CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria della Gestione Industriale

TRASFORMATE DI LAPLACE

Ing. Luigi Biagiotti
Tel. 051 2093034 / 051 2093068
e-mail: lbiagiotti@deis.unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/~lbiagiotti

Trasformate di Laplace

- Gli esempi visti di sistemi dinamici hanno mostrato che la loro evoluzione nel tempo può essere rappresentata da modelli matematici lineari stazionari del tipo

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ equazioni differenziali lineari ordinarie di ordine n.

- Per lo studio di tali sistemi, è quindi necessario essere in grado di risolvere una equazione di questo tipo, cioè di sapere calcolare una funzione y(t) che la verifica.

- E' indispensabile quindi la conoscenza delle proprietà e dei procedimenti di soluzione delle equazioni differenziali lineari, in particolare delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti.

PROCEDIMENTO "DIFFICILE"

Trasformate di Laplace

- Un modo più semplice per risolvere equazioni differenziali è quello di fare ricorso all'utilizzo delle *Trasformate di Laplace*, per le quali peraltro si deve introdurre l'uso dei numeri complessi e delle funzioni di variabile complessa.

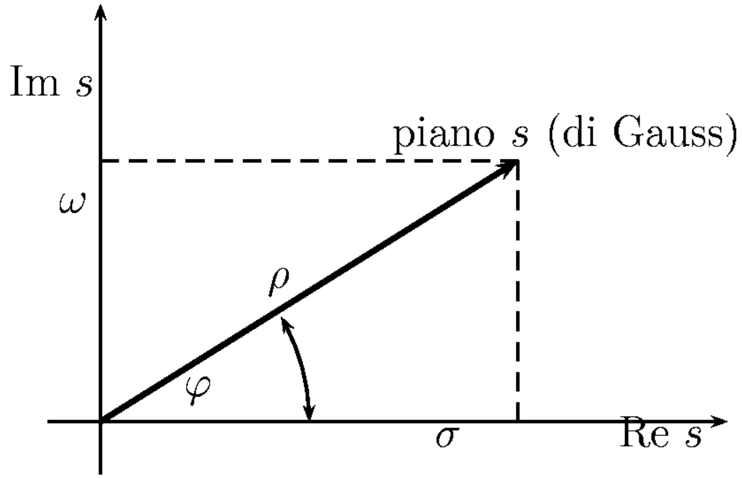
- Le trasformate di Laplace, oltre a permettere di risolvere in modo relativamente semplice equazioni differenziali ordinarie come la (1), permettono di porre in stretta connessione la soluzione delle equazioni differenziali con tecniche di analisi armonica, altro strumento molto importante per l'analisi di sitemi dinamici.

- **Trasformate di Laplace:**
  - risoluzione di equazioni differenziali
  - funzioni di trasferimento
  - risposta all'impulso
  - risposta al gradino
  - comportamento dinamico dei sistemi lineari (anche non lineari)

Funzioni di variabili complesse

- Nello studio delle trasformate di Laplace, si utilizzano variabili $s \in \mathbb{C}$.

- I numeri complessi si possono rappresentare come punti di un piano (piano di Gauss), i cui assi coordinati si dicono asse reale ed asse immaginario.



- Un numero complesso s si può esprimere come:

$$\begin{cases} s = \sigma + j\,\omega\,, & \text{forma cartesiana} \\ s = \rho\, e^{j\varphi}\,, & \text{forma polare} \end{cases}$$

Funzioni di variabili complesse

- Nella forma cartesiana:
  - σ è la parte reale: $\sigma = \mathrm{Re}\{s\}$
  - ω è la parte immaginaria: $\omega = \mathrm{Im}\{s\}$

- Nella forma polare:
  - ρ è il modulo: $\rho = |s|$
  - φ è l'argomento: $\varphi = \arg\{s\}$

- Dalla relazione

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi$$

si deducono le seguenti formule per il passaggio dalla forma polare alla forma cartesiana e viceversa

$$\sigma = \rho \cos\varphi \ , \qquad \omega = \rho \operatorname{sen}\varphi$$

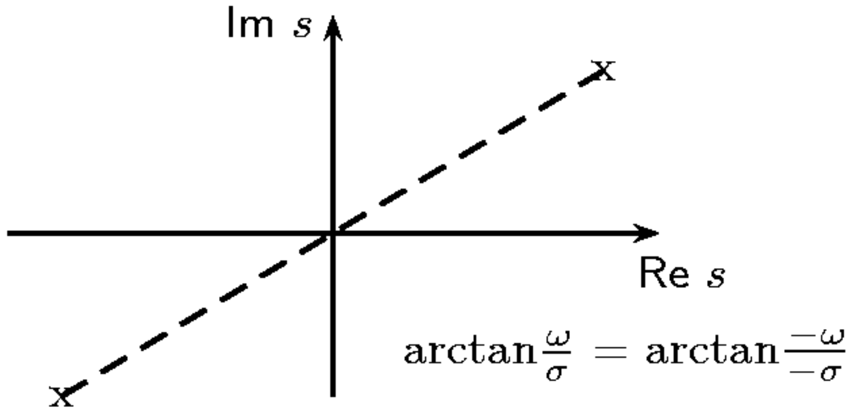
$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \ , \qquad \varphi = \arctan\frac{\omega}{\sigma} = \operatorname{arcsen}\frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$$

Funzioni di variabili complesse

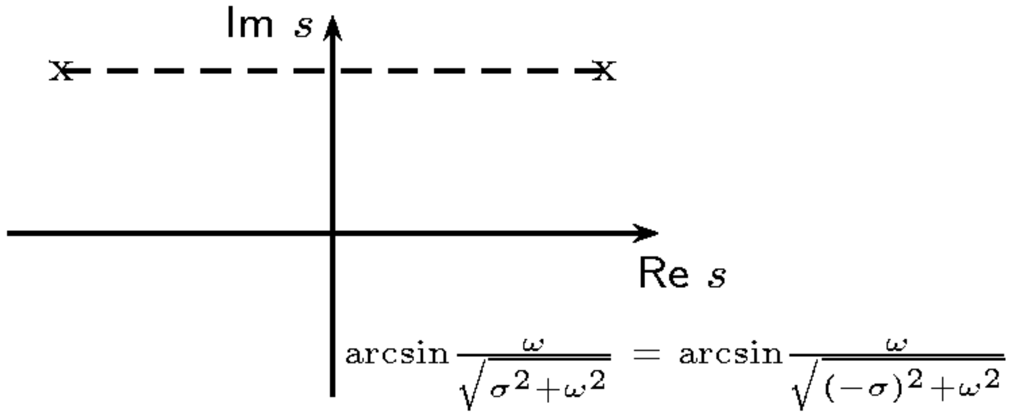
- Delle due funzioni che legano l'argomento alle parti reale e immaginaria, la seconda è la più conveniente quando $\sigma \to 0$, cioè per valori di $\tan\varphi \to \infty$.

- Comunque, esse sono entrambe inesatte perché le funzioni trigonometriche sono biunivoche (invertibili) solo in opportuni intervalli di misura π, mentre la conoscenza di σ e ω consente di determinare univocamente il valore di nell'intero intervallo, lungo 2π, corrispondente al valore principale.

- L'uso della prima espressione per il calcolo dell'argomento non consente di distinguere, nella forma polare, fra un numero complesso e il suo opposto di segno, mentre l'uso della seconda non consente di distinguere fra un numero complesso e il suo simmetrico rispetto all'asse immaginario.



$$\arctan\frac{\omega}{\sigma} = \arctan\frac{-\omega}{-\sigma}$$



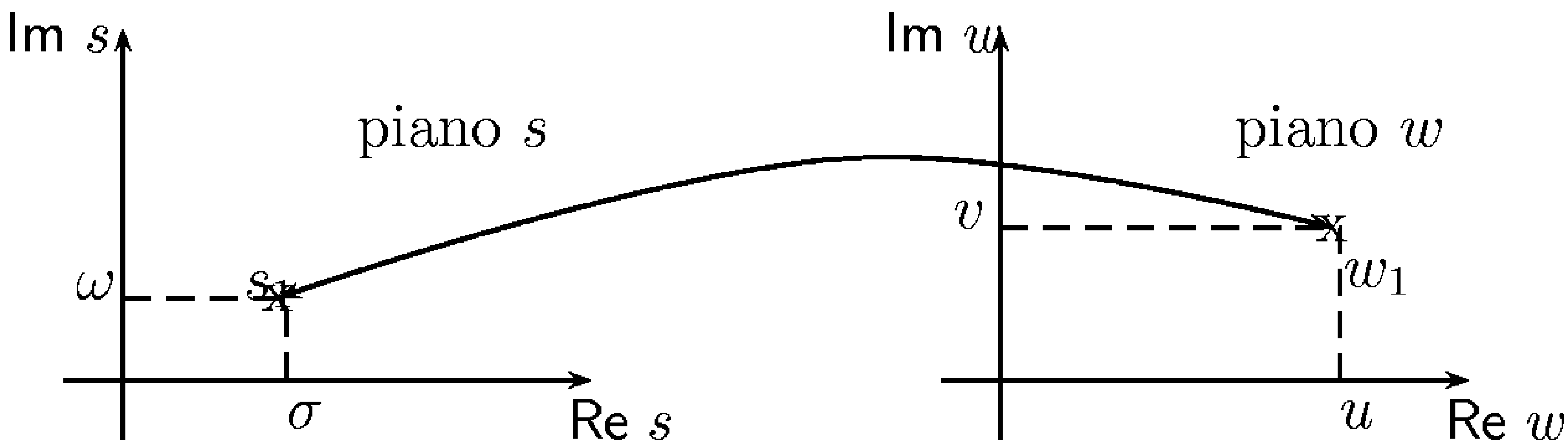
$$\arcsin\frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}} = \arcsin\frac{\omega}{\sqrt{(-\sigma)^2+\omega^2}}$$

Funzioni di variabili complesse

- Una funzione di variabile complessa

$$w = f(s) = u(\sigma,\omega) + j\,v(\sigma,\omega)$$

viene assegnata specificando le due funzioni di variabile reale $u(\sigma,\omega)$ e $v(\sigma,\omega)$, che ne rappresentano la parte reale (u) e la parte immaginaria (v), e stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i punti di due piani: il piano di Gauss della variabile indipendente s e quello della variabile dipendente w.



Corrispondenza stabilita da una funzione di variabile complessa $w_1 = f(s_1)$

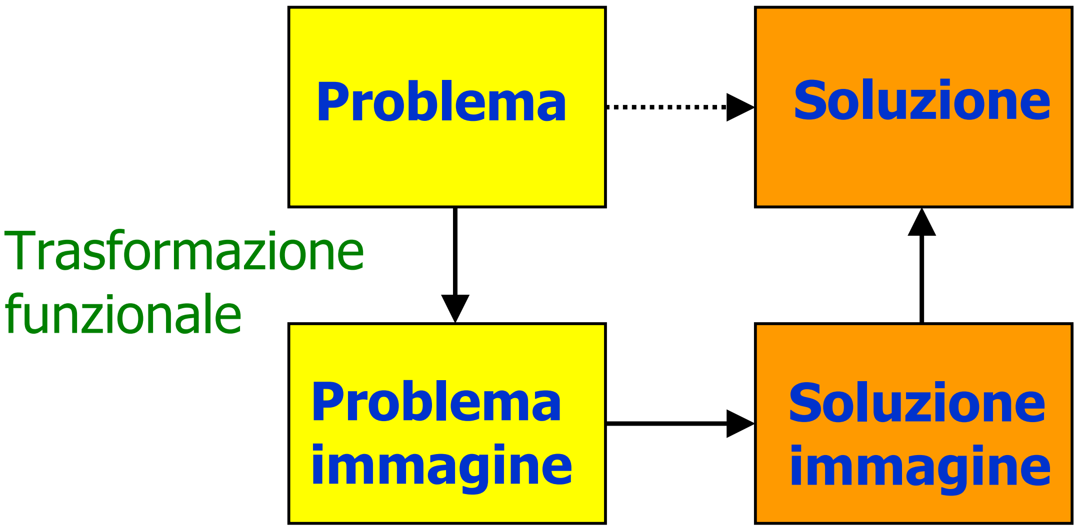
Trasformate di Laplace

- Per la soluzione delle equazioni differenziali sono di notevole utilità le *trasformazioni funzionali*, cioè le trasformazioni che associano funzioni a funzioni, in particolare la *trasformazione di Laplace*.

- Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra *funzioni oggetto*, normalmente funzioni del tempo, e *funzioni immagine* di diversa natura.

- Operazioni eseguite sulle funzioni oggetto, come per esempio la derivazione, corrispondono ad operazioni più semplici sulle funzioni immagine e al *problema oggetto* viene ad essere associato un problema immagine di più facile soluzione.

- Dalla soluzione immagine si passa poi alla soluzione oggetto eseguendo sulle funzioni immagine l'operazione di *antitrasformazione* o *trasformazione inversa.*



Trasformazione inversa

Ad esempio, mediante la trasformazione di Laplace un'equazione differenziale o integro-differenziale nelle funzioni oggetto si trasforma in un'equazione algebrica, di più semplice soluzione, nelle funzioni immagine.

Trasformate di Laplace

- La trasformazione di Laplace associa ***in modo biunivoco*** a una generica funzione del tempo f(t) a valori reali o complessi una funzione F(s) a valori in genere complessi e definita per valori di s pure complessi.

$$f(t) \iff F(s) \qquad \begin{cases} s \in \mathbb{C} \\ F(s) \in \mathbb{C} \end{cases}$$

- Si usa la notazione $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$,

  che ha il significato: “F(s) è la *trasformata di Laplace* di f(t)”.

- Per la biunivocità della corrispondenza, si può scrivere

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

  con il significato: “f(t) è l’*antitrasformata di Laplace* di F(s)”

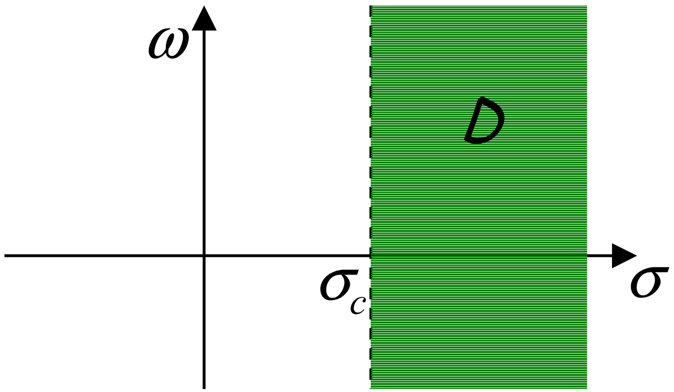
Trasformate di Laplace

- La trasformata e l'antitrasformata di Laplace sono definite dalle relazioni

$$F(s) \;:=\; \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (1)$$

$$f(t) \;=\; \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds \qquad (2)$$

- Dove si può dimostrare che se l'integrale in (2) esiste per $s_0 = \sigma_0 + j\,\omega_0$, esso esiste per ogni valore $s = \sigma + j\,\omega$ con $\sigma \geq \sigma_0$.
- La trasformata è pertanto definita in un dominio del piano s avente come contorno una retta parallela all'asse immaginario, che può non appartenere al dominio. Esso si dice *dominio di convergenza* e l'ascissa σ_c di tale retta *ascissa di convergenza*.



Condizioni per l'esistenza della trasformata di Laplace

- Esempio:
  Gradino unitario u(t), valutato per s reale (s = σ):

$$f(t) = u(t) = 1, \quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty 1 e^{-\sigma t} dt = \left. \frac{e^{-\sigma t}}{-\sigma} \right|_{t=0}^{t=\infty}$$

  si ha convergenza per σ > 0 $\longrightarrow$ $\sigma_c = 0$.

- Le condizioni sotto le quali una data funzione *f(t)* è trasformabile secondo Laplace sono abbastanza estensive: in pratica risultano soddisfatte da qualunque funzione del tempo che rivesta interesse nell'ambito dell'analisi dei sistemi. Condizioni sufficienti perché una funzione $f(t)$ a valori in generale complessi ammetta trasformata di Laplace sono:
  1. $f(t)$ nulla per t<0;
  2. $f(t)$ limitata al finito, cioè per ogni valore t_0 finito esiste una costante reale M_1 tale che $|f(t)| < M_1 \text{ per } 0 \le t \le t_0$
  3. $f(t)$ continua a tratti per t>0, cioè con un numero finito di punti di discontinuità in ogni intervallo di tempo di lunghezza finita;

Condizioni per l'esistenza della trasformata di Laplace

4. $f(t)$ di ordine esponenziale per t tendente all'infinito, cioè tale che esistano due costanti reali M_2 e σ_0 e un valore t_0 per cui sia

$$|f(t)| < M_2 e^{\sigma_0 t} \text{ per } t \geq t_0$$

Infatti, detto M il maggiore fra M_1 ed M_2 e β il maggiore fra σ_0 e 0, si può scrivere

$$|f(t)| < M e^{\beta t} \quad \text{per } t \geq 0$$

e pertanto

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-\sigma t} dt \right| < M \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{\beta t} dt = \frac{M}{\sigma - \beta} \quad \text{per } \sigma > \beta$$

da cui risulta che la funzione è trasformabile e la sua ascissa di convergenza è non superiore a β.

Proprietà delle trasformate

- Linearità

  Dette c_1 e c_2 due costanti complesse arbitrarie, $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ due funzioni del tempo le cui trasformate siano rispettivamente $F_1(s)$ e $F_2(s)$, vale la relazione

$$\mathcal{L}\left[c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t)\right] = c_1\, F_1(s) + c_2\, F_2(s)$$

- In corrispondenza di valori coniugati della variabile complessa s una generica trasformata di Laplace $F(s)$ assume valori coniugati, cioè vale la relazione

$$F(s^*) = F^*(s)$$

- Messa in scala

$$f(at) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Proprietà delle trasformate

- Traslazione nel tempo

$$u_G(t - t_0)\ f(t - t_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad F\Big(s\Big)e^{-st_0}$$

- Traslazione nella frequenza

$$f(t)e^{s_0 t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F\Big(s - s_0\Big)$$

- Convoluzione nel tempo

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_a^b f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_1(s)\ F_2(s)$$

- determinazione dell'evoluzione $y(t)$ dell'uscita di un sistema senza il calcolo dell'integrale di convoluzione (necessaria la conoscenza della $G(s) = H(s)$, cioè la fdt di un sistema dinamico lineare stazionario coincide con la trasformata della sua risposta all'impulso);
- analisi di sistemi complessi (lineari e stazionari) ottenuti come interconnessione di sistemi più semplici (lineari e stazionari).

Proprietà delle trasformate

- Convoluzione nella frequenza

$$F_1(s) * F_2(s) = \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F_1(\lambda) F_2(s-\lambda) d\lambda$$

questo integrale esiste $\forall\ s$: $\text{Re}\{s\} \geq \sigma_0 + \sigma_2$. Si ha

$$f_1(t) f_2(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2\pi j}[F_1(s) * F_2(s)]$$

- Derivazione

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad \Longleftrightarrow \quad s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - s^{n-3} f^{(2)}(0^-) - \ldots - f^{(n-1)}(0^-)$$

si noti che se le condizioni iniziali (per $t = 0^-$) di $f(t)$ e delle sue derivate sono nulle, allora

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad s^n F(s)$$

Proprietà delle trasformate

- Integrazione

$$\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{F(s)}{s}$$

- Teorema del valore iniziale

$$f(0^+) \qquad = \qquad \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

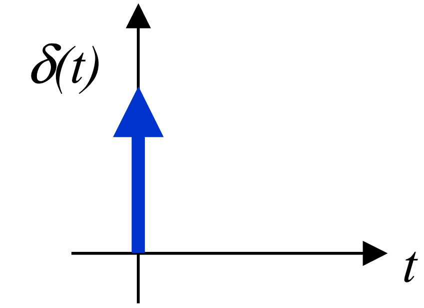
- Teorema del valore finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) \qquad = \qquad \lim_{s\to 0} sF(s)$$

N.B.: $sF(s)$ non deve avere poli a parte reale ≥ 0 (stabilità)!

Trasformate di Laplace

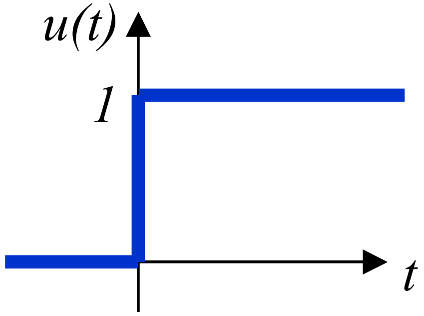
Impulso



$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

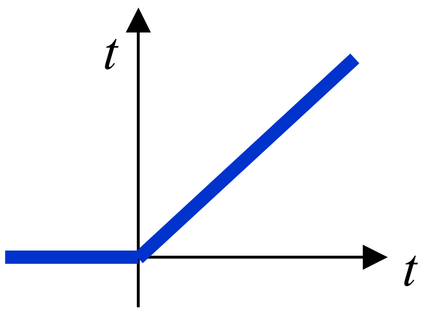
Gradino unitario



$$f(t) = u(t) = 1, \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s}\left\{ e^{-st}\Big|_{t=\infty} - e^{-st}\Big|_{t=0} \right\} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

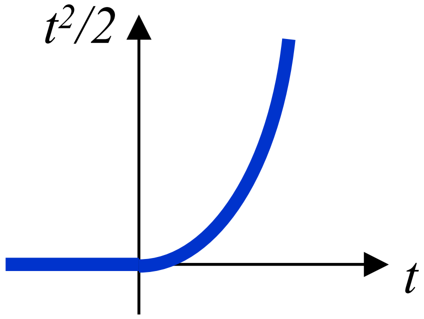
Rampa unitaria



$$f(t) = t, \quad t > 0$$

$$F(s) = \mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

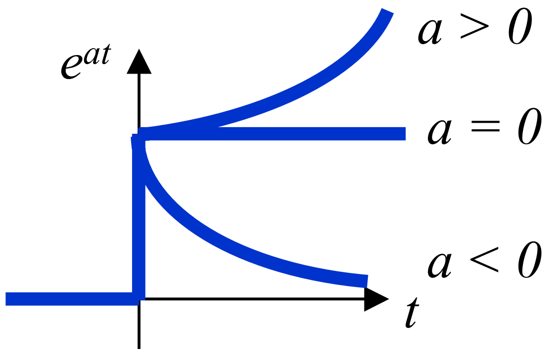
Parabola unitaria



$$f(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[t^2/2\right] = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{2} e^{-st} dt = \frac{1}{s^3}$$

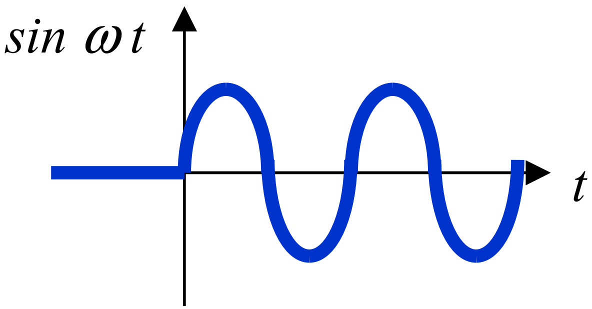
Esponenziale



$$f(t) = e^{at}$$

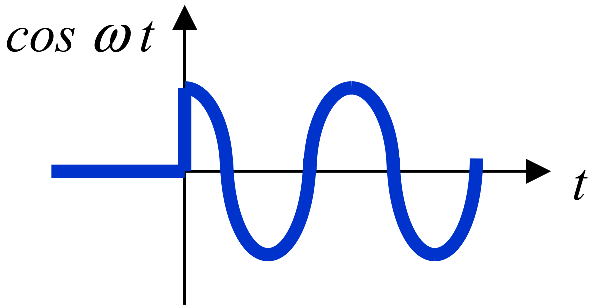
$$F(s) = \mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{s-a}$$

Sinusoide



$$f(t) = \sin \omega t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[\sin \omega t\right] = \int_0^{\infty} \sin wt \;\; e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Cosinusoide		$f(t) = \cos \omega t$ $F(s) = \mathcal{L}[\cos \omega t] = \int_0^{\infty} \cos wt \;\; e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

- La quasi totalità delle trasformate di Laplace di uso più corrente nell'analisi dei sistemi lineari si può dedurre dalla relazione fondamentale

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

  dove
  - ***n*** è un generico numero intero positivo
  - ***a*** è una costante reale o complessa

- Viene sottinteso che l'espressione della funzione di cui si considera la trasformata sia relativa a valori del tempo non negativi e che per valori del tempo negativi la funzione stessa sia identicamente nulla: di conseguenza può essere presente una discontinuità nell'istante t = 0.

Trasformate di Laplace

Tabelle delle Trasformate di Laplace

$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$ (impulso unitario in $t=0$)
$\frac{1}{s}$	$u(t)$ (gradino unitario in $t=0$)
$\frac{1}{s^2}$	$t\,u(t)$ (funzione rampa)
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
$\frac{1}{s}e^{-as}$	$u(t-a)$ (gradino unitario in $t=a$)
$\frac{1}{s+a}, \qquad \frac{1}{1+\tau s}$	$e^{-at}, \qquad \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(s+a)^n}, \qquad \frac{1}{(1+\tau s)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}, \qquad \frac{1}{\tau^n(n-1)!}t^{n-1}e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{s(s+a)}, \qquad \frac{1}{s(1+\tau s)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at}), \qquad 1-e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
$\frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$
$\frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left((\alpha-a)e^{-at}-(\alpha-b)e^{-bt}\right)$
$\frac{1+Ts}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\left(1-\frac{T}{\tau_1}\right)e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\left(1-\frac{T}{\tau_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen}\omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$

Trasformate di Laplace - Esempi

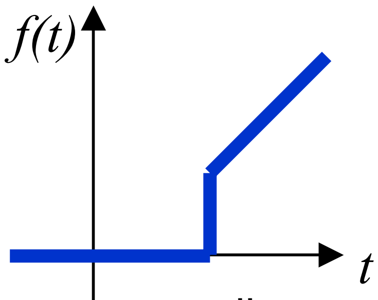
1) Si consideri la funzione

$$f(t) = 5te^{-2t} + 7e^{-3t}\cos 4t, \qquad t >= 0$$

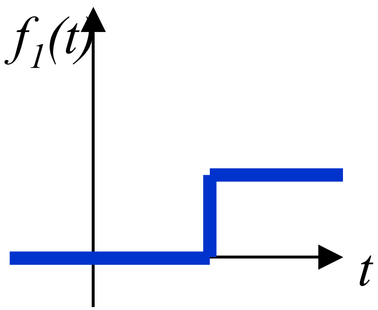
Ricordando la proprietà di linearità, e utilizzando le tabelle, è immediato ottenere

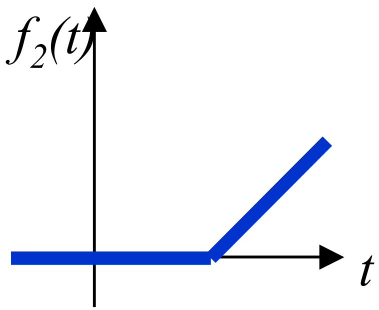
$$F(s) = \frac{5}{(s+2)^2} + \frac{7(s+3)}{(s+3)^2+16}$$

2) Sia dato il segnale di figura



Il segnale può essere pensato come somma di un gradino ritardato e di una rampa (ritardati di 5 sec)





$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = u(t-5) + [u(t-5)](t-5)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= F_1(s) + F_2(s) = \frac{e^{-5s}}{s} + \frac{e^{-5s}}{s^2} = e^{-5s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) \\ &= e^{-5s}\left(\frac{s+1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Funzione di trasferimento

- Un modello matematico di un sistema dinamico lineare e stazionario può essere espresso mediante una equazione differenziale del tipo

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x$$

- Dato un segnale f(t), la trasformata di Laplace per la sua generica derivata i-esima è data da

$$\mathcal{L}\left[D^i f(t)\right] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} f(t) \bigg|_{t=0^-}$$

- Si prende in esame la trasformazione dell'equazione differenziale, riscritta come

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i x(t)$$

Funzione di trasferimento

- Trasformando (teorema delle derivate) si ottiene

$$\mathcal{L}\left[D^i y(t)\right] \quad = \quad s^i Y(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t)\Big|_{t=0^-}$$

$$\mathcal{L}\left[D^i x(t)\right] \quad = \quad s^i X(s) - \underbrace{\sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} x(t)\Big|_{t=0^-}}_{=0,\;\; x(t)=0,\;\; t<0}$$

da cui

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i X(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t)\Big|_{t=0^-}$$

Funzione di trasferimento

- Da questa risulta che la trasformata di Laplace Y(s) della soluzione dell'equazione differenziale è data dalla somma delle due funzioni

$$Y(s) = Y_0(s) + Y_1(s)$$

con

$$Y_0(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t)\Big|_{t=0^-} \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$$

$$Y_1(s) = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i s^i \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \right) X(s)$$

che si possono riconoscere come le trasformate dell'*evoluzione libera* e dell'*evoluzione forzata*.

Funzione di trasferimento

- Si è ottenuta la relazione

$$Y(s) = Y_0(s) + Y_1(s)$$

dove

$$\begin{aligned}
Y_0(s) &= \left. \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \right|_{t=0^-} \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \\
Y_1(s) &= \left(\sum_{i=0}^{m} b_i s^i \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \right) X(s)
\end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{\left. \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \right|_{t=0^-}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} + \left(\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \right) X(s)$$

Funzione di trasferimento

- Spesso nell'ambito dei controlli automatici si fa riferimento a sistemi *inizialmente in quiete*, cioè con tutte le condizioni iniziali nulle.

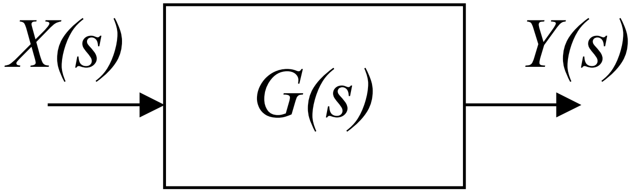
$$\Rightarrow \qquad Y_0(s) \equiv 0$$

- La trasformata di Laplace del segnale di uscita si ottiene semplicemente moltiplicando quella del segnale di ingresso per la “funzione di trasferimento” del sistema

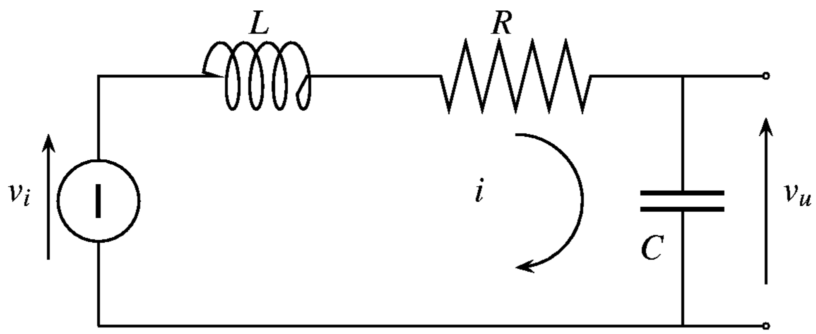
$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$$

- La *funzione di trasferimento* di un sistema è una funzione G(s) della variabile s, moltiplicando la quale per la trasformata di Laplace X(s) della funzione di ingresso si ottiene la trasformata di Laplace dell'evoluzione forzata

$$Y_1(s) = G(s)X(s)$$



Funzione di trasferimento - Esempio



- Per questo circuito, si può scrivere l'equazione (legge di Kirhhoff):

$$\begin{aligned} v_i(t) &= v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) \\ &= L\,D\,i(t) + R\,i(t) + \frac{1}{C}\frac{1}{D}\,i(t) \end{aligned}$$

da cui

$$D\,v_i(t) = \left(L\,D^2 + R\,D + \frac{1}{C}\right) i(t) \quad \overset{i(t)=C\,D\,v_u(t)}{\Longrightarrow} \quad v_i(t) = (L\,C\,D^2 + R\,C\,D + 1)\, v_u(t)$$

Funzione di trasferimento - Esempio

- Si considerano le condizioni iniziali

$$i(0^-) = i_0 \,, \qquad\qquad v_u(0^-) = e_0$$

e si applica all'ingresso un gradino di tensione di ampiezza V_0. Trasformando ambo i membri, si ottiene

$$V_i(s) = LC\left(s^2 V_u(s) - s\, v_u(0^-) - v_u'(0^-)\right) + RC\left(s V_u(s) - v_u(0^-)\right) + V_u(s)$$

- Notando che è

$$v_u(0^-) = e_0 \,, \quad v_u'(0^-) = \frac{1}{C} i_0$$

si deduce poi

$$V_u(s) = \frac{1}{LC s^2 + RC s + 1} V_i(s) + \frac{L i_0 + LC s e_0 + RC e_0}{LC s^2 + RC s + 1}$$

Nel caso in esame

$$V_i(s) = \frac{V_0}{s}$$

Funzione di trasferimento - Esempio

- Per la soluzione completa dell'equazione differenziale occorre naturalmente antitrasformare l'espressione ottenuta.

- In questo caso, l'antitrasformazione non presenta alcuna difficoltà: ciascuno dei due termini a secondo membro è un rapporto di polinomi in s, facilmente antitrasformabile con il procedimento che verrà descritto in seguito.

- Da

$$V_u(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s) + \frac{Li_0 + LCse_0 + RCe_0}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- considerando nulle le condizioni iniziali $\quad i_0 = 0 \qquad e_0 = 0$

- si ottiene

$$V_u(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$

- e si può notare che la funzione di trasferimento di questo sistema è data da

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \qquad V_u(s) = G(s)V_i(s)$$

CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria della Gestione Industriale

Trasformate di Laplace
FINE

Ing. Luigi Biagiotti
Tel. 051 2093034 / 051 2093068
e-mail: lbiagiotti@deis.unibo.it
http://www-lar.deis.unibo.it/~lbiagiotti