

1. Diagrammi di Bode

I **diagrammi di Bode** sono una rappresentazione grafica della *risposta in frequenza* $G(j\omega)$. Nei diagrammi di Bode si riportano separatamente, in due distinti diagrammi, il modulo e la fase di $G(j\omega)$ al variare della frequenza.

Il diagramma del modulo è di tipo logaritmico (base 10) e presenta in ascissa il logaritmo delle pulsazioni e in ordinata il valore del modulo espresso in decibel. Il diagramma della fase è di tipo semilogaritmico e riporta in ascissa il logaritmo della pulsazione, in ordinata la fase espressa in gradi sessagesimali.

2. Diagrammi di Bode di termini elementari

- **Termine k (costante reale positiva, fig. 1).** Una costante è un numero reale il cui valore non cambia al variare della pulsazione: il suo diagramma dei moduli è pertanto rappresentato da una retta orizzontale di ordinata $20 \cdot \log k$ dB. La fase, trattandosi di un numero reale positivo, è identicamente nulla e il relativo diagramma è costituito da una retta coincidente con l'asse orizzontale.
- **Termine $G(j\omega) = (1 + j\omega T)$ (zero, figg. 2 e 3).** Per $\omega \ll \frac{1}{T}$ (bassa frequenza) si osserva che $\omega \cdot T \ll 1$: la parte immaginaria è dunque trascurabile e pertanto la funzione di trasferimento è approssimabile con una costante $k = 1$. Per $\omega \gg \frac{1}{T}$ (alta frequenza) si ha che $\omega \cdot T \gg 1$ e la funzione di trasferimento verrà approssimata al numero immaginario $j\omega T$. Il modulo di $j\omega T$ è $20 \cdot \log \omega T$ dB mentre la fase, trattandosi di un numero immaginario positivo, vale 90° . Alle basse frequenze il diagramma dei moduli è costituito da una semiretta di ordinata $20 \cdot \log 1 = 0$, mentre la fase ha valore zero. Alle alte frequenze il diagramma

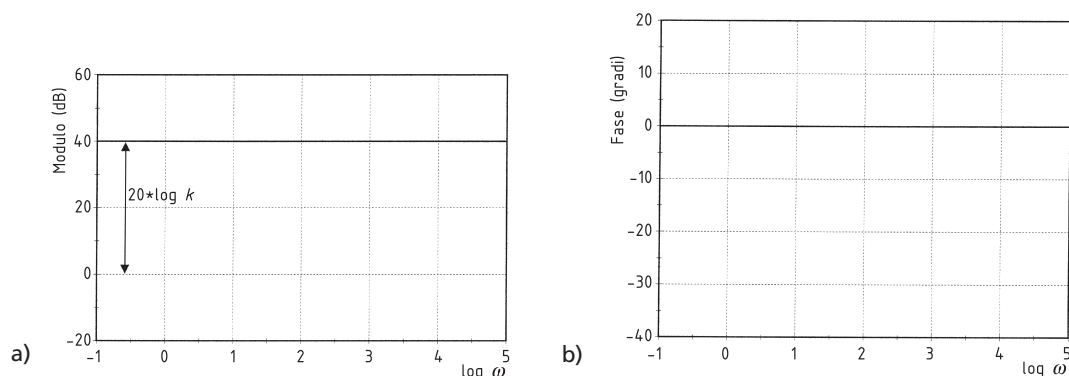


Fig. 1. Diagrammi asintotici di Bode di una costante k (costante reale positiva): a) modulo; b) fase.

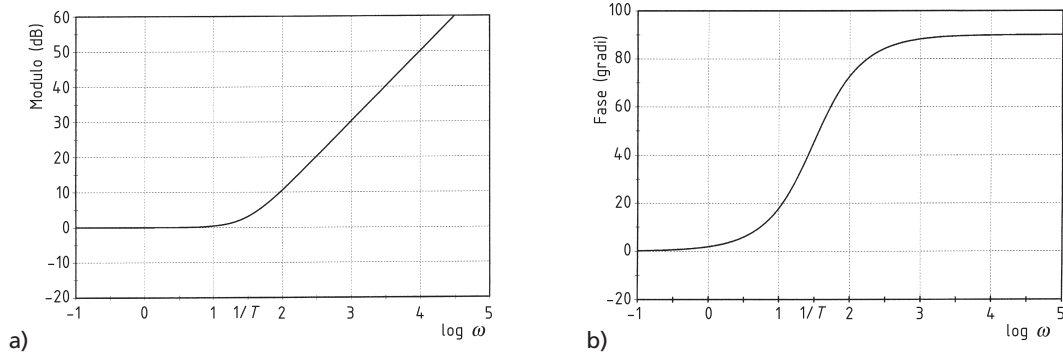


Fig. 2. Diagrammi di Bode dello zero reale: a) modulo; b) fase.

dei moduli è rappresentato da una semiretta di pendenza 20 dB/decade: per dimostrarlo basta porre $\log \omega = x$; in tal modo si ottiene $G = 20 \cdot x + 20 \cdot \log T$, che è l'equazione di una retta con pendenza 20 dB/decade (6 dB/ottava) che interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza del valore

$$\log \omega = -\log T = \log \frac{1}{T} \quad \text{cioè} \quad \omega = \frac{1}{T}$$

Per i valori di pulsazione compresi nell'intervallo da una decade prima a una decade dopo la pulsazione $\frac{1}{T}$ (media frequenza), il modulo è dato dalla relazione

$$20 \log |G| = 20 \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = 10 \log(1 + \omega^2 T^2)$$

La fase è data dalla relazione:

$$\varphi = \arctan \frac{\omega}{T}$$

In alternativa ai diagrammi reali del modulo e della fase se ne possono considerare degli approssimati, detti diagrammi *asintotici* (fig. 3), costruiti estendendo nel campo delle medie frequenze le ipotesi di semplificazione adottate per le alte e le basse frequenze: si ipotizza che la semplificazione adottata per le basse frequenze sia valida per tutti i valori di frequenza fino a $\frac{1}{T}$ e l'approssimazione adottata per le alte sia valida per tutti i valori oltre $\frac{1}{T}$.

Lo scostamento massimo che si verifica tra diagramma asintotico dei moduli e diagramma reale dei moduli è di 3 dB in corrispondenza della pulsazione $\frac{1}{T}$.

- **Termine** $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^m}$ (polo nell'origine di molteplicità m , fig. 4). Si tratta di un numero immaginario avente fase $-m \cdot 90^\circ$ e modulo, espresso in dB, $G = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\omega^m}\right) = -m \cdot 20 \log \omega = -20 \cdot m \cdot x$ (avendo posto $x = \log \omega$). Geometricamente è una retta di pendenza $-20 \cdot m$ dB/decade, passante per l'origine; in particolare per

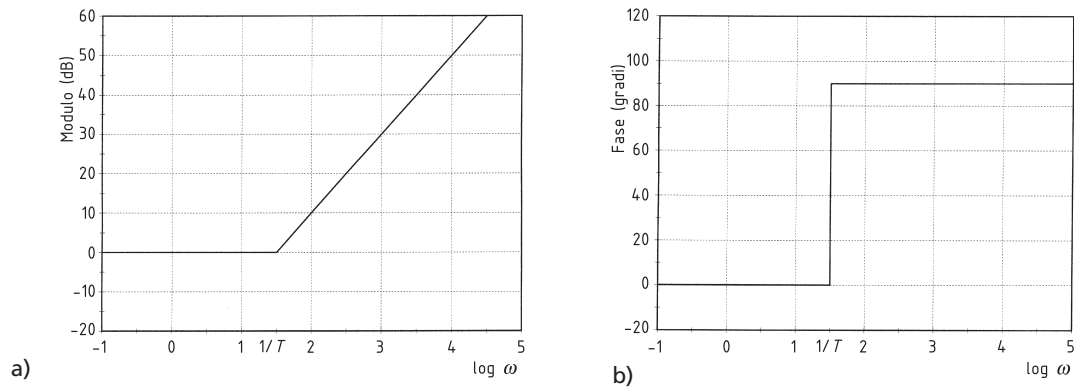


Fig. 3. Diagrammi asintotici di Bode dello zero reale: a) modulo; b) fase.

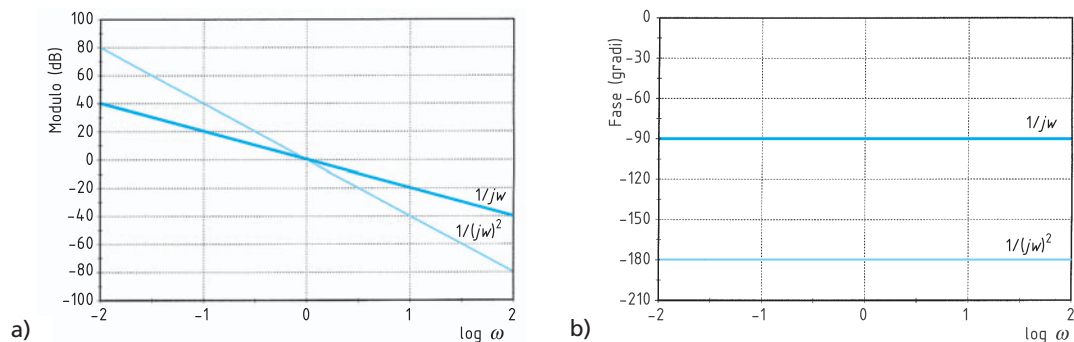


Fig. 4. Diagrammi di Bode del polo nell'origine, nel caso di polo singolo e doppio: a) modulo; b) fase.

$m = 1$, cioè per polo di molteplicità unitaria, il diagramma dei moduli è una retta di pendenza -20 dB/decade (-6 dB/ottava). Nel caso di m negativo si ha uno zero nell'origine.

- Termine $G(j\omega) = \left(\frac{1}{1 + j\omega T} \right)$ (polo). Con considerazioni analoghe a quelle svolte nei casi precedenti, si ricavano i diagrammi di Bode (figg. 5 e 6). I relativi diagrammi di Bode sono simmetrici, rispetto all'asse delle ascisse, a quelli di $G(j\omega) = 1 + j\omega$ (zero). Lo scostamento massimo tra diagramma reale e diagramma asintotico è di 3 dB in corrispondenza della pulsazione $\frac{1}{T}$.

- Termine $G(j\omega) = \frac{1}{\frac{1 + 2j\xi\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$ (coppia di poli complessi e coniugati).

Questo caso si verifica in presenza di una coppia di poli complessi e coniugati; usualmente la coppia di poli viene matematicamente rappresentata dal termine di secondo grado sopra riportato e derivato dalla [61.4] scheda 61,

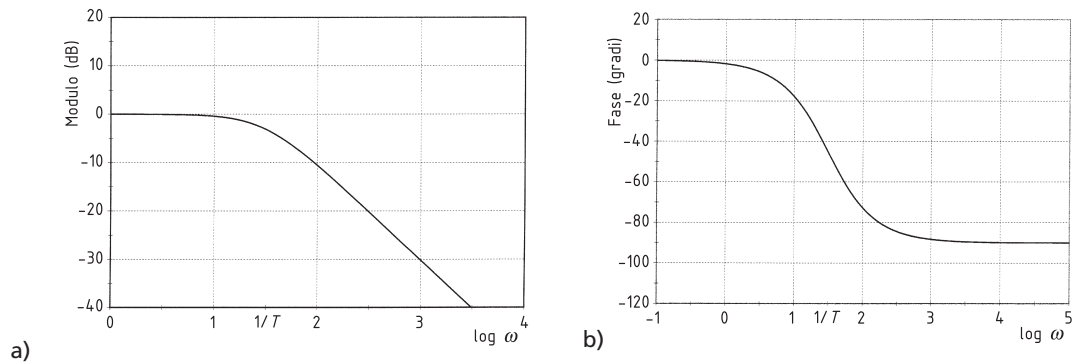


Fig. 5. Diagrammi di Bode di un polo singolo: a) modulo; b) fase.

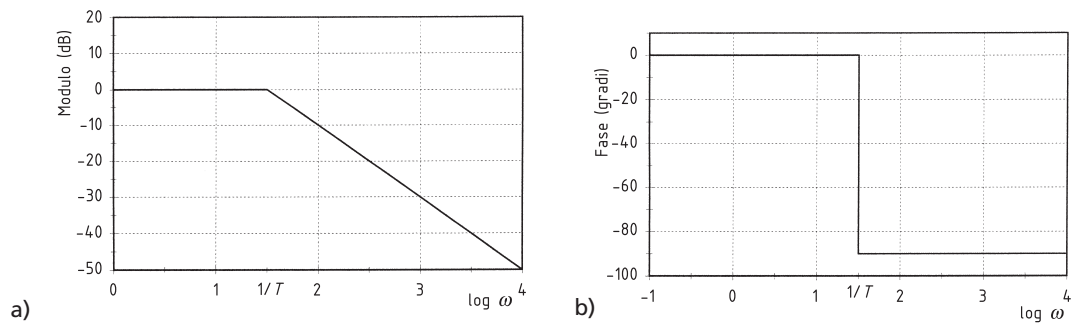


Fig. 6. Diagrammi asintotici di Bode di un polo singolo: a) modulo; b) fase.

cui si rimanda per la definizione di ξ e ω_n . I diagrammi di Bode del modulo e della fase sono differenti a seconda del valore dello smorzamento (fig. 7).

I diagrammi asintotici sono riportati in figura 8: in corri-

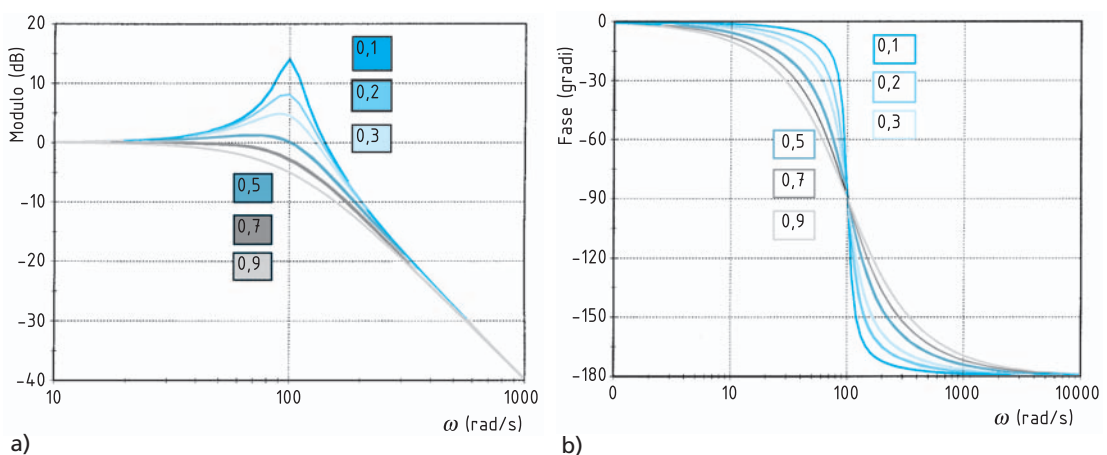


Fig. 7. Diagrammi di Bode di una coppia di poli complessi e coniugati in corrispondenza di differenti valori di ξ : a) modulo; b) fase.

spondenza della pulsazione naturale, il diagramma asintotico del modulo presenta una variazione di pendenza di 40 dB/decade, mentre quello della fase una variazione di 180°. L'errore che si commette considerando i diagrammi asintotici in luogo di quelli reali dipende dal valore dello smorzamento.

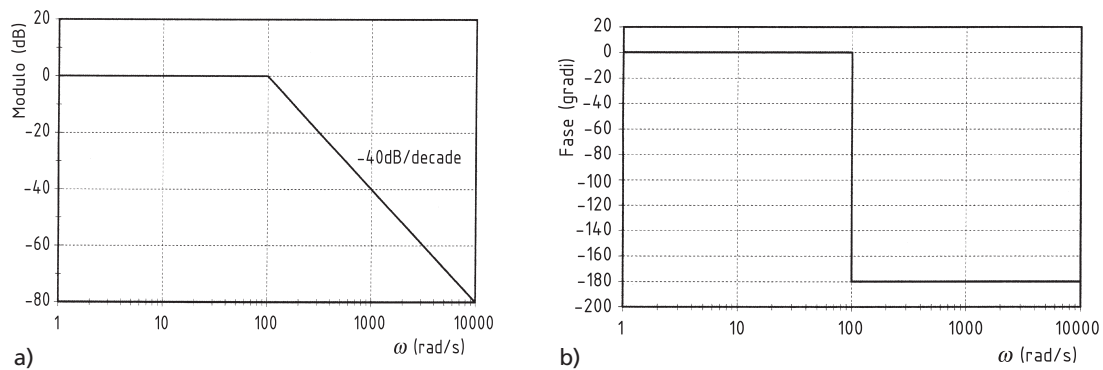


Fig. 8. Diagrammi asintotici di Bode nel caso di coppia di poli complessi e coniugati: a) modulo; b) fase.

3. Costruzione dei diagrammi di Bode di una $G(j\omega)$ generica (fig. 9)

I diagrammi di Bode di una $G(j\omega)$ qualunque, purché esprimibile mediante rapporto di polinomi in $j\omega$, si ottengono combinando graficamente i diagrammi relativi ai termini elementari presentati al paragrafo 2.

La costruzione dei diagrammi di Bode può essere ottenuta considerando le proprietà dei numeri complessi e delle scale logaritmiche. La $G(s)$ deve essere posta inizialmente nella forma di Bode (\rightarrow relazione [61.5] scheda 61); si procede quindi alla sostituzione di s con $j\omega$ ed alla individuazione dei

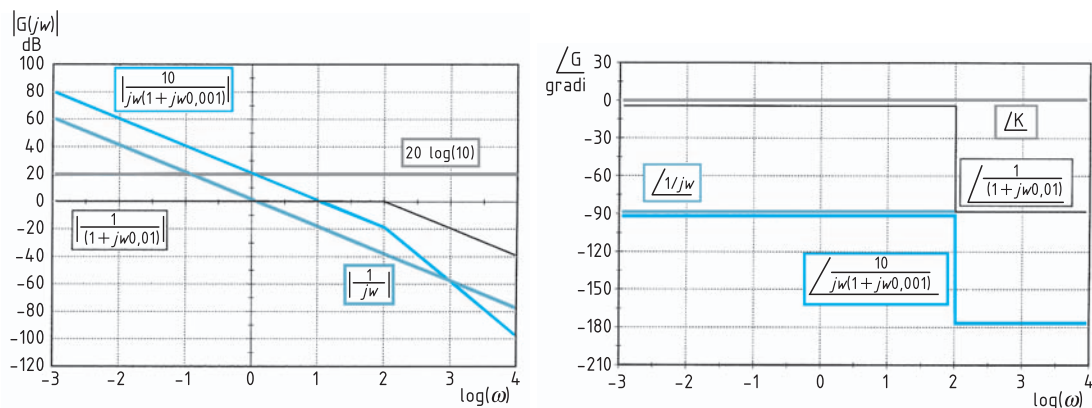


Fig. 9. Diagrammi di Bode per una funzione di trasferimento contenente più termini.

termini elementari introdotti al paragrafo 2. A questo punto, per le proprietà dei numeri complessi:

- il modulo complessivo sarà dato dal prodotto dei moduli dei singoli termini;
- la fase complessiva sarà data dalla somma delle fasi dei singoli termini.

Ricorrendo alle proprietà delle scale logaritmiche, si possono costruire i seguenti diagrammi di Bode:

- il *diagramma dei moduli* è ottenuto sommando i diagrammi dei moduli dei singoli termini elementari;
- il *diagramma delle fasi* è ottenuto sommando i diagrammi delle fasi dei singoli termini elementari.

La costruzione può essere fatta utilizzando i diagrammi reali ovvero quelli asintotici.

4. Metodo rapido per la costruzione dei diagrammi asintotici di una $G(j\omega)$ generica

Si seguano i passi elencati:

- Si pone la f.d.t. da rappresentare in forma di Bode e si individuano costante di Bode k_B e pulsazioni critiche
- Si riportano sull'asse delle pulsazioni (ascisse) le pulsazioni critiche $\left(\frac{1}{T}, \omega_n\right)$ sia sul piano logaritmico dei moduli sia su quello semilogaritmico delle fasi
- I diagrammi vengono tracciati a partire da almeno una decade prima della pulsazione critica minore fino ad almeno una decade oltre quella più alta
- Per la costruzione del diagramma dei moduli si individua sull'asse delle ordinate il valore $20 \cdot \log k_B$
- Il diagramma dei moduli alle basse frequenze, se non vi sono poli nell'origine, è costituito da una retta parallela all'asse delle ascisse e di ordinata $20 \cdot \log k_B$
- Se vi sono poli nell'origine di molteplicità m il diagramma parte alle basse frequenze con pendenza $-m \cdot 20$ dB/decade coincidendo (sino a che non incontra la prima frequenza critica, secondo quanto detto al passo successivo) con la retta passante per il punto dell'asse verticale di ordinata $20 \cdot \log k_B$
- In corrispondenza di ogni frequenza critica (polo o zero) il diagramma dei moduli subisce una variazione di pendenza di $+20$ o -20 dB/decade a seconda che si tratti, rispettivamente, di zero o polo
- Il diagramma delle fasi parte alle basse frequenze con fase zero se non vi sono poli nell'origine, mentre parte con fase $-m \cdot 90^\circ$ in caso di polo nell'origine di molteplicità m
- A ogni frequenza critica il diagramma asintotico delle fasi subisce una variazione di $+90^\circ$ o -90° , rispettivamente nel caso di zero o polo

Una volta tracciati i diagrammi di Bode asintotici si può ricavare l'andamento qualitativo del diagramma reale.

Esempio 1

Sia data $G(j\omega) = \frac{500 \cdot (1 + j\omega)}{(1 + j\omega 5) \cdot (1 + j\omega 10)}$. Essendo già in forma di Bode si può procedere direttamente alla costruzione dei diagrammi.

La costante di Bode e le pulsazioni critiche assumono i seguenti valori:

$k_B = 500$ (costante di Bode); $z_1 = 1$ (zero); $p_1 = 0,2$ (polo); $p_2 = 0,1$ (polo).

Trasformando la costante in dB e le pulsazioni nel logaritmo in base 10, si ottiene:

$k_B = 54$ dB; $z_1 = 0$; $p_1 = -0,7$; $p_2 = -1$.

I diagrammi saranno tracciati tra le pulsazioni 0,01 (−2 in scala logaritmica) e 10 (+1 in scala logaritmica).

- Si riportano sul piano logaritmico dei moduli e su quello semi-logaritmico delle fasi le pulsazioni critiche (individuando con un cerchio lo zero e con una crocetta i poli).
- Si individua sull'asse verticale del piano dei moduli il valore 54 dB.
- Si inizia a tracciare il diagramma, che alle basse frequenze (in pratica sino alla pulsazione 0,1, corrispondente a −1 sulla scala logaritmica) ha andamento orizzontale con ordinata 54 dB. In corrispondenza di p_2 il diagramma dei moduli assume una pendenza negativa di −20 dB/decade, che aumenta a −40 dB/decade in corrispondenza del successivo polo (p_1); in corrispondenza dello zero, infine, il diagramma dei moduli attenua la sua pendenza a −20 dB/decade (si noti che per tracciare correttamente il diagramma è molto importante individuare le pendenze, una volta fissate le scale sull'asse orizzontale delle pulsazioni e sull'asse verticale dei moduli) (fig. 10a).
- Il diagramma delle fasi assume il valore nullo alle basse frequenze, infine, assume il valore −90° in corrispondenza di p_2 e −180° in corrispondenza di p_1 per poi riassumere il valore −90° in corrispondenza di z_1 (fig. 10b).

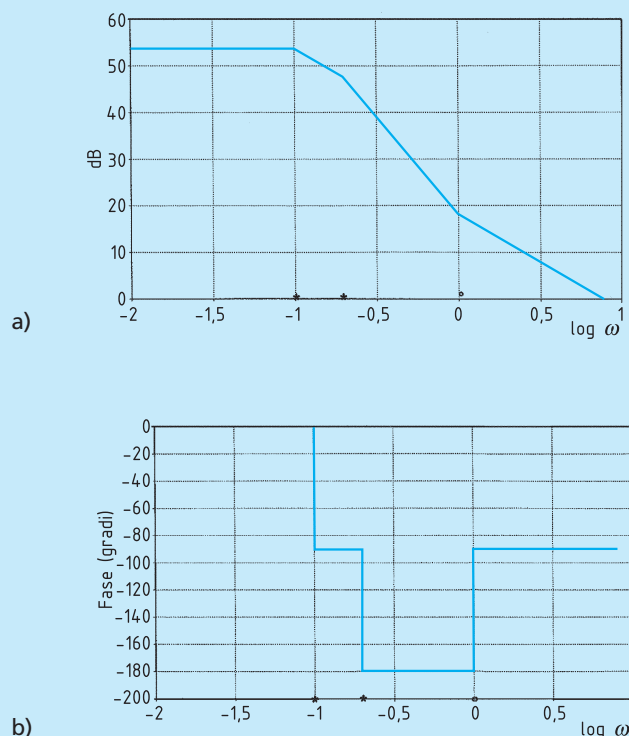


Fig. 10. Diagrammi asintotici relativi all'esempio:

a) dei moduli; b) delle fasi.