CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Gestionale
http://www.automazione.ingre.unimore.it/pages/corsi/ControlliAutomaticiGestionale.htm

ANTITRASFORMATA DI LAPLACE
MODI DI UN SISTEMA

Ing. Federica Grossi
Tel. 059 2056333
e-mail: federica.grossi@unimore.it
http://www.dii.unimore.it/wiki/index.php/Federica_Grossi

Antitrasformate di Laplace

- La determinazione dell'evoluzione libera e, in molti casi, dell'evoluzione forzata di un sistema lineare stazionario si riportano all'antitrasformazione di un rapporto di polinomi in s, cioè di una funzione del tipo

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} := \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

in cui si è posto, senza ledere la generalità,

$a_n = 1$ $\longrightarrow$ polinomio a denominatore ***monico***

- Si definisce $n-m$ *grado relativo* della funzione razionale F(s)

$n>m$ $\longrightarrow$ $n - m > 0$

Antitrasformate di Laplace

Se:

- **grado relativo >= 1**

  Frazione strettamente propria: si può scomporre il rapporto di P(s) e Q(s) in una somma di termini facilmente antitrasformabili, detta *somma di fratti semplici*.

  Esempio:

$$F(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{-t} + e^{-3t}$$

- **grado relativo = 0**

  Dividendo i polinomi si ottiene la somma di una costante e di una frazione strettamente propria, che si possono antitrasformare indipendentemente (l'antitrasformata della costante è la stessa moltiplicata per un impulso di Dirac).

  Esempio:

$$F(s) = \frac{3s^2+2s+1}{s^2+2s+5} = 3 - \frac{4s+14}{s^2+2s+5}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = 3\delta(t) - \sqrt{41}\, e^{-t} \sin(2t+\varphi), \quad \varphi = \arctan(4/5)$$

Antitrasformata di Laplace

- E' noto che un polinomio di grado n a coefficienti reali ammette n *zeri* reali o complessi, cioè l'equazione algebrica ottenuta imponendo l'annullarsi di un polinomio

$$\Phi(s) := s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

ammette n radici reali o complesse. Se fra tali radici ve n'è una complessa, vi è pure la sua coniugata.

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \;\Rightarrow\; s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$$

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} s_1 = -1 \\ s_{2,3} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \end{array} \qquad n \text{ dispari} \Rightarrow \text{almeno una radice reale}$$

- Data una $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ l'equazione

$$\Phi(s) = Q(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

si dice *equazione caratteristica* relativa alla funzione di trasferimento F(s).

Antitrasformate di Laplace

- Siano $p_1, \ldots, p_n$ le sue radici, per cui il polinomio $\Phi(s)$ si può scrivere nella *forma fattorizzata*

$$\Phi(s) = (s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)$$

In particolare, se $z_1, \ldots, z_m$ e $p_1, \ldots, p_n$ sono rispettivamente gli zeri di P(s) e Q(s) (polinomio a numeratore e a denominatore di F(s)) si ha la forma fattorizzata

$$F(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)}$$

in cui con K $(=b_m)$ si è indicato un opportuno coefficiente reale.

Si definiscono le costanti complesse:

$z_1, \ldots, z_m$	***zeri*** di $F(s)$
$p_1, \ldots, p_n$	***poli*** di $F(s)$

- Una funzione razionale è completamente determinata, a meno di un fattore costante K, una volta assegnati i suoi zeri e i suoi poli.

Antitrasformate di Laplace

- Esempio

$$F(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

$$z = -2, \qquad \text{zero}$$

$$p_1 = -1$$
$$p_2 = -3 \qquad \text{poli}$$

- Esempio

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2+6s+5}{s^3+2s^2+16s} \\ &= \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+1+j\sqrt{15})(s+1-j\sqrt{(15)})} \end{aligned}$$

$$z_1 = -1, \quad z_2 = -5, \qquad \text{zeri}$$

$$p_1 = 0$$
$$p_2 = -1 + j\sqrt{15}$$
$$p_3 = -1 - j\sqrt{15} \qquad \text{poli}$$

Antitrasformate di Laplace

- Antitrasformazione in caso di *poli semplici*
  - *Molteplicità = 1*
- Antitrasformazione in caso di *poli multipli*
  - *Molteplicità > 1*

Antitrasformate di Laplace - Poli semplici

- Lo sviluppo della F(s) in somma di fratti semplici corrisponde all'espressione

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i}$$

K_i : **residui** relativi ai vari poli p_i →

Reali
in corrispondenza di poli reali

Complessi coniugati
in corrispondenza di poli complessi coniugati

- I residui si possono ricavare facilmente da

$$\begin{aligned} K_i &= (s-p_i)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=p_i} \\ &= \frac{P(p_i)}{(p_i-p_1)\dots(p_i-p_{i-1})(p_i-p_{i+1})\dots(p_i-p_n)} \qquad (i=1,\dots,n) \end{aligned}$$

Antitrasformate di Laplace - Poli semplici

- Infine, si ottiene l'antitrasformata della F(s) per la proprietà di linearità e utilizzando la

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$$

- Complessivamente, si ha:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i} \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i\, e^{p_i t}$$

Antitrasformate di Laplace - Poli semplici

ESEMPIO

- Sia

$$F(s) := \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

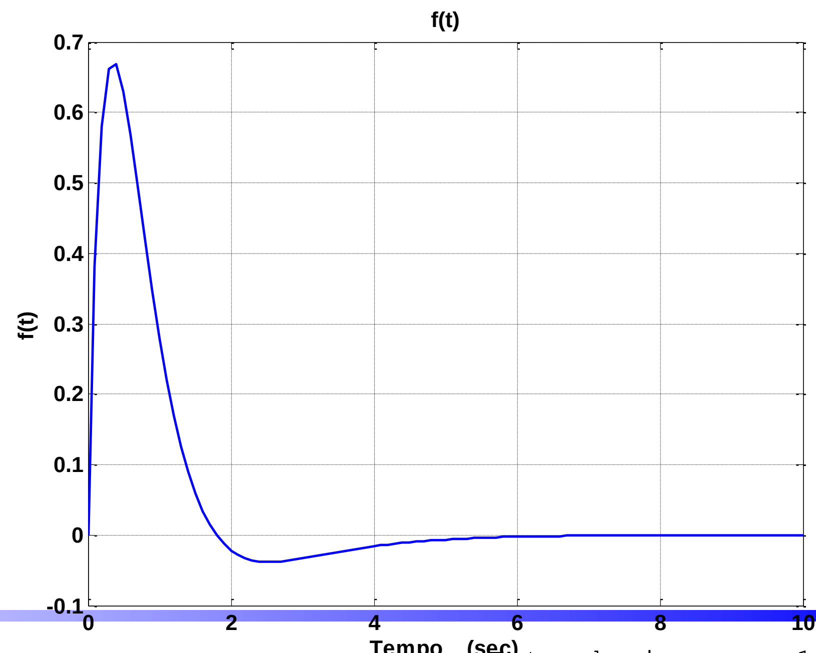
I residui sono:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{5(-1)+3}{(-1+2)(-1+3)} = -1 \qquad (s=-1)\\
K_2 &= \frac{5(-2)+3}{(-2+1)(-2+3)} = 7 \qquad (s=-2)\\
K_3 &= \frac{5(-3)+3}{(-3+1)(-3+2)} = -6 \qquad (s=-3)
\end{aligned}$$

$$F(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

e infine, antitrasformando i singoli termini,
si ottiene

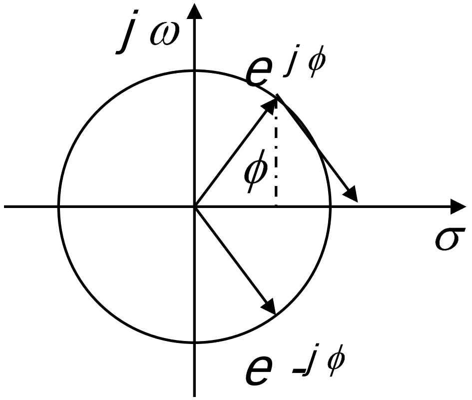
$$f(t) = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}$$



Antitrasformate di Laplace - Poli semplici

- Quando si hanno coppie di poli complessi coniugati, nella antitrasformata f(t) sono presenti esponenziali complesse moltiplicate per coefficienti complessi: essi si possono però facilmente ricondurre a prodotti di esponenziali reali per funzioni trigonometriche applicando le formule di Eulero.

$$\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}=\cos\varphi$$



Si abbiano infatti i poli complessi coniugati

$$p_1=\sigma_1+j\,\omega_1\;,\qquad p_2=\sigma_1-j\,\omega_1$$

a cui corrispondono i residui

$$K_1=u_1+j\,v_1\;,\qquad K_2=u_1-j\,v_1$$

La somma di fratti semplici ad essi relativa è

$$\frac{u_1+j\,v_1}{s-\sigma_1-j\,\omega_1}+\frac{u_1-j\,v_1}{s-\sigma_1+j\,\omega_1}$$

Antitrasformate di Laplace – Poli semplici

- Posto

$$M_1 := 2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}\,, \quad \varphi_1 := \arg(u_1 + j\, v_1)$$

mettendo in forma polare i residui ($u_1 + j\, v_1 = M\, e^{j\,\phi}$) si può scrivere

$$\frac{M_1}{2}\left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - \sigma_1 - j\,\omega_1} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - \sigma_1 + j\,\omega_1}\right)$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\frac{M_1}{2}\left(e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}\right)$$

funzione che, infine, si può porre nella forma

$$\boxed{M_1\, e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)} = M_1\, e^{\sigma_1 t}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t + \varphi_1 + \pi/2)$$

Antitrasformate di Laplace - Poli semplici

- Sia

$$F(s) := \frac{7s^2-8s+5}{s^3+2s^2+5s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1-j2} + \frac{K_3}{s+1+j2}$$

Scomponendo in fratti semplici e calcolando i residui si deduce

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{7\cdot 0 - 8\cdot 0 + 5}{(0+1-j2)\,(0+1+j2)} &&= 1 && (s=0)\\
K_2 &= \frac{7\,(-1+j2)^2 - 8\,(-1+j2)+5}{(-1+j2)\,(-1+j2+1+j2)} &&= 3+j4 && (s=-1+j2)\\
K_3 &= \frac{7\,(-1-j2)^2 - 8\,(-1-j2)+5}{(-1-j2)\,(-1-j2+1-j2)} &&= 3-j4 && (s=-1-j2)
\end{aligned}$$

e pertanto

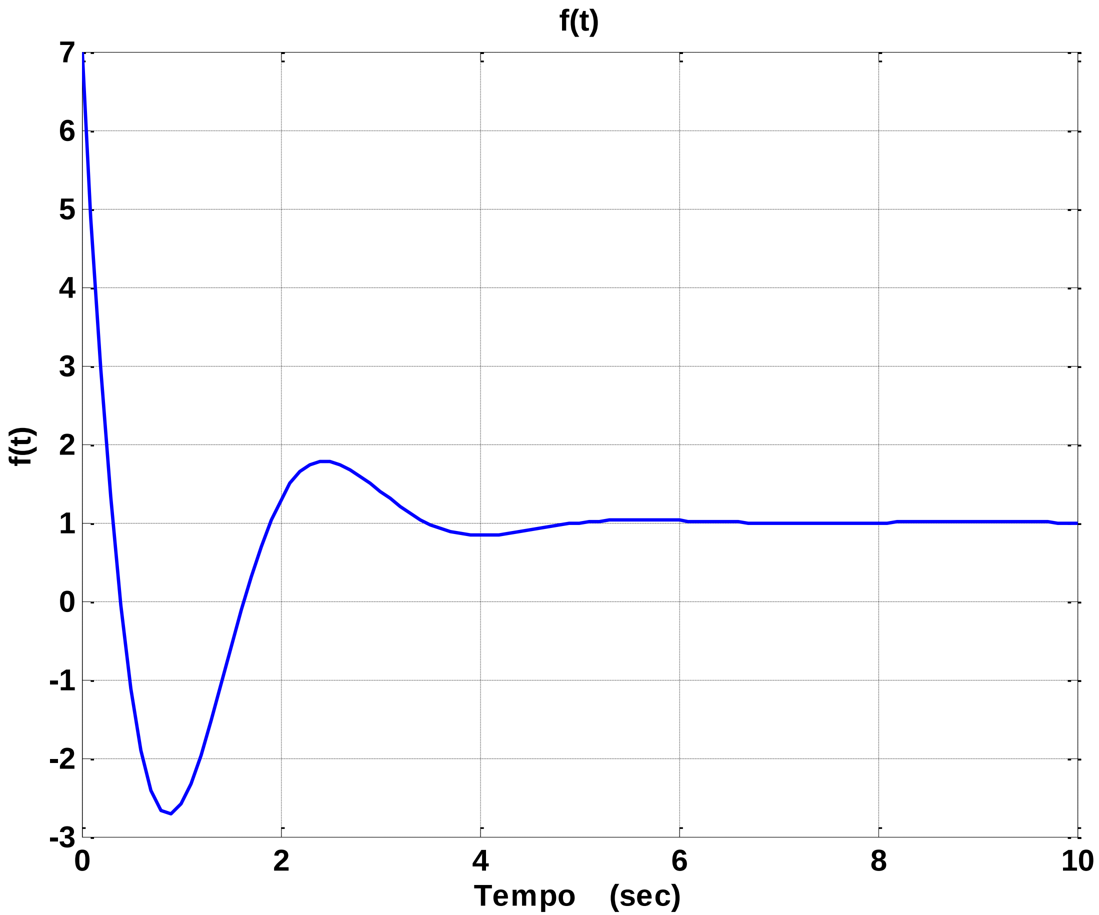
$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3+j4}{s+1-j2} + \frac{3-j4}{s+1+j2} = \frac{1}{s} + 5\left(\frac{e^{j\varphi}}{s+1-j2} + \frac{e^{-j\varphi}}{s+1+j2}\right),$$

da cui, antitrasformando,

$$f(t) = 1 + 10\,e^{-t}\left(\frac{e^{j(2t+\varphi)} + e^{-j(2t+\varphi)}}{2}\right) = 1 + 10\,e^{-t}\cos(2t+\varphi) \qquad \varphi = \arctan(4/3) = 53,13^\circ$$

Antitrasformate di Laplace - Poli semplici

$$f(t) = 1 + 10e^{-t}\left(\frac{e^{j(2t+\varphi)} + e^{-j(2t+\varphi)}}{2}\right) = 1 + 10e^{-t}\cos(2t+\varphi)$$



Antitrasformate di Laplace - Poli semplici

- Dovendo antitrasformare l'espressione generale

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} := \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

si può ricorrere all'impiego di tabelle, che riportano le antitrasformate di alcuni fratti elementari.
Per usare tali tabelle, anzitutto si pone lo sviluppo in fratti semplici nella forma

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{K_0'}{s} + \sum_{i=1}^{h} \frac{K_i'}{1+\tau_i s} + \sum_{i=1}^{k} \frac{K_i''(\sigma_i^2+\omega_i^2)(1+T_i s)}{(s-\sigma_i)^2+\omega_i^2} \\ &= \frac{K_0'}{s} + \sum_{i=1}^{h} \frac{K_i'}{1+\tau_i s} + \sum_{i=1}^{k} \frac{K_i''\,\omega_{ni}^2 (1+T_i s)}{s^2 + 2\delta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2} \end{aligned}$$

$$(\omega_{ni}^2 = \sigma_i^2 + \omega_i^2, \quad \omega_{ni} = |\sigma_i + j\omega_i|)$$

- in cui:
  - il primo termine si riferisce ad un eventuale polo nell'origine,
  - la prima sommatoria ai cosiddetti *termini del primo ordine*, relativi agli *h* poli reali non nulli
  - la seconda sommatoria ai cosiddetti *termini del secondo ordine*, relativi alle *k* coppie di poli complessi coniugati.

Antitrasformate di Laplace – Poli semplici

- Per ottenere i termini del primo ordine dai corrispondenti termini della F(s) basta eseguire opportune posizioni.

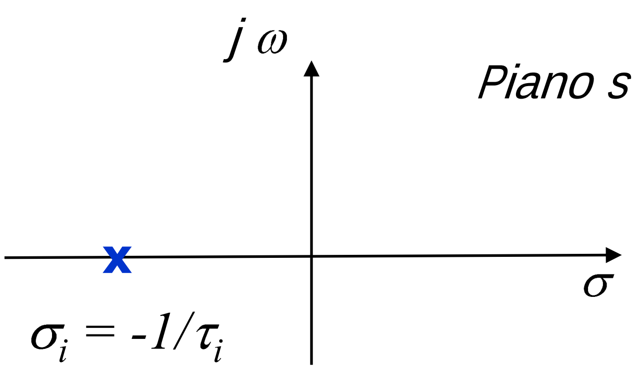
  Infatti in questo caso i poli p_i sono reali e quindi:

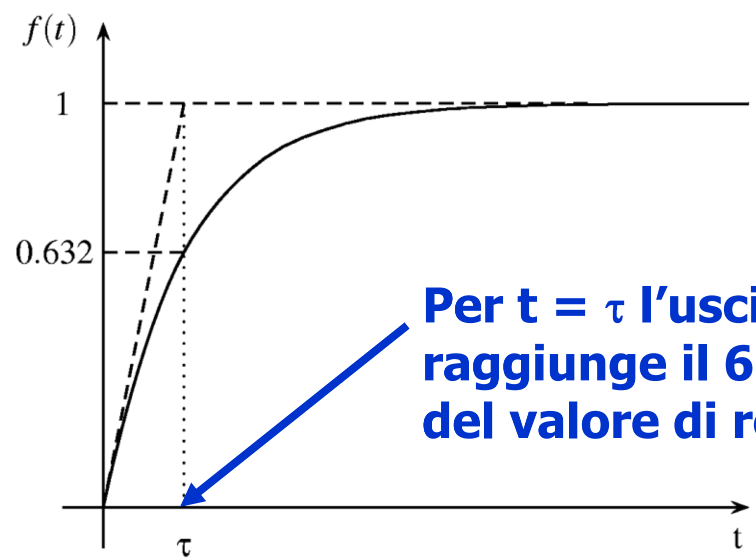
$$\frac{K_i}{s-p_i} = \frac{K_i}{s-\sigma_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{K_i'}{1+\tau_i s} \qquad \text{con} \qquad K_i' := \frac{-K_i}{\sigma_i}, \quad \tau_i := \frac{-1}{\sigma_i}$$

dove il parametro

τ_i → *costante di tempo*

caratterizza la *risposta al gradino unitario* del sistema elementare del primo ordine.





Per t = τ l'uscita raggiunge il 63.2% del valore di regime

Antitrasformate di Laplace - Poli semplici

Risposta al gradino unitario di un sistema elementare del primo ordine.

$$F(s) = \frac{K_i'}{1+\tau_i s} \qquad Y(s) = F(s)U(s) = \frac{K_i'}{1+\tau_i s}\frac{1}{s}$$

- Se per esempio:

$$Y(s) = \frac{5}{1+2s}\frac{1}{s} = 5\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{1+2s}\right)$$

- Antitrasformando i due termini si ha:

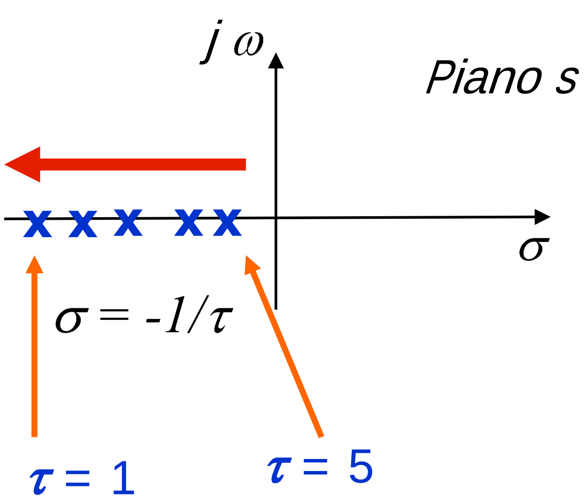
$$y(t) = 5(1 - e^{-t/2})$$

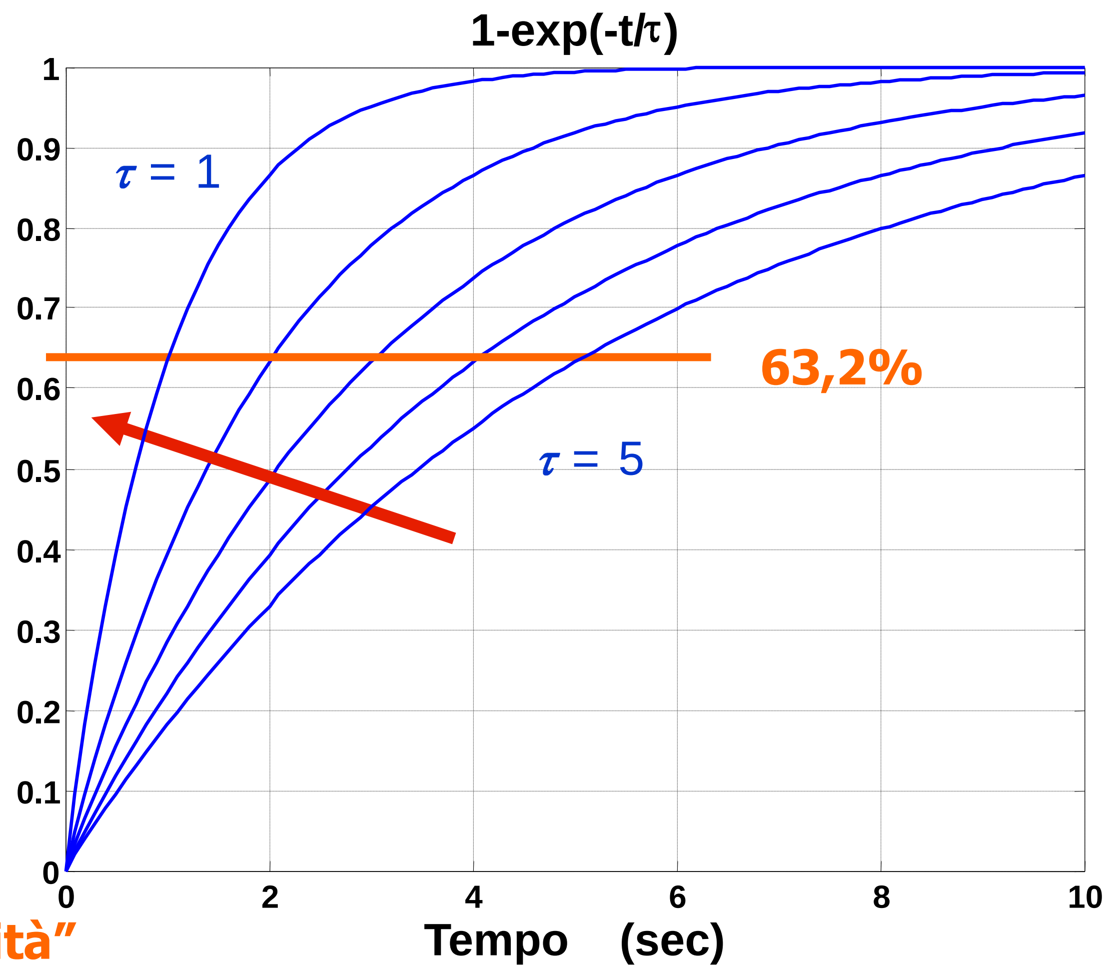
- A parte un guadagno, la risposta è del tipo $f(t) = 1 - e^{-t/\tau}$

- La risposta è dunque caratterizzata dal valore di τ (costante di tempo)

Antitrasformate di Laplace - Poli semplici

- Andamento di $f(t) = 1 - e^{-t/\tau}$ per diversi valori di τ (=5, 4, 3, 2, 1)





Al diminuire di τ, la “velocità” dell’uscita aumenta

Antitrasformate di Laplace - Poli semplici

- Per quanto riguarda i termini relativi ai poli complessi coniugati, si ha

$$\frac{u_i + j\,v_i}{s - \sigma_i - j\,\omega_i} + \frac{u_i - j\,v_i}{s - \sigma_i + j\,\omega_i} = 2\,\frac{u_i\,(s - \sigma_i) - v_i\,\omega_i}{s^2 - 2\,\sigma_i\,s + \sigma_i^2 + \omega_i^2}$$

che equivale ad un termine del tipo

$$\frac{K_i''\,(\sigma_i^2 + \omega_i^2)\,(1 + T_i\,s)}{(s - \sigma_i)^2 + \omega_i^2} = \frac{K_i''\,\omega_{ni}^2\,(1 + T_i\,s)}{s^2 + 2\,\delta_i\,\omega_{ni}\,s + \omega_{ni}^2}$$

in cui si è posto

$$\omega_{ni} := \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2} \qquad \delta_i := -\frac{\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}}$$

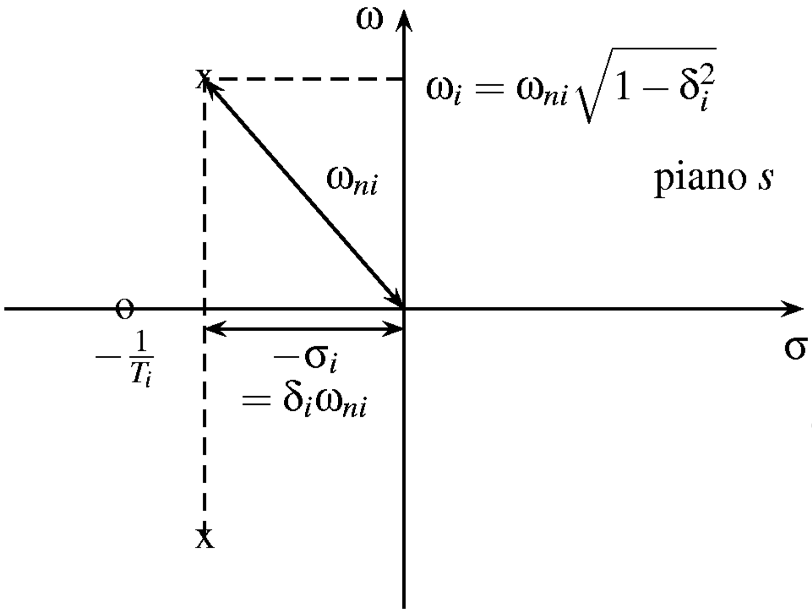
$$K_i'' := -2\,\frac{u_i\,\sigma_i + v_i\,\omega_i}{\sigma_i^2 + \omega_i^2} \qquad T_i := -\frac{u_i}{u_i\,\sigma_i + v_i\,\omega_i}$$

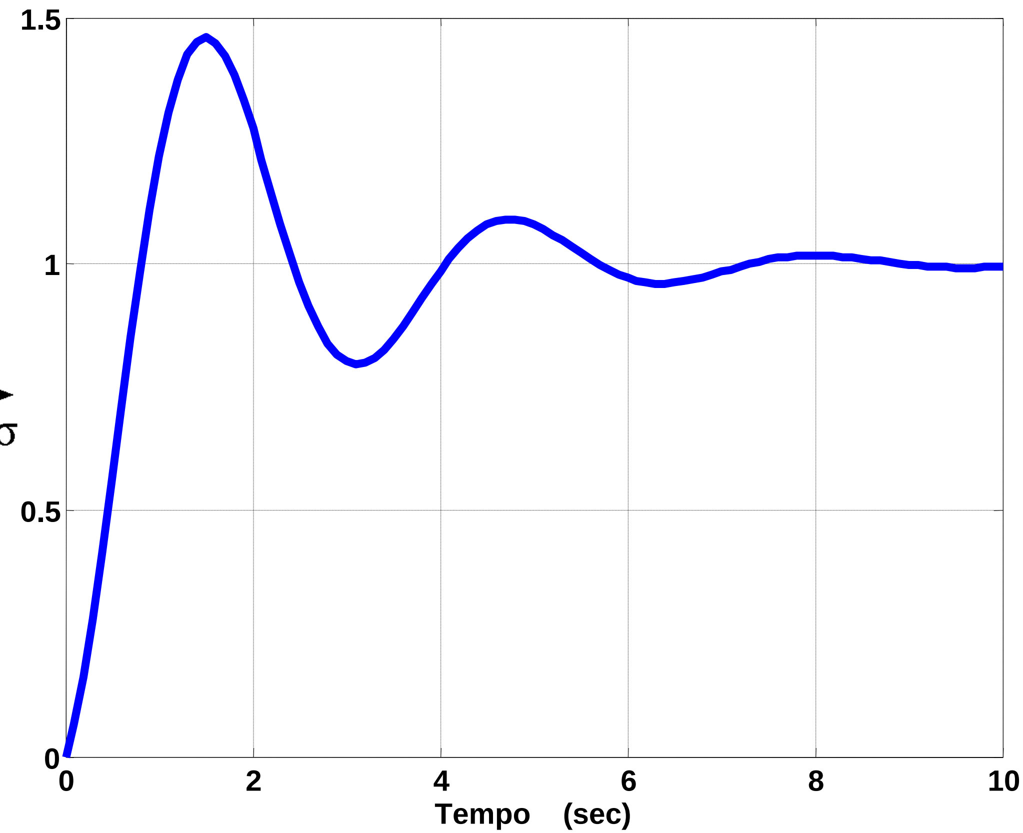
- I parametri δ_i coefficiente di smorzamento $(0 < \delta_i < 1)$
  ω_{ni} pulsazione naturale

caratterizzano la risposta al gradino unitario del sistema elementare del secondo ordine.

Antitrasformate di Laplace - Poli semplici

- Risposta al gradino di un termine del secondo ordine





Antitrasformate di Laplace – Poli semplici

- Avendo posto lo sviluppo in fratti nella forma

$$F(s) = \frac{K_0'}{s} + \sum_{i=1}^{h} \frac{K_i'}{1+\tau_i s} + \sum_{i=1}^{k} \frac{K_i'' (\sigma_i^2 + \omega_i^2)(1+T_i s)}{(s-\sigma_i)^2 + \omega_i^2}$$

$$= \frac{K_0'}{s} + \sum_{i=1}^{h} \frac{K_i'}{1+\tau_i s} + \sum_{i=1}^{k} \frac{K_i'' \omega_{ni}^2 (1+T_i s)}{s^2 + 2\delta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2},$$

si può eseguire la antitrasformazione impiegando la seguente tabella.

Trasformata di Laplace	Funzione del tempo
$\frac{1}{s}$	$1 \quad (u(t)$ gradino unitario in $t=0)$
$\frac{1}{1+\tau s}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\delta^2}\, t$
$\frac{\omega_n^2(1+Ts)}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{\frac{1-2\delta\omega_n T+\omega_n^2 T^2}{1-\delta^2}}\, e^{-\delta\omega_n t} \operatorname{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\delta^2}\, t + \varphi\right)$ $\varphi := \arg\left(1-\delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1-\delta^2}\right)$

Antitrasformate di Laplace – Poli multipli

- Si suppone che gli n poli della funzione razionale F(s) si possano dividere in h gruppi, ciascuno formato da r_i (i = 1, … ,h) poli coincidenti.
  In altre parole, si suppone che si abbiano h poli diversi p_i (i = 1, … , h), ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità r_i >1. Naturalmente è

$$\sum_{i=1}^{h} r_i = n$$

- Lo sviluppo in fratti semplici in questo caso è dato da

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}\dots(s-p_h)^{r_h}}$$

$$= \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{r_i-\ell+1}}$$

- in cui le costanti K_{il} si ricavano mediante la formula

$$K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell-1)!}\frac{d^{\ell-1}}{ds^{\ell-1}}(s-p_i)^{r_i}\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=p_i} \qquad (i=1,\dots,h;\ell=1,\dots,r_i)$$

Antitrasformate di Laplace - Poli multipli

- Facendo uso della proprietà di linearità e della relazione

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

si può infine ottenere l'antitrasformata come

$$f(t) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i - \ell)!} t^{r_i - \ell} e^{p_i t}$$

Anche in questo caso i coefficienti K_i sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati, per cui le esponenziali complesse possono essere sostituite con prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, con procedimento analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.

Antitrasformate di Laplace - Poli multipli

- **Esempio:** Sia

$$F(s) := \frac{1}{s^3+4s^2+5s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+1)^2}$$

$$= \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{22}}{s+1} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2}$$

Calcolando i residui si deduce

$$K_{11} = (s+2)F(s)\big|_{s=-2} = 1$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds}(s+1)^2 F(s)\Big|_{s=-1} = -1$$

$$K_{21} = (s+1)^2 F(s)\big|_{s=-1} = 1$$

e pertanto

$$F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

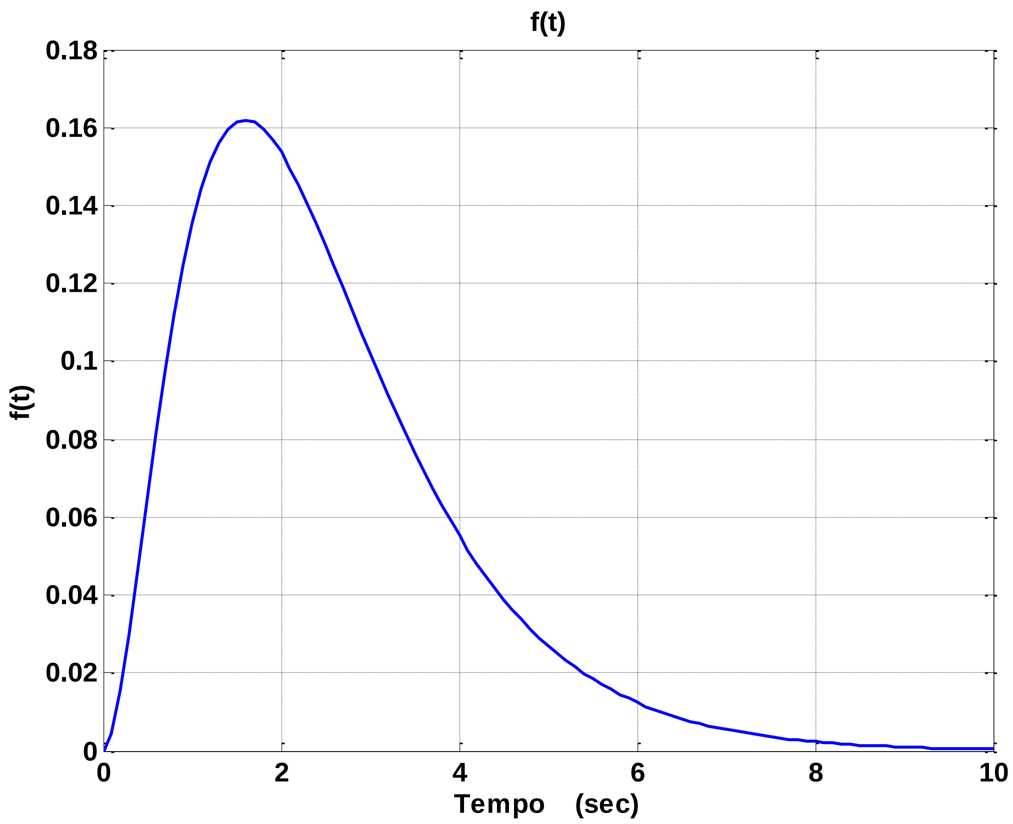
da cui, antitrasformando

$$f(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t\,e^{-t}$$

Antitrasformate di Laplace - Poli multipli

- Si ottiene:

$$f(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t\,e^{-t}$$



Antitrasformate di Laplace

Qualche considerazione:

- L'antitrasformazione delle funzioni razionali fratte si effettua con operazioni completamente di routine: l'unica difficoltà può essere il calcolo numerico dei poli (se il polinomio a denominatore è di grado superiore a due o a tre non si può effettuare in modo semplice). In questi casi è inevitabile ricorrere a procedimenti iterativi per la determinazione delle radici delle equazioni polinomiali.

- Il comportamento dell'antitrasformata per t tendente all'infinito è legato alla posizione dei poli in rapporto all'asse immaginario.

  Infatti si è mostrato che l'antitrasformata di una funzione razionale è costituita da una somma di termini dei tipi

  A) $K, \quad K e^{\sigma t}, \quad K e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ *poli semplici*

  B) $K t^h, \quad K t^h e^{\sigma t}, \quad K t^h e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ *poli multipli*

  in cui 1 <= h <= (r-1), essendo r l'ordine di molteplicità dei poli considerati.

  I primi termini di queste relazioni corrispondono a poli nell'origine e possono considerarsi un caso particolare dei secondi ($\sigma = 0$).

Antitrasformate di Laplace

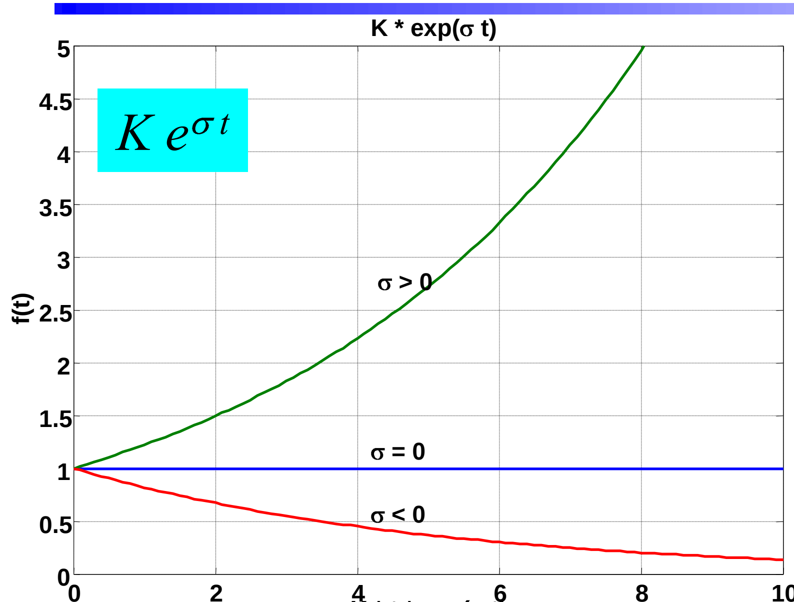
- Nel calcolo di una antitrasformata si ottengono termini del tipo:

A)	K,	$K\,e^{\sigma t}$,	$K\,e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$	*poli semplici*
B)	$K\,t^h$,	$K\,t^h\,e^{\sigma t}$,	$K\,t^h\,e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$	*poli multipli*

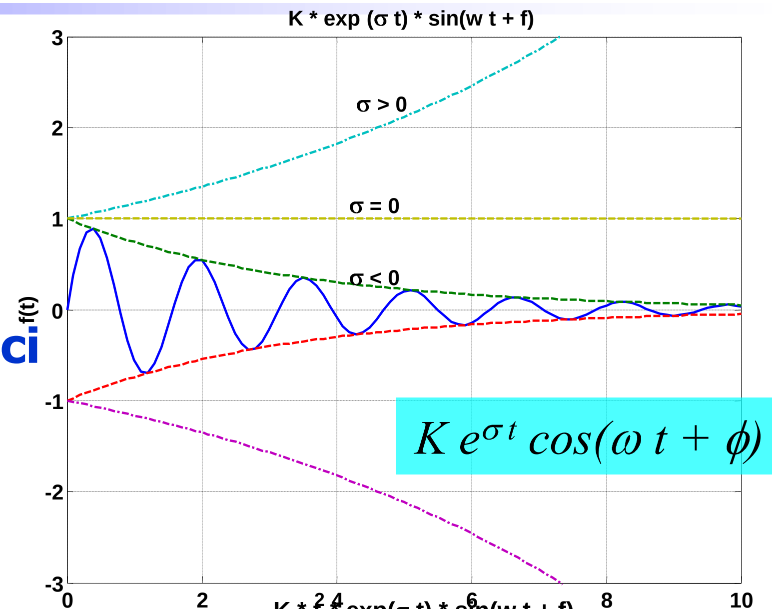
$$(A): \qquad \text{per } t \to \infty \qquad \begin{cases} 0 & \sigma < 0 \\ \text{limitati} & \sigma = 0 \\ \infty & \sigma > 0 \end{cases}$$

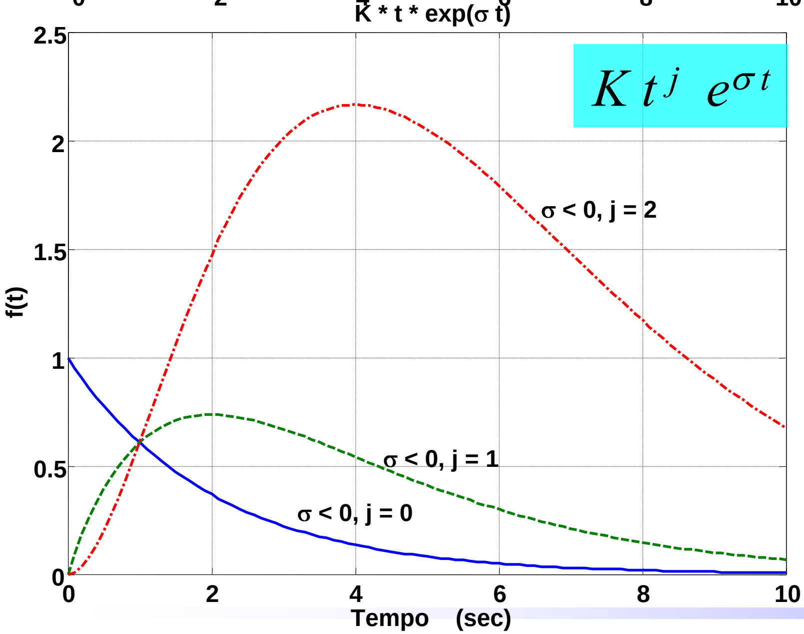
$$(B): \qquad \text{per } t \to \infty \qquad \begin{cases} 0 & \sigma < 0 \\ \infty & \sigma \geq 0 \end{cases}$$

Antitrasformata di Laplace - Modi di un sistema

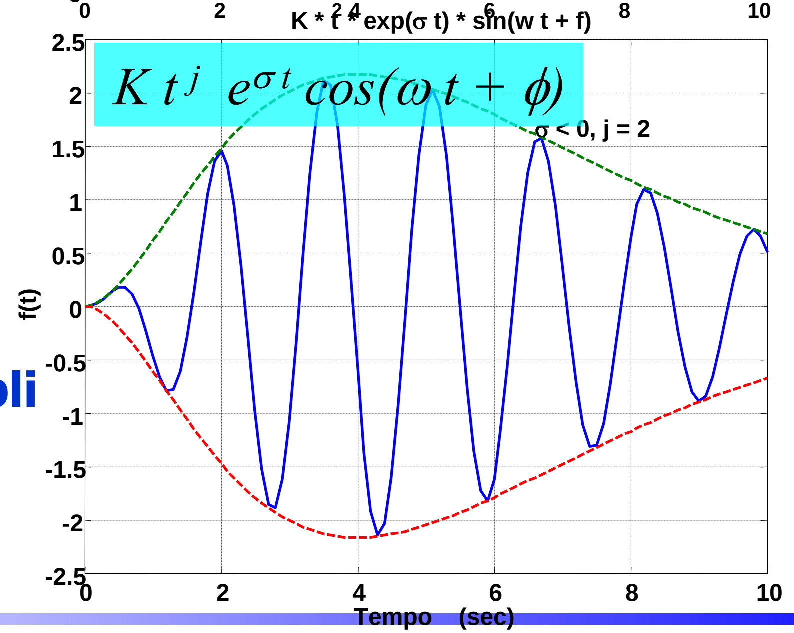


Poli semplici





Poli multipli



Antitrasformata di Laplace

Risultato fondamentale:

- *l'antitrasformata di una funzione razionale fratta **rimane limitata** se e solo se la funzione da antitrasformare*
  - *non presenta alcun polo a parte reale positiva e*
  - *gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici,*

  ***diverge** in caso contrario.*

- I poli che caratterizzano la trasformata della risposta di un sistema dinamico lineare stazionario a un segnale di ingresso la cui trasformata di Laplace sia una funzione razionale fratta (come l'impulso di Dirac, il gradino, la sinusoide) sono quelli della funzione di trasferimento, più quelli relativi al segnale di ingresso.

$$
\begin{aligned}
Y(S) &= G(s)\,X(s) \\
&= \underbrace{\frac{s+1}{s^2+4s+6}}_{\text{poli del sistema}} \quad \underbrace{\frac{3e^{-4s}}{s(s+1)}}_{\text{poli del segnale d'ingresso}}
\end{aligned}
$$

Risposta di un sistema

- Come si è visto, la posizione dei poli della funzione di trasferimento (i *poli del sistema*) rispetto all'asse immaginario influisce sulla proprietà del sistema di ritornare in una posizione di quiete dopo una perturbazione, cioè sulla ***stabilità*** del sistema.

Dopo una perturbazione dello stato, il sistema può presentare tre comportamenti diversi:

- ***risposta limitata***: esiste una costante M_y tale che sia:

$$|y(t)| < M_y, \quad \text{per ogni } t > t_0 \qquad (1)$$

- ***risposta divergente***: non esiste alcuna costante M_y che verifichi la condizione (1).

- ***risposta convergente asintoticamente a zero***: esiste una costante M_y che verifichi la condizione (1) ed inoltre è

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

Stabilità di un sistema lineare stazionario

Risposta limitata	→	Sistema stabile
Risposta divergente	→	Sistema instabile
Risposta convergente asintoticamente a zero	→	Sistema asintoticamente stabile

- Per la stabilità di un sistema lineare stazionario a parametri concentrati è necessario e sufficiente che la funzione di trasferimento non presenti alcun polo a parte reale positiva e che gli eventuali poli a parte reale nulla siano semplici

- Per la stabilità asintotica è necessario e sufficiente che tutti i poli abbiano parte reale negativa

Stabilità i.l.u.l.

- Stabilità ingresso limitato – uscita limitata:

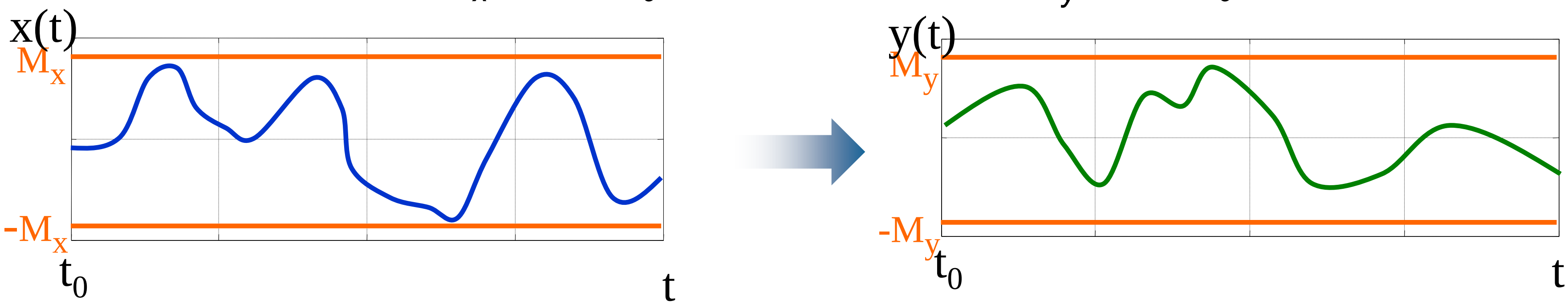
  un sistema, riferito a uno stato di equilibrio in cui ingresso e uscita sono identicamente nulli, si dice stabile ingresso limitato – uscita limitata in tale stato di equilibrio se ad ogni segnale di ingresso che non superi un determinato limite presenta una risposta limitata

- In termini matematici:

  Un sistema è i.l.u.l. se:

  $\exists M_x, M_y, 0 < M_x, M_y < \infty :$

  $\forall x(t), |x(t)| < M_x, \forall t > t_0$ allora $|y(t)| < M_y, \forall t > t_0$



Per i sistemi lineari stazionari descritti da funzioni di trasferimento razionali fratte la stabilità asintotica implica la stabilità i.l.u.l.

CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria Gestionale
http://www.automazione.ingre.unimore.it/pages/corsi/ControlliAutomaticiGestionale.htm

ANTITRAFORMATE DI LAPLACE
MODI DI UN SISTEMA
FINE

Ing. Federica Grossi
Tel. 059 2056333
e-mail: federica.grossi@unimore.it
http://www.dii.unimore.it/wiki/index.php/Federica_Grossi