sin \phi = P_{av} \tan \phi. \quad (231)$$

Ad esempio, nelle abitazioni ad uso civile la rete di distribuzione dell'energia elettrica opera in regime sinusoidale alla frequenza di 50 Hz con una tensione nominale di circa 230 volt: 230 volt è il valore efficace della tensione sinusoidale. L'andamento nel tempo della tensione nominale di esercizio è

$$e(t) = V_m \cos(\omega t + \gamma) \quad (232)$$

dove  $V_m = 230\sqrt{2} \cong 325$  volt,  $\omega = 2\pi 50 \cong 314$  rad/s e la fase iniziale  $\beta$  dipende dalla scelta dell'origine per la variabile temporale. Questo è l'andamento della tensione tra i due terminali di una presa quando ad essa non è collegato nessun apparecchio.

Nei sistemi di potenza i valori nominali di tensione e di corrente che assicurano il corretto funzionamento del *bipolo utilizzatore* (ad esempio, una lampada elettrica, un televisore, un computer, un motore elettrico monofase, ...) sono espressi tramite i valori efficaci.

In generale la caratteristica di un bipolo utilizzatore può essere specificata attraverso:

- (a) il valore efficace  $V_{eff}$  della tensione nominale di funzionamento;
- (b) la potenza media nominale  $P_{av}$  assorbita dal bipolo (oppure la potenza apparente);
- (c) il fattore di potenza  $\cos \phi_u$ ;
- (d) il segno della potenza reattiva assorbita.

Da queste grandezze è possibile ricavare tutte le altre, ad esempio, il valore efficace nominale della corrente e l'impedenza del bipolo  $\dot{Z} = R + iX$ , utilizzando le relazioni (essendo  $R \geq 0$  per i bipoli passivi)

$$I_{eff} = \frac{P_m}{V_{eff} \cos \phi_u}, \quad \phi_u = \text{sgn}(Q)|\phi_u|, \quad (233)$$

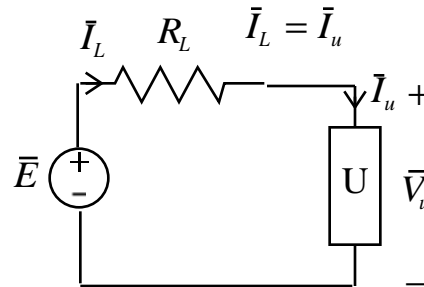
$$R = \text{Re}\{\dot{Z}\} = \frac{V_{eff}^2}{P_{av}} \cos^2 \phi_u, \quad X = \text{Im}\{\dot{Z}\} = R \tan \phi_u. \quad (234)$$

### 6.11.1 Trasmissione dell'energia elettrica

Si consideri la trasmissione di potenza elettrica lungo una linea elettrica, Figura 6.42. Abbiamo il generatore di tensione, il bipolo utilizzatore e una resistenza  $R_L$  che descrive gli effetti dovuti alla dissipazione per effetto joule presente nei conduttori della linea elettrica (qui stiamo ignorando altri effetti, come, ad esempio, quelli induttivi e capacitivi). In questo caso, è prevista una quantità fissa di potenza media da trasmettere

$$P_u = \operatorname{Re}\{\bar{V}_u \bar{I}_u^*\} = V_u I_u \cos \phi_u. \quad (235)$$

che è quella assorbita dall'utilizzatore in condizioni di funzionamento nominali;  $V_u$  è il valore efficace della tensione nominale dell'utilizzatore,  $\cos \phi_u$  è il fattore di potenza dell'utilizzatore e  $I_u$  è il valore efficace della corrente che attraversa la linea. Se  $R_L$  è piccola confrontata con il modulo dell'impedenza equivalente dell'utilizzatore, possiamo ritenere praticamente  $\bar{V}_u$  uguale alla tensione  $\bar{E}$ .



**Fig. 6.42** Schema semplificato di trasmissione dell'energia elettrica.

Una certa parte della potenza media prodotta dal generatore sarà assorbita dalla linea di trasmissione stessa a causa della dissipazione per effetto joule. Questa potenza è data dall'espressione

$$P_{\text{persa}} = R_L I_u^2. \quad (236)$$

Un conduttore di rame con la sezione di  $1 \text{ cm}^2$  e lungo  $1 \text{ km}$  ha una resistenza elettrica di circa  $0.2 \Omega$  (alla temperatura ambiente); pertanto un collegamento

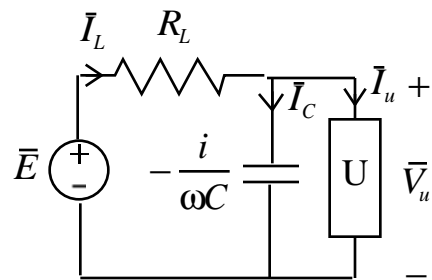
(realizzato con due conduttori) di 100 Km è caratterizzato da una resistenza elettrica di circa  $40 \, \Omega$  !!!

Per minimizzare questa perdita di potenza si hanno due alternative:

- minimizzare la corrente  $I_u$ . Poiché la potenza media trasmessa è fissa, ciò implica che si può aumentare (a) il fattore di potenza (il massimo è uno,  $\cos \phi_u = 1$ ), (b) la tensione  $V_u$ . La prima possibilità si basa sul rifasamento, la seconda possibilità è basilare nella trasmissione di potenza attraverso linee ad alta tensione.
- ridurre  $R_L$ , cosa che può essere realizzata aumentando la sezione trasversale dei conduttori o il numero di conduttori. Questa seconda possibilità è alla base dei sistemi trifase di distribuzione dell'energia elettrica.

### 6.11.2 Rifasamento

Si consideri il circuito rappresentato in Figura 6.43. Esso è stato ottenuto aggiungendo al circuito riportato in Figura 6.42 un condensatore in parallelo all'utilizzatore. In questo modo la tensione dell'utilizzatore  $\bar{V}_u$  non cambia di molto e il funzionamento dell'utilizzatore resta praticamente inalterato,  $\bar{V}_u \cong \bar{E}$ . Di conseguenza resterà praticamente inalterata la corrente  $\bar{I}_u$ . L'obiettivo è minimizzare la potenza dissipata lungo la linea minimizzando il valore efficace della corrente di linea senza alterare il funzionamento dell'utilizzatore.



**Fig. 6.43** Circuito di Figura 6.42 rifasato.

Indichiamo con  $P_u$  la potenza media assorbita dall'utilizzatore, con  $Q_u$  la potenza reattiva assorbita dall'utilizzatore, che nella quasi totalità dei casi è positiva, e con

$Q_c$  la potenza reattiva assorbita dal condensatore. La potenza complessa assorbita dal parallelo costituito dall'utilizzatore e dal condensatore è data da (la potenza reattiva assorbita dal condensatore è negativa)

$$\hat{P} = P_u + i(Q_u - |Q_c|) \Rightarrow |\hat{P}| = \sqrt{P_u^2 + (Q_u - |Q_c|)^2}. \quad (237)$$

D'altra parte siccome  $\bar{I}_L$  è l'intensità della corrente totale che attraversa questo parallelo, abbiamo anche ( $E$  è il valore efficace della tensione del generatore)

$$\hat{P} = \bar{V}_u I_L^* \cong \bar{E} I_L^* \Rightarrow |\hat{P}| = E I_L. \quad (238)$$

Combinando le (237) e (238) si ha

$$I_L \cong \frac{1}{E} \sqrt{P_u^2 + (Q_u - |Q_c|)^2}. \quad (239)$$

Da questa relazione è evidente che il valore efficace della corrente di linea  $I_L$  quando  $|Q_c| \neq 0$ , cioè quando è presente il condensatore, è inferiore al valore efficace nella situazione in cui il condensatore è assente ( $Q_c = 0$ ). In questo caso la corrente di linea è uguale proprio alla corrente che attraversa l'utilizzatore. Certamente con  $|Q_c| \neq 0$  abbiamo

$$I_L \cong \frac{1}{E} \sqrt{P_u^2 + (Q_u - |Q_c|)^2} < I_u. \quad (240)$$

C'è un valore di capacità, per fissata pulsazione, in corrispondenza della quale la potenza reattiva erogata dal condensatore è uguale a quella che assorbe l'utilizzatore,

$$|Q_c| = \omega C E^2 = Q_u, \quad (241)$$

e, quindi,

$$I_L = I_L^{rif} \equiv \frac{1}{E} \sqrt{P_u^2} < I_u. \quad (242)$$

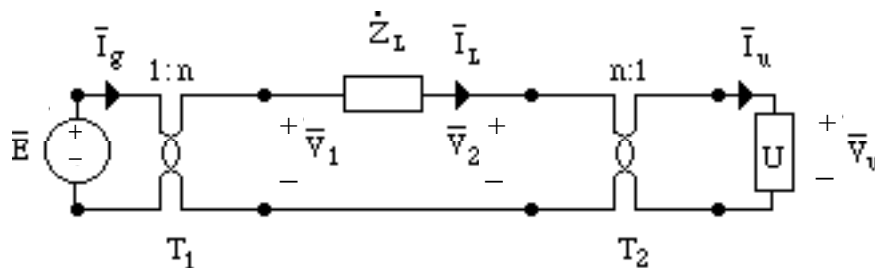
$I_L^{rif}$  è il valore minimo che il valore efficace della corrente di linea può assumere collegando in parallelo all'utilizzatore un condensatore.

Questo è il principio su cui si basa il rifasamento di un bipolo costituito da resistori e induttori. Rifasare un bipolo di tale genere significa introdurre una capacità in parallelo a esso in modo tale da ridurre la potenza apparente erogata dal generatore e lasciare inalterata la potenza media. In questo modo si riduce il valore efficace della corrente di linea e, quindi, la potenza dissipata per effetto joule lungo i conduttori con cui è realizzata la linea di trasmissione di energia elettrica.

Il bipolo equivalente al parallelo condensatore-utilizzatore ha un fattore di potenza più grande del fattore di potenza dell'utilizzatore (se la potenza reattiva assorbita dall'utilizzatore è positiva).

### 6.11.3 Trasmissione dell'energia elettrica in alta tensione

Si consideri il circuito rappresentato in Figura 6.44. Determinare la potenza media e la potenza reattiva assorbita dal bipolo di impedenza  $\dot{Z}_L$ . Il bipolo utilizzatore è caratterizzato dal valore efficace nominale  $V_u$  della tensione, dalla potenza media assorbita  $P_u$  e dal fattore di potenza  $\cos\phi_u$  (si assuma che la potenza reattiva da esso assorbita sia positiva). Pertanto è fissato il valore efficace nominale della corrente  $I_{effu}$  dell'utilizzatore e il ritardo del fasore della corrente rispetto a quello della tensione. Il circuito è alimentato con un generatore di tensione ( $\bar{E}$  è il fasore rappresentativo della tensione).



**Fig. 6.44** Modello semplificato di un sistema per la trasmissione dell'energia elettrica.

Nel circuito sono presenti due trasformatori ideali con rapporto di trasformazione  $n$  ( $n > 1$ ). Il primo trasformatore eleva il valore efficace della tensione di un fattore  $n$ , il secondo lo abbassa dello stesso fattore.

Questo circuito è il più semplice modello del sistema di trasmissione dell'energia elettrica: l'impedenza  $\dot{Z}_L$  porta in conto gli effetti dovuti ai conduttori delle linee elettriche con i quali viene trasmessa l'energia elettrica dalle centrali di produzione ai luoghi dove deve essere utilizzata (queste linee possono essere lunghe parecchie centinaia di chilometri, anche migliaia di chilometri).

Posto  $\dot{Z}_L = R_L + i X_L$  (la parte reale è legata alle perdite per effetto joule nei conduttori che trasportano l'energia elettrica e la parte immaginaria è legata al valore medio dell'energia del campo magnetico immagazzinata nella regione di spazio attorno ai conduttori), la potenza media e la potenza reattiva assorbite dal bipolo di impedenza  $\dot{Z}_L$  sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} P_L &= R_L I_{eff L}^2, \\ Q_L &= X_L I_{eff L}^2. \end{aligned} \quad (243)$$

Usando le equazioni caratteristiche del trasformatore ideale, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{V}_u &= \frac{\bar{V}_2}{n}, & \bar{V}_1 &= n\bar{E}, \\ \bar{I}_L &= \frac{\bar{I}_u}{n}, & \bar{I}_g &= n\bar{I}_L. \end{aligned} \quad (244)$$

Pertanto la potenza attiva e la potenza reattiva assorbite da  $\dot{Z}_L$  sono

$$P_L = \frac{1}{n^2} (R_L I_{eff u}^2), \quad Q_L = \frac{1}{n^2} (X_L I_{eff u}^2). \quad (245)$$

Allora tra la tensione del generatore di tensione e la tensione del bipolo utilizzatore c'è la relazione ( $\dot{Z}_u$  è l'impedenza dell'utilizzatore):

$$\bar{V}_u - \bar{E} = \frac{1}{n^2} (\dot{Z}_L \bar{I}_u) = \frac{1}{n^2} \left( \frac{\dot{Z}_L}{\dot{Z}_u} \bar{V}_u \right). \quad (246)$$

Un conduttore di rame con la sezione di  $1 \text{ cm}^2$  e lungo  $1 \text{ km}$  ha una resistenza elettrica di circa  $0.2 \Omega$  (alla temperatura ambiente); pertanto un collegamento (realizzato con due conduttore) di  $100 \text{ Km}$  è caratterizzato da una resistenza elettrica di circa  $40 \Omega$ . Il modulo dell'impedenza equivalente di un'utenza domestica è dell'ordine di  $10 \Omega$ , quella di un condominio è molto più piccola perché è l'equivalente di tante "impedenze" equivalenti in parallelo, e così via. Allora è chiaro che la resistenza del collegamento e così anche la reattanza possono essere molto più grandi di quelle dell'utilizzatore. Se  $n$  fosse uguale a uno, il che è equivalente ad un sistema senza trasformatori, avremmo che, la maggior parte della potenza prodotta dal generatore sarebbe assorbita dal conduttore di collegamento e la tensione sull'utilizzatore sarebbe molto diversa da quella del generatore. La cosa più grave sarebbe che la tensione dell'utilizzatore dipenderebbe sensibilmente dalla sua impedenza (ad esempio, se il vicino di casa accendesse in questo istante la lavatrice o il forno elettrico la tensione potrebbe ridursi in modo tale da non potere far funzionare il computer con cui sto scrivendo). È, allora, evidente che se si utilizzano due trasformatori, così come descritto in Figura 6.44, con un rapporto di trasformazione  $n$  molto elevato ( $n$  può essere anche dell'ordine di 1000), si riduce drasticamente la potenza assorbita dai conduttori di collegamento (essa deve essere molto più piccola di quella realmente utilizzata) e la tensione sull'utilizzatore si discosta di poco dalla tensione del generatore, perché viene ridotto drasticamente il valore efficace della corrente nei conduttori di collegamento rispetto alla corrente dell'utilizzatore. In questo modo, dovendo restare inalterata la potenza elettrica assorbita dal bipolo utilizzatore, viene aumentato notevolmente il valore efficace della tensione tra i conduttori di collegamento (si raggiungono valori dell'ordine delle centinaia di kV). Siccome non è possibile realizzare generatori di tensione sinusoidale di potenza con valori efficaci così elevati, c'è bisogno del trasformatore  $T_1$  che eleva la tensione. Tipicamente in una stazione di potenza la tensione prodotta da un generatore in alternata varia tra 10 e 30 kV. Viene, poi, aumentata fino a centinaia di kV per trasmissioni a lunga distanza e infine diminuita per le fabbriche, per i laboratori, gli uffici, le abitazioni, ... .

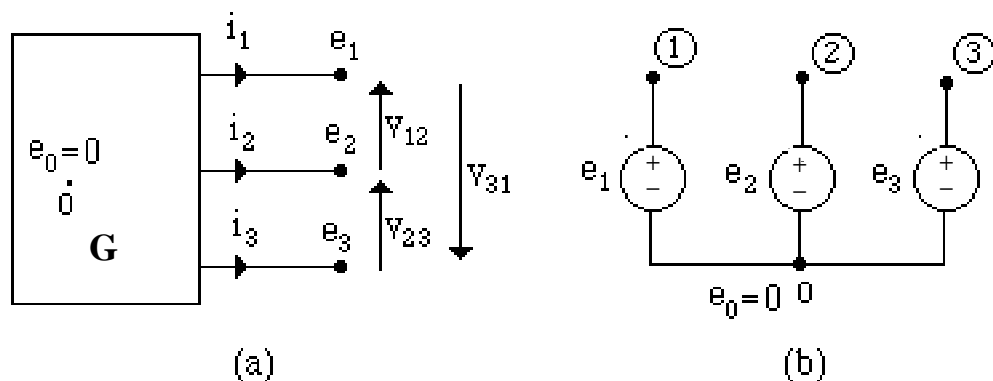
Le perdite lungo la linea si riducono, anche, mantenendo il fattore di potenza dell'utilizzatore quanto più possibile prossimo a uno (vedi esempio sul rifasamento). Per ridurre il fattore di potenza, a parità di potenza media assorbita, basta collegare un condensatore in parallelo all'utilizzatore se l'utilizzatore assorbe potenza reattiva (vedi l'esempio del rifasamento).

Un sistema di potenza con tensioni sinusoidali, quindi, è più conveniente di un sistema con tensioni costanti poiché con esso è più facile aumentare e diminuire la tensione con trasformatori (questi trasformatori devono essere necessariamente realizzati con induttori accoppiati perché le grandezze elettriche in gioco sono molto elevate). Inoltre i generatori di tensioni sinusoidali (alternatori) sono più facili da costruire rispetto alla apparecchiature che producono tensioni costanti (generatori in continua o dinamo), perché gli avvolgimenti ad alta tensione e quindi ad elevate correnti sono sulla parte fissa dell'apparecchiatura (statore), invece che sulla parte rotante (rotore) come in una dinamo.

#### 6.11.4 Sistemi trifase

In questo paragrafo spiegheremo il motivo per cui i generatori trifase e più in generale le reti trifase sono impiegati nei sistemi di potenza.

Un bipolo generatore di tensione sinusoidale di un sistema di potenza prende il nome di *generatore monofase*. Oltre ai generatori monofase, nei sistemi di potenza in regime sinusoidale sono molto diffusi i *generatori trifase*.



**Fig. 6.45** (a) Generatore trifase, (b) circuito equivalente; le punte delle frecce che accompagnano i simboli delle tensioni indicano i terminali contrassegnati con il segno “+”.

Si consideri un tripolo  $\mathbf{G}$  e lo si caratterizzi attraverso i potenziali di nodo, Figura 6.45 (il nodo di riferimento per il potenziale è all'interno del tripolo). Si assuma che i tre potenziali  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_3(t)$  siano indipendenti dalle tre correnti  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$ . Questo è un *tripolo generatore indipendente di tensione*. In Figura 6.45b è illustrato un circuito equivalente a stella costituito di tre bipoli generatori indipendenti di tensione (è possibile anche considerare un circuito equivalente a triangolo).

Ai potenziali di nodo  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_3(t)$  si dà il nome di *tensioni stellate* del generatore (esse sono proprio le tensioni su ciascun bipolo generatore del circuito equivalente a stella di Figura 6.45b). Alle tre tensioni  $v_{12}(t)$ ,  $v_{23}(t)$ ,  $v_{31}(t)$  si dà il nome di *tensioni concatenate*. Per esse si ha

$$\begin{aligned} v_{12} &= e_1 - e_2, \\ v_{23} &= e_2 - e_3, \\ v_{31} &= e_3 - e_1. \end{aligned} \tag{247}$$

Le tre tensioni stellate sono tra loro indipendenti, invece le tre tensioni concatenate non sono indipendenti tra di loro: per la legge di Kirchhoff per le tensioni la loro somma deve essere uguale a zero

$$v_{12} + v_{23} + v_{31} = 0. \tag{248}$$

Il tripolo  $\mathbf{G}$  prende il nome di *generatore sinusoidale trifase simmetrico* di tensione se

$$\begin{aligned} e_1(t) &= E_m \cos(\omega t + \gamma), \\ e_2(t) &= E_m \cos(\omega t + \gamma - 2\pi/3), \\ e_3(t) &= E_m \cos(\omega t + \gamma - 4\pi/3). \end{aligned} \tag{249}$$

I fasori rappresentativi delle tensioni stellate sono

$$\begin{aligned}
\bar{E}_1 &= E_{eff} e^{i\gamma}, \\
\bar{E}_2 &= E_{eff} e^{i(\gamma-2\pi/3)}, \\
\bar{E}_3 &= E_{eff} e^{i(\gamma-4\pi/3)},
\end{aligned} \tag{250}$$

dove

$$E_{eff} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \tag{251}$$

Si noti che per l'insieme delle tensioni stellate vale la relazione

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0 \tag{252}$$

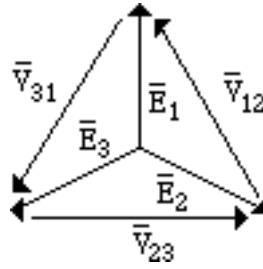
e, quindi,

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \tag{253}$$

I fasori rappresentativi delle tensioni concatenate sono

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{12} &= \bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \sqrt{3} \bar{E}_1 e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} E_{eff} e^{i(\phi-\pi/6)}, \\
\bar{V}_{23} &= \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = \sqrt{3} \bar{E}_2 e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} E_{eff} e^{i(\phi-5\pi/6)}, \\
\bar{V}_{31} &= \bar{E}_3 - \bar{E}_1 = \sqrt{3} \bar{E}_3 e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} E_{eff} e^{i(\phi-3\pi/2)}.
\end{aligned} \tag{254}$$

Il diagramma fasoriale delle tensioni stellate e delle tensioni concatenate è illustrato in Figura 6.46. Sia per le tensioni stellate che per quelle concatenate i fasori rappresentativi formano una *terna simmetrica diretta* (l'aggettivo “diretta” sta a indicare che il fasore  $\bar{E}_1$  ( $\bar{V}_{12}$ ) è in ritardo rispetto al fasore  $\bar{E}_2$  ( $\bar{V}_{23}$ ) e così il fasore  $\bar{E}_2$  ( $\bar{V}_{23}$ ) è in ritardo rispetto al fasore  $\bar{E}_3$  ( $\bar{V}_{31}$ )).



**Fig. 6.46** Diagramma fasoriale delle tensioni stellate e concatenate di un sistema trifase simmetrico diretto.

Si supponga di avere un generatore che produca una terna di tensioni sinusoidali come specificato dalle equazioni (250). Si connetta al tripolo **G** un tripolo *utilizzatore* **U** rappresentato attraverso una configurazione a stella di tre bipoli di impedenze  $\dot{Z}_1$ ,  $\dot{Z}_2$ ,  $\dot{Z}_3$  (in Figura 6.47 è rappresentato il circuito di impedenze corrispondente); è possibile considerare anche una rappresentazione equivalente a triangolo attraverso le impedenze  $\dot{Z}_{12}$ ,  $\dot{Z}_{23}$ ,  $\dot{Z}_{31}$  (queste impedenze sono legate a quelle della rappresentazione a stella attraverso le relazioni di trasformazione stella-triangolo che valgono per i resistori).

Applicando il metodo dei potenziali di nodo si ottiene

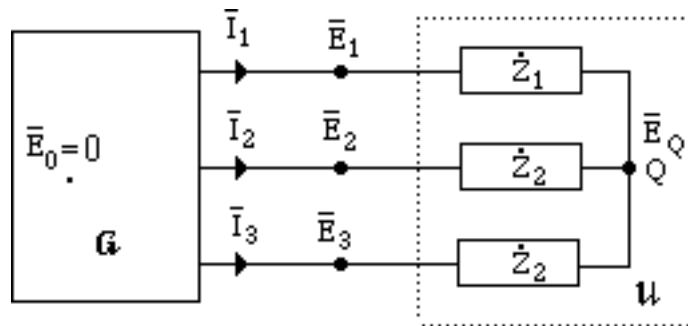
$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_q}{\dot{Z}_1}, \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_q}{\dot{Z}_2}, \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_q}{\dot{Z}_3}, \quad (255)$$

dove  $\bar{E}_q$  è il potenziale del centro stella dell'utilizzatore. Dovendo essere

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0, \quad (256)$$

utilizzando le (255) si ottiene l'espressione per il potenziale  $\bar{E}_q$ ,

$$\bar{E}_q = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}}. \quad (257)$$



**Fig. 6.47** Sistema trifase.

Se le tre impedenze  $\dot{Z}_1$ ,  $\dot{Z}_2$ ,  $\dot{Z}_3$  sono diverse tra di loro, non c'è nessuna relazione particolare tra i fasori rappresentativi delle tre intensità di corrente (in questo caso si dice che le tre correnti sono *squilibrare* e l'utilizzatore è *squilibrato*).

Si consideri ora il caso in cui le tre impedenze siano uguali,

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z}. \quad (258)$$

In questo caso, essendo  $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$ , si ottiene dalla (257)

$$\bar{E}_Q = 0. \quad (259)$$

e quindi

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}}, \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}}, \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}}. \quad (260)$$

Posto

$$\dot{Z} = Ze^{i\phi_u}, \quad (261)$$

dalle (260) si ha

$$\bar{I}_1 = \frac{E_{eff}}{Z} e^{i(\gamma - \phi_u)}, \quad \bar{I}_2 = \frac{E_{eff}}{Z} e^{i(\gamma - \phi_u - 2\pi/3)}, \quad \bar{I}_3 = \frac{E_{eff}}{Z} e^{i(\gamma - \phi_u - 4\pi/3)}. \quad (262)$$

Le espressioni delle corrispondenti intensità di corrente nel dominio del tempo sono

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{E_m}{Z} \cos(\omega t + \gamma - \phi_u), \\ i_2(t) &= \frac{E_m}{Z} \cos(\omega t + \gamma - \phi_u - 2\pi/3), \\ i_3(t) &= \frac{E_m}{Z} \cos(\omega t + \gamma - \phi_u - 4\pi/3). \end{aligned} \quad (263)$$

Quando le tre impedenze sono uguali, le tre correnti costituiscono anche esse una terna simmetrica diretta. In questo caso si dice che il sistema trifase è equilibrato nelle correnti e si dice che l'utilizzatore è un *carico equilibrato*. Si osservi che le tre intensità di corrente (263) (o (262)) sono le stesse che si avrebbero se i due centri stella fossero collegati attraverso un corto circuito, cioè con un conduttore ideale.

Si calcoli ora la potenza istantanea fornita dal generatore trifase **G** all'utilizzatore quando esso è equilibrato. Si ottiene

$$p(t) = i_1(t)e_1(t) + i_2(t)e_2(t) + i_3(t)e_3(t). \quad (264)$$

Sostituendo nella (264) le espressioni (249) e (263) si ottiene

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{E_{eff}^2}{Z} [\cos \phi_u + \cos(2\omega t + 2\gamma - \phi_u)] + \\ &\quad \frac{E_{eff}^2}{Z} [\cos \phi_u + \cos(2\omega t + 2\gamma - \phi_u - 4\pi/3)] + \\ &\quad \frac{E_{eff}^2}{Z} [\cos \phi_u + \cos(2\omega t + 2\gamma - \phi_u - 8\pi/3)]. \end{aligned} \quad (265)$$

È facile verificare, tramite il calcolo diretto, che la somma dei tre termini sinusoidali a pulsazione  $2\omega$  è identicamente nulla (anche ad essi corrisponde una terna simmetrica di fasori rappresentativi). Quindi la potenza istantanea erogata dal generatore trifase è costante nel tempo ed è

$$p(t) = 3 \frac{E_{eff}^2}{Z} \cos \phi_u. \quad (266)$$

Pertanto la potenza erogata da un generatore trifase, quando il sistema delle correnti è equilibrato (carico equilibrato), è costante in regime sinusoidale. Di conseguenza la coppia meccanica richiesta dall'alternatore trifase è anche essa costante nel tempo (quindi non si hanno vibrazioni nell'intero sistema meccanico che fornisce l'energia che l'alternatore trasforma in energia elettrica). In questi casi la potenza istantanea è uguale a quella media e quindi è uguale alla parte reale della potenza complessa assorbita dal tripolo utilizzatore. Invece, negli alternatori monofase la coppia è variabile nel tempo perché la potenza istantanea varia periodicamente.

### Osservazione

Nel sistema trifase con carico equilibrato la potenza trasmessa, data dall'espressione (266), è tre volte la potenza media che potremmo trasmettere, a parità di tensione  $E_{eff}$ , con un sistema monofase. Per trasmettere la stessa potenza con sistemi monofase avremmo bisogno di tre sistemi monofase in parallelo, quindi sei conduttori, invece dei tre del sistema trifase. È un notevole risparmio.



Nelle industrie, nei laboratori, ... la società per l'energia elettrica fornisce un'alimentazione trifase con una tensione concatenata a 380 volt e quindi una tensione stellata a circa 230 volt (380 e 230 sono i valori efficaci e la frequenza è sempre 50 Hz).

Per i carichi equilibrati i valori nominali di tensione e di corrente che assicurano il corretto funzionamento (ad esempio, un motore trifase, l'alimentatore di un sistema di calcolo o di un impianto di telecomunicazione, ...) sono espressi tramite i valori efficaci. In generale la caratteristica può essere specificata, allo stesso modo del caso monofase, cioè attraverso il valore efficace della tensione concatenata  $V_{eff}$  (o della tensione stellata), la potenza media nominale  $P_m$  assorbita

dal carico (oppure la potenza apparente), il fattore di potenza  $\cos\phi_u$  e il segno della potenza reattiva assorbita. Da queste grandezze è possibile ricavare tutte le altre, come nel caso dell'utilizzatore monofase. Per il valore efficace nominale delle correnti, per lo sfasamento del fasore della corrente rispetto a quello della tensione stellata corrispondente e per l'impedenza del bipolo equivalente nella rappresentazione a stella si hanno le seguenti formule (essendo  $R \geq 0$  per gli elementi passivi)

$$I_{eff} = \frac{P_m}{\sqrt{3} V_{eff} \cos \phi_u}, \quad \phi = \text{sgn}(Q) |\phi_u| \quad (267)$$

$$R = \text{Re}\{\dot{Z}\} = \frac{\sqrt{3} V_{eff}^2}{P_m} \cos^2 \phi_u, \quad X = \text{Im}\{\dot{Z}\} = R \tan \phi_u. \quad (268)$$

## 6.12 Cenni sui numeri complessi

Si riepilogano i concetti e le operazioni elementari relativi ai numeri complessi. Sia  $z$  un numero complesso. Esso è definito dalla *parte reale*  $x = \text{Re}\{z\}$  e dalla *parte immaginaria*  $y = \text{Im}\{z\}$ :

$$z = x + i y, \quad (269)$$

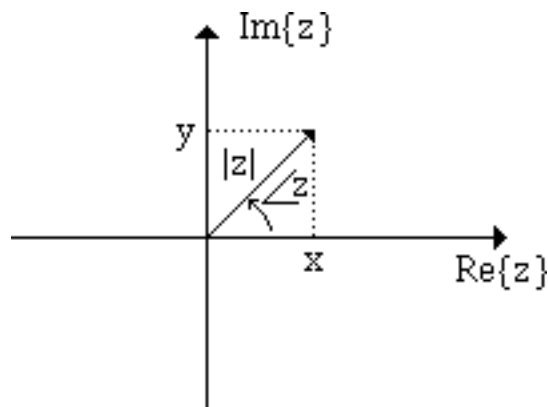
dove  $i = \sqrt{-1}$  è l'unità immaginaria. La rappresentazione (269) suggerisce di associare al numero complesso  $z$  il punto P di coordinate (x,y) del piano complesso (detto, anche, *piano di Gauss*; si veda Figura 6.48). Per questa ragione la (269) è detta *rappresentazione cartesiana rettangolare* del numero complesso  $z$ . Invece di rappresentare il numero complesso attraverso le “componenti rettangolari” del punto P, possiamo rappresentarlo mediante le “componenti polari”  $|z|$  e  $\angle z$ ,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \angle z = \begin{cases} \arctg(y/x) & \text{se } \text{Re}\{x\} > 0, \\ \pi + \arctg(y/x) & \text{se } \text{Re}\{x\} < 0. \end{cases} \quad (270)$$

Il numero reale e positivo  $|z|$  prende il nome di modulo del numero complesso  $z$ ; il numero reale  $\angle z$  prende il nome di argomento o fase del numero complesso  $\angle z$ ; spesso l'argomento di un numero complesso  $z$  si indica anche con  $\arg(z)$ .

È evidente che

$$\begin{aligned} x &= |z| \cos \angle z, \\ y &= |z| \sin \angle z. \end{aligned} \quad (271)$$



**Fig. 6.48** Piano di Gauss

Le componenti rettangolari di un numero complesso possono essere determinate, a partire da quelle polari, utilizzando la (271); invece dalle (270) è possibile determinare le componenti polari a partire da quelle rettangolari.

È immediato verificare che l'argomento di un numero complesso è definito univocamente a meno di un multiplo intero di  $2\pi$ : ciò è conseguenza della periodicità delle funzioni  $\sin(\varphi)$  e  $\cos(\varphi)$ , che hanno periodo  $2\pi$ .

Utilizzando la formula di Eulero

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (272)$$

si ha che

$$|z|e^{i\angle z} = |z|\cos \angle z + i|z|\sin \angle z = x + iy = z, \quad (273)$$

quindi

$$z = |z|e^{i\angle z}. \quad (274)$$

L'espressione (269) è la rappresentazione cartesiana del numero complesso  $z$ ; l'espressione (274) è la rappresentazione polare.

### Osservazione

Ad ogni numero complesso  $z$  è possibile associare il vettore del piano complesso ottenuto congiungente l'origine del piano complesso con il punto P di coordinate (x,y). La lunghezza del vettore così definito è uguale al modulo del numero complesso  $z$ ;  $\angle z$  è l'angolo che esso forma con l'asse immaginario (il verso di riferimento per gli angoli è quello antiorario; si veda la Figura 6.48).

Si noti che per il numero complesso  $0 = 0 + i0$  ( $|z| = 0$ ) la fase non è definita. Il numero reale è un caso particolare di numero complesso. La fase di un numero reale positivo è uguale a zero (o  $2\pi$ ), mentre la fase di un numero reale negativo è uguale a  $\pm\pi$ .

Il numero immaginario è un numero complesso con parte reale uguale a zero. La fase di un numero immaginario con parte immaginaria positiva è uguale a  $+\pi/2$ , mentre la fase di un numero immaginario con parte immaginaria negativa è uguale a  $-\pi/2$ .



### Numero complesso coniugato

Se  $z$  è il numero complesso  $x + iy$ , si chiama il numero *complesso coniugato* di  $z$  il numero complesso  $x - iy$  e lo si indica con  $z^*$ .

La fase del numero complesso  $z^*$  coniugato di  $z$  è uguale all'opposto della fase del numero complesso  $z$ , cioè

$$\angle z^* = -\angle z. \quad (275)$$

Nella rappresentazione polare per il numero complesso  $z^*$  coniugato di  $z$  si ha

$$z^* = |z|e^{-i\angle z}. \quad (276)$$

### **Operazioni con i numeri complessi**

La nozione di uguaglianza di due numeri complessi scaturisce dalla loro interpretazione geometrica. Due vettori si considerano uguali se hanno stessa lunghezza, direzione e verso, cioè se hanno proiezioni uguali sugli assi coordinati.

*Due numeri complessi  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$  sono uguali se e solo se sono uguali rispettivamente le loro parti reali e le loro parti immaginarie, cioè la condizione di eguaglianza di due numeri complessi è*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2. \end{aligned} \quad (277)$$

Pertanto due numeri complessi sono uguali se e solo se i loro moduli sono uguali e le loro fasi differiscono di un multiplo intero di  $2\pi$ . Per indicare che i due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  sono uguali, si usa la notazione  $z_1 = z_2$ .

Le operazioni ordinarie sono definite nel seguente modo. Siano  $z_1$  e  $z_2$  due arbitrari numeri complessi

$$z_1 = x_1 + iy_1 = |z_1|e^{i\angle z_1} \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + iy_2 = |z_2|e^{i\angle z_2}. \quad (278)$$

### **Addizione di numeri complessi**

L'addizione dei due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  è uguale a un numero complesso che ha come parte reale la somma delle parti reali e come parte immaginaria la somma delle parti immaginarie, cioè la somma dei due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  è

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (279)$$

### Sottrazione di numeri complessi

La sottrazione dei due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  è uguale a un numero complesso che ha come parte reale la sottrazione delle parti reali e come parte immaginaria la sottrazione delle parti immaginarie, cioè la sottrazione dei due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  è

$$z_1 - z_2 = (x_1 + i y_1) - (x_2 + i y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (280)$$

### Moltiplicazione di numeri complessi

La moltiplicazione dei due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  è uguale a un numero complesso che ha come modulo il prodotto dei moduli e come fase la somma delle fasi, cioè la moltiplicazione dei due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  è

$$z_1 z_2 = (|z_1| e^{i \angle z_1}) (|z_2| e^{i \angle z_2}) = |z_1| |z_2| e^{i(\angle z_1 + \angle z_2)}. \quad (281)$$

### Divisione di numeri complessi

La divisione dei due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  (con  $z_2 \neq 0$ ), è uguale a un numero complesso che ha come modulo la divisione dei moduli e come fase la differenza delle fasi, cioè la divisione dei due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  è

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i \angle z_1}}{|z_2| e^{i \angle z_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\angle z_1 - \angle z_2)}. \quad (282)$$

Dalle definizioni di addizione, moltiplicazione, ... segue immediatamente che la sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione e la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Inoltre per esse sono valide la proprietà associativa e la proprietà distributiva. Si può dimostrare che con le operazioni definite precedentemente, l'insieme dei numeri complessi soddisfa le stesse proprietà dell'insieme dei numeri reali, cioè essi formano ciò che in algebra è definito un campo. Di conseguenza tutte le manipolazioni algebriche che si sono apprese per i

numeri reali sono applicabili ai numeri complessi. Così, per esempio, la regola per portare i fattori fuori dalle parentesi, le formule elementari, la soluzione di equazioni algebriche, e così via.

Il prodotto del numero complesso  $z$  per il suo complesso coniugato  $z^*$  è uguale al quadrato del modulo, cioè

$$zz^* = |z||z|e^{i(\angle z - \angle z)} = |z|^2 \quad (283)$$

Inoltre si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} z + z^* &= 2 \operatorname{Re}\{z\} \\ z - z^* &= 2 \operatorname{Im}\{z\}. \end{aligned} \quad (284)$$

Notiamo una proprietà importante nei calcoli con numeri complessi contenenti le quattro operazioni elementari. Dalle definizioni delle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione segue immediatamente la seguente proposizione: *se in una somma, una differenza, un prodotto o un quoziente sostituiamo tutti i numeri complessi con i loro coniugati, anche i risultati delle operazioni vanno sostituiti con i loro coniugati.*

