CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccatronica

http://www.automazione.ingre.unimore.it/pages/corsi/Automazione%20Industriale.htm

CRITERIO DI ROUTH-HURWITZ

Ing. Luigi Biagiotti

Tel. 051 20939903

e-mail: lbiagiotti@deis.unibo.it

http://www-lar.deis.unibo.it/~lbiagiotti

Il criterio di Routh

- La stabilità dei sistemi lineari stazionari espressi da una funzione di trasferimento razionale fratta del tipo

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots a_n s^n}$$

è legata alla posizione, nel piano complesso, dei poli della funzione di trasferimento, che sono le radici di una equazione algebrica del tipo

$$a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (1)$$

cioè la *equazione caratteristica* del sistema.

- Se l'equazione caratteristica è di grado elevato, la determinazione delle sue radici comporta calcoli non semplici.

- Risulta quindi utile un criterio che consenta di determinare, eseguendo un esame dei coefficienti, il segno della parte reale delle radici stesse.

- Il ***Criterio di Routh*** consente di dedurre informazione sulla posizione dei poli della G(s) senza risolvere l'equazione caratteristica.

Il criterio di Routh

Data:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots a_n s^n}$$

Senza perdere di generalità si suppone che:

- il coefficiente a_n sia positivo;
- il coefficiente a_0 sia non nullo,

- Si verifica facilmente che se l'equazione ha radici tutte con parte reale negativa, cioè se il corrispondente sistema è asintoticamente stabile, tutti i coefficienti a_0, a_1, … ,a_n sono positivi.

Condizione Necessaria (ma non sufficiente) perché le radici della (1) abbiano tutte parte reale negativa è che sia

$$a_0 > 0\,,\;\; a_1 > 0\,,\;\ldots\;,\;\; a_{n-1} > 0\,,\;\; a_n > 0$$

Il criterio di Routh

- Sia data l'equazione caratteristica:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

- Per applicare il criterio di Routh occorre anzitutto costruire con i coefficienti del polinomio la ***tabella di Routh***:

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \ldots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots &
\end{array}$$

- ***Le prime due righe della tabella sono formate dai coefficienti del polinomio a partire da quello corrispondente alla potenza più elevata***.

- Gli elementi della riga successiva sono definiti dalle relazioni

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-2} - a_n\, a_{n-3}}{a_{n-1}}, \qquad b_{n-4} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-4} - a_n\, a_{n-5}}{a_{n-1}}, \qquad \ldots,$$

Il criterio di Routh

$$\begin{array}{c|cccc} n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots \\ n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} b_{n-2} & = & \dfrac{a_{n-1}\,a_{n-2} - a_n\,a_{n-3}}{a_{n-1}} \\ b_{n-4} & = & \dfrac{a_{n-1}\,a_{n-4} - a_n\,a_{n-5}}{a_{n-1}} \\ \dots & & \end{array} \right.$$

- Il termine b_{n-2} è espresso dal determinante costituito dai primi due coefficienti delle prime due righe, cambiato di segno e diviso per il primo coefficiente della seconda riga.
- Il termine b_{n-4} è espresso dal determinante costituito dai primi e terzi coefficienti delle prime due righe, cambiato di segno e diviso ancora per il primo coefficiente della seconda riga ....
- In modo analogo si costruisce ogni successiva riga della tabella, in funzione dei termini delle due righe immediatamente precedenti.

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}\,a_{n-3} - a_{n-1}\,b_{n-4}}{b_{n-2}}, \qquad c_{n-5} = \frac{b_{n-2}\,a_{n-5} - a_{n-1}\,b_{n-6}}{b_{n-2}}, \qquad \dots,$$

- Le righe della tabella sono contraddistinte con i numeri *n, n-1, …* e sono di lunghezza decrescente: l'ultima riga, (la numero 0) ha un solo elemento.

Il criterio di Routh

- Data la Tabella di Routh

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & \\
\dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}
$$

  vale il seguente

- ***Teorema di Routh.***

  Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella, considerati successivamente, corrisponde una radice con parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice con parte reale negativa.

Il criterio di Routh - Esempio

- Sia data l'equazione $s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0.$

  La corrispondente tabella di Routh è

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 1 \\
2 & -4 & 6 \\
1 & \dfrac{-4-6}{-4} = 2.5 & 0 \\
0 & \dfrac{2.5 \cdot 6}{2.5} = 6 &
\end{array}
$$

- La prima colonna della tabella presenta due variazioni di segno: si hanno pertanto due radici a parte reale positiva (le radici dell'equazione sono -1, 2, 3).

Il criterio di Routh - Esempio

- Sia data l'equazione $2\,s^4 + s^3 + 3\;\;s^2 + 5\,s + 10 = 0.$

  La corrispondente tabella di Routh è

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 2 & 3 & 10 \\
3 & 1 & 5 & 0 \\
2 & -7 & 10 & \\
1 & \dfrac{45}{7} & 0 & \\
0 & 10 & &
\end{array}
$$

- La prima colonna della tabella presenta due variazioni di segno: anche in questo caso due radici hanno parte reale positiva.

Il criterio di Routh

- Ovviamente se, durante la costruzione della tabella, i termini di una stessa riga sono moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo, non si modifica il numero delle variazioni di segno nella prima colonna.

- Quindi **si può evitare che nella tabella compaiano numeri frazionari** a partire da un polinomio con coefficienti interi: nel calcolo degli elementi di una o più righe *si può fare a meno di dividere per il primo elemento della riga superiore,* limitandosi a un cambiamento di segno se esso è negativo.

- **Esempio.** Sia data l'equazione $4\,s^4+3\,s^3+5\,s^2+2\,s+1=0$. La tabella di Routh è

$$
\begin{array}{c|cccl}
4 & 4 & 5 & 1 & \\
3 & 3 & 2 & 0 & \\
2 & 7 & 3 & & \text{(non si è diviso per 3)} \\
1 & 5 & 0 & & \text{(non si è diviso per 7)} \\
0 & 3 & & &
\end{array}
$$

Tutte le radici hanno parte reale negativa.

Il criterio di Routh

- Durante la costruzione della tabella di Routh si possono presentare i seguenti due casi singolari, che non consentono di portarla a termine:

  - ***il primo termine di una riga è nullo;***
  - ***tutti i termini di una riga sono nulli.***

4	2	3	10
3	0	5	0
2	??		
1	…		
0	…		

4	5	6	2
3	0	0	0
2	??		
1	…		
0	…		

Il criterio di Routh

- **Nel primo caso** (*il primo termine di una riga è nullo*) la costruzione della tabella può essere completata considerando, in luogo del termine nullo, un termine $+\varepsilon$ o $-\varepsilon$ di modulo piccolo a piacere (non è necessario dividere la riga successiva per il termine in questione, ma solo tener conto del suo segno, da cui peraltro non dipende il risultato dell'analisi della tabella di Routh).

- **Esempio.** Si consideri l'equazione $s^3+3\,s-2=0$. La tabella di Routh, nei due casi in cui si assegnino rispettivamente il segno positivo e il segno negativo al termine ε, è

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3 \\
2 & +\varepsilon & -2 \\
1 & 3\varepsilon+2 & \\
0 & -2 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3 \\
2 & -\varepsilon & -2 \\
1 & 3\varepsilon-2 & \\
0 & -2 &
\end{array}
$$

Nella prima colonna si riscontra una variazione di segno, che rivela la presenza di una radice a parte reale positiva.

- *Questo è il cosiddetto metodo ε per completare la tabella di Routh nel primo caso singolare.*
- *Non sempre è di agevole impiego, in quanto si possono avere tabelle di Routh con più zeri come primi elementi di una riga e, comunque, continuando il quadro in forma simbolica (con i vari elementi funzioni di ε e delle sue potenze) in genere non è facile stabilire quali elementi siano infinitesimi rispetto ad altri.*

Il criterio di Routh

- **Nel secondo caso** (*tutti i termini di una riga sono nulli*) la costruzione della tabella non può essere in alcun modo proseguita.

- Questo caso si verifica sempre in corrispondenza di una riga contraddistinta da un numero dispari: sia esso 2m-1.
- *Le eventuali variazioni di segno che si verificano nella prima colonna della tabella, relative alle prime n-2m+1 righe, riguardano solo n-2m radici del polinomio*: ogni variazione di segno corrisponde ad una radice a parte reale positiva, ogni permanenza ad una radice a parte reale negativa.

$$
\begin{array}{c|cccc}
\cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
2m-2 & b_{2m} & b_{2m-2} & b_{2m-4} & \cdots \\
2m-1 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

Il criterio di Routh

- Per dedurre informazione sulla posizione delle restanti 2m radici, si può procedere nel seguente modo. Siano

$$b_{2m}\,,\ b_{2m-2}\,,\ \ldots\,,\ b_0$$

i termini della riga immediatamente precedente la riga di tutti zeri.

- Si costruisce *l'equazione ausiliaria*

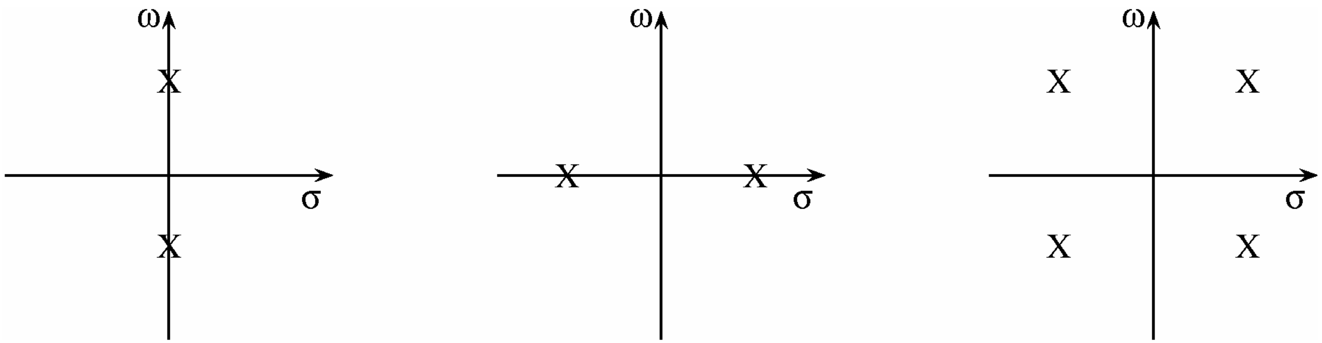
$$b_{2m}\,s^{2m} + b_{2m-2}\,s^{2m-2} + \ldots + b_0 = 0$$

e la si risolve:

le sue radici coincidono con le 2m radici dell'equazione polinomiale in esame sulle quali la tabella di Routh non ha fornito informazione.

Il criterio di Routh

- Poichè nell'equazione ausiliaria mancano i termini di grado dispari, le radici sono disposte immetricamente rispetto all'origine.



- Infatti l'equazione ausiliaria si riconduce ad un'equazione di grado *m* operando la posizione

$$s^2 = z \qquad\qquad b_{2m}\, s^{2m} + b_{2m-2}\, s^{2m-2} + \ldots + b_0 = 0$$

$$b_{2m}\, z^{m} + b_{2m-2}\, z^{m-1} + \ldots + b_0 = 0$$

- Ogni *radice reale negativa* dell'equazione algebrica di grado *m* nella variabile *z* che così si ottiene corrisponde, nell'equazione, a due radici immaginarie;
- Ogni *radice reale positiva* a due radici reali simmetriche rispetto all'origine;
- Ogni *coppia di radici complesse coniugate* a due coppie di radici complesse coniugate simmetriche rispetto all'origine.

- ***Pertanto l'equazione ausiliaria ha tante radici a parte reale positiva quante sono le sue radici a parte reale negativa e può presentare anche radici a parte reale nulla.***

Il criterio di Routh

$$b_{2m} s^{2m} + b_{2m-2} s^{2m-2} + \ldots + b_0 = 0$$

- L'equazione ausiliaria si può risolvere in pratica solo se non è di grado elevato, cioè solo se è *2m=4* o *2m=2*.

- Se invece essa è di grado troppo elevato, **se ne deriva il primo membro** e si prosegue la tabella di Routh disponendo i coefficienti del polinomio così ottenuto in corrispondenza della riga di tutti zeri:
  - *Il numero delle variazioni di segno che si verificano nella prima colonna della tabella così proseguita, a partire dalla riga contraddistinta con il numero n-2m+1, è uguale al numero delle radici dell'equazione ausiliaria a parte reale positiva.*
  - *Le eventuali radici immaginarie non portano a variazioni di segno, così come quelle a parte reale negativa.*

Il criterio di Routh

- **Esempio.** Data l'equazione polinomiale $s^4+s^3-3s^2-s+2=0$, si costruisce la tabella

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 3 & 2 \\
3 & 1 & -1 & 0 \\
2 & -2 & 2 & \\
1 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

- La tabella fornisce informazione solo su due delle quattro radici dell'equazione: una di esse ha parte reale negativa, l'altra parte reale positiva.

- L'equazione ausiliaria è $-2\,s^2+2=0$, che risolta fornisce le altre due radici: -1, 1.

Il criterio di Routh

- In alternativa, derivando l'equazione ausiliaria si può proseguire la tabella, ottenendo

$$-2s^2+2=0 \qquad \Longrightarrow \qquad -4s=0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 3 & 2 \\
3 & 1 & -1 & 0 \\
2 & -2 & 2 & \\
1 & -4 & 0 & \\
0 & 2 & &
\end{array}$$

- Dall'esame della prima colonna si deduce una seconda variazione di segno.

Il criterio di Routh - Esempio

- Tabella di Routh corrispondente all'eq. polinomiale $s^6+s^5-2\,s^4-3\,s^3-7\,s^2-4s-4=0$

$$\begin{array}{c|ccc} 6 & 1 & -2 & -7 \\ 5 & 1 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \\ 3' & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- Presentandosi una riga di tutti zeri, si ricava l'equazione ausiliaria $s^4-3s^2-4=0$, le cui radici, in s^2, sono

$$\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad s_1=j\,,\ s_2=-j\,,\ s_3=2\,,\ s_4=-2$$

- In alternativa, si può derivare l'equazione ausiliaria e proseguire la tabella:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -6 & -16 \\ 1 & -100 & 0 \\ 0 & -16 & \end{array}$$

La tabella presenta una sola variazione di segno nella prima colonna, corrispondente a una sola radice a parte reale positiva (+2).

Il criterio di Routh

- La costruzione della tabella di Routh, proseguita eventualmente derivando l'equazione ausiliaria, fornisce informazione sul segno di tutte le radici dell'equazione polinomiale.

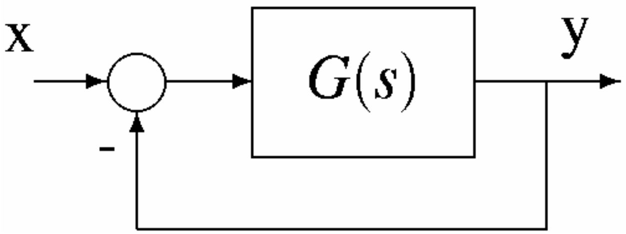
- La parte della tabella prima della riga di tutti zeri, con le permanenze o variazioni di segno degli elementi della prima colonna, fornisce informazione diretta sul segno della parte reale di un certo numero di radici, fra le quali ovviamente non vi sono mai radici immaginarie.

- Per ogni variazione di segno degli elementi della prima colonna della parte di tabella restante, costruita derivando l'equazione ausiliaria, si ha un'ulteriore radice a parte reale positiva. Per la proprietà di simmetria, le ulteriori radici a parte reale negativa sono in numero uguale: le restanti radici, per giungere al numero complessivo di n, sono immaginarie.

Il criterio di Routh

- Il criterio di Routh è di grande utilità nel progetto di dispositivi di controllo in retroazione: spesso i coefficienti dell'equazione caratteristica sono funzioni di un parametro, del quale è utile determinare i campi di variabilità per i quali il sistema è stabile, per sceglierne il valore entro uno di tali campi.

- Esempio. Sia dato il sistema in retroazione



con $G(s) = \dfrac{K}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 2}$

- L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^4 + 6\,s^3 + 11\,s^2 + 6\,s + K + 2 = 0$$

Il criterio di Routh

- La corrispondente tabella di Routh è

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 11 & K+2 \\
3 & 6 & 6 & 0 \\
2 & 10 & K+2 & \\
1 & 48-6K & 0 & \\
0 & K+2 & &
\end{array}
$$

- Per la stabilità asintotica si deducono le condizioni:
  - $48 - 6K > 0$ (da cui $K < 8$)
  - $K + 2 > 0$ (da cui $K > -2$).

- Il campo corrispondente alla stabilità asintotica del sistema è pertanto

$$\mathbf{-2 < K < 8}$$

- Quando K assume il valore limite inferiore dell'intervallo di stabilità ($K = -2$) si ha un polo nell'origine, quando assume il valore limite superiore ($K = 8$) si ha una coppia di poli immaginari: in entrambi i casi il sistema è stabile, ma non asintoticamente.

CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Meccatronica

http://www.automazione.ingre.unimore.it/pages/corsi/Automazione%20Industriale.htm

Criterio di Routh-Hurwitz
FINE

Ing. Luigi Biagiotti

Tel. 051 20939903

e-mail: lbiagiotti@deis.unibo.it

http://www-lar.deis.unibo.it/~lbiagiotti