

# LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

## 1 Come ricavare la funzione di trasferimento di un circuito

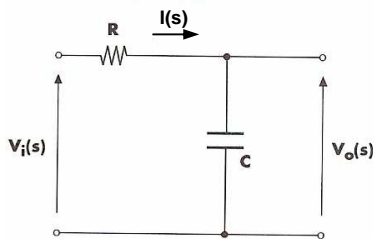
Per ricavare con facilità la funzione di trasferimento di un generico quadripolo conviene interpretare i condensatori attraverso le reattanze generalizzate  $1/sC$  e gli induttori con le reattanze generalizzate  $sL$ . Con queste posizioni la funzione di trasferimento  $G(s)$  può essere facilmente ricavata come semplice legame algebrico ingresso-uscita:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad (1.1)$$

Il risultato trovato se si pone  $s = j\omega$  esprimerà, come caso particolare, la risposta in frequenza a regime sinusoidale e in funzione di  $\omega$ .

**Esempio 1.** ricavare la f.d.t. del circuito di fig. 1.1.

Fig. 1.1 RC passa-basso.



La corrente risulta:

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{R + \frac{1}{sC}} \quad (1.1)$$

La tensione in uscita risulta:

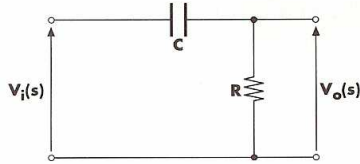
$$V_o(s) = \frac{1}{sC} I(s) = \frac{1}{sC} \cdot \frac{V_i(s)}{R + \frac{1}{sC}} \quad (1.2)$$

e quindi ricavando il rapporto uscita/ingresso si ricava:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (1.3)$$

**Esempio 2.** ricavare la f.d.t. del circuito di fig. 1.2.

Fig. 1.2 RC passa-alto.

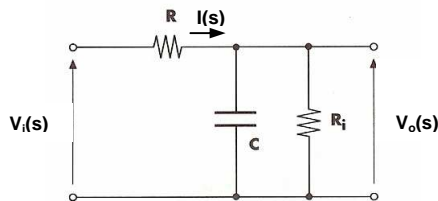


Procedendo allo stesso modo dell'esempio precedente si trova subito:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{sRC}{1 + sRC} \quad (1.4)$$

**Esempio 3.** Ricavare la f.d.t. del circuito di fig. 1.3.

FIG. 1.3 Circuito dell'esempio 3.



La corrente risulta:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V_i(s)}{R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}}} = \frac{V_i(s)}{R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC}}{1 + sR_2C}} = V_i(s) \frac{1 + sR_2C}{(R_1 + R_2) + sR_1R_2C} = \\ &= V_i(s) \frac{1 + sR_2C}{(R_1 + R_2) \left( 1 + s \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} C \right)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

e quindi la tensione in uscita risulta:

$$\begin{aligned} V_o(s) &= I(s) \cdot \frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = I(s) \cdot \frac{R_2}{1 + sR_2C} = V_i(s) \frac{1 + sR_2C}{(R_1 + R_2) \left( 1 + s \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} C \right)} \cdot \frac{R_2}{1 + sR_2C} = \\ &= V_i(s) \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{\left( 1 + s \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} C \right)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Infine si ricava la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{\left(1 + s \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C\right)} \quad (1.7)$$

## 2 Risposta in frequenza e diagrammi di Bode

Come noto se in una funzione di trasferimento si pone  $s=j\omega$  è possibile utilizzare la funzione di trasferimento per analizzare il sistema a regime sinusoidale e arrivare così a una rappresentazione grafica della sua **risposta in frequenza**.

Siccome la funzione di trasferimento  $G(j\omega)$  è una variabile complessa in funzione di  $\omega$  la sua rappresentazione grafica può risultare scomoda. Per semplificare tale rappresentazione si procede separandola in due grafici: quello del modulo e quello della fase.

In questi grafici espressi in funzione di  $f$  o di  $\omega$  la frequenza (pulsazione) è riportata in una *scala logaritmica*, al fine di rappresentare un intervallo di frequenza (pulsazione) molto ampio in poco spazio. Per comprendere questa affermazione si immagini di rappresentare come in fig. 2.1 il campo di frequenze da 0 Hz a 1 MHz con una scala lineare.

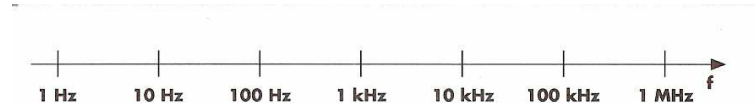
FIG. 2.1 Esempio di scala per le frequenze lineare.



In questa scala è molto difficile individuare con precisione i singoli valori di frequenza per valori numerici piccoli (distinguere add es. 1 Hz da 10 Hz è praticamente impossibile, mentre sarebbe agevole distinguere per esempio 500 kHz da 550 kHz). Per risolvere il problema bisognerebbe espandere la scala disegnandola su un foglio lunghissimo; in questo modo sarebbe possibile ottenere la giusta risoluzione alle basse frequenze ma la medesima risoluzione sarebbe poi disponibile alle alte frequenze (si potrebbe ad es. distinguere 1 MHz da 1,000001 MHz il che sarebbe sostanzialmente inutile).

Si analizzi ora la scala di fig. 2.2: sono indicate a posizioni equidistanti le frequenze corrispondenti alle potenze del 10, relative al campo di valori che interessa.

FIG. 2.2 Esempio di scala per frequenze logaritmica.



Ogni intervallo rappresenta una decade: la risoluzione diminuisce al crescere della frequenza ma rimane praticamente costante quella percentuale (ad es. è possibile rilevare il 10% di 10 Hz, ossia 1 Hz, nell'intervallo 1-10 Hz oppure il 10% di 100 kHz, ossia 10 kHz, nell'intervallo 10-100 kHz).

Se si suppone che l'origine dell'asse  $x$  corrisponda a  $f = 1$  Hz e che ad ogni incremento unitario sull'asse  $x$  corrisponda una decade, si ottiene la relazione:

$$x = \log_{10} f \quad (2.1)$$

e quindi:

$$f = 10^x \quad (2.2)$$

La (2.1) spiega perché in fig. 2.2 la scala parte da 1 e non da 0 (il logaritmo per  $f \rightarrow 0$  tende a  $-\infty$ ).

Se si desidera posizionare l'origine della scala ad una frequenza  $f_0$  diversa da 1 Hz e rappresentare una decade in un generico intervallo  $\Delta x$  dell'asse  $x$ , si ottiene la relazione più generale:

$$x = \Delta x \cdot \log_{10} \frac{f}{f_0} \quad (2.3)$$

e quindi:

$$f = f_0 \cdot 10^{x/\Delta x} \quad (2.4)$$

Normalmente in questi grafici i moduli delle funzioni di trasferimento vengono espressi in decibel (dB): ai fini di quanto a noi interessa il dB è pari a  $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ . La fase viene invece espressa in gradi. I grafici della risposta in frequenza nei termini qui esposti sono detti **diagrammi di Bode**.

### 3 I diagrammi di Bode in un caso semplice: il filtro RC passa-basso

Si consideri il circuito RC del 1° ordine di figura 3.1.

FIG. 3.1 Circuito RC passa-basso del 1° ordine.

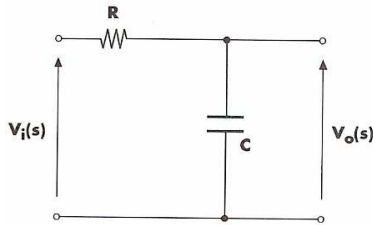
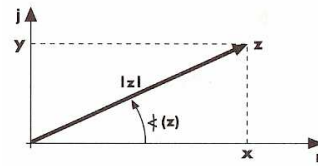


FIG. 3.2 Interpretazione geometrica del modulo e della fase.



Come noto la sua funzione di trasferimento risulta:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (3.1)$$

Ponendo  $s=j\omega$  si ottiene la risposta in frequenza:

$$G(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (3.2)$$

Il modulo di  $G(j\omega)$  rappresenta il *rapporto tra l'ampiezza del segnale sinusoidale in uscita e l'ampiezza del segnale sinusoidale in ingresso alla pulsazione considerata*.

Il modulo di  $G(j\omega)$  vale:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega RC|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (3.3)$$

La fase, che corrisponde allo sfasamento introdotto dal circuito, è invece:

$$\text{fase } G(j\omega) = \arctg(0/1) - \arctg(\omega RC/1) = -\arctg(\omega RC) \quad (3.4)$$

Intesa come differenza tra la fase del numero complesso al numeratore e la fase di quello al denominatore della funzione di trasferimento.

A chiarimento delle relazioni (3.3) e (3.4), si ricorda che per un numero complesso espresso in forma cartesiana  $z = x + jy$  il modulo vale:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.5)$$

e la fase:

$$\text{fase } z = \arctg(y/x) \quad (3.6)$$

Per comprendere queste ultime due relazioni si faccia riferimento alla interpretazione geometrica di modulo e fase di figura 3.2.

Nel caso particolare del nostro circuito  $RC$  si vede che per  $\omega \rightarrow 0$  il modulo tende a 1 e la fase a  $0^\circ$ , mentre per  $\omega \rightarrow +\infty$  il modulo tende a 0 e la fase a  $-90^\circ$ .

### Modulo della funzione di trasferimento

Il modulo espresso in decibel nel nostro caso risulta:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad (3.7)$$

Dalle proprietà dei logaritmi si deduce che quando il modulo della f.d.t. tende a 1 ( $\omega \rightarrow 0$ ) il modulo in dB tende a 0, mentre quando il modulo tende a 0 ( $\omega \rightarrow +\infty$ ) il modulo in dB tende a  $-\infty$ .

A questo punto ci si chiede come varia il modulo per  $\omega$  che varia tra 0 e  $+\infty$ . Per farlo partendo dalla (3.3) si esprime il modulo in dB:

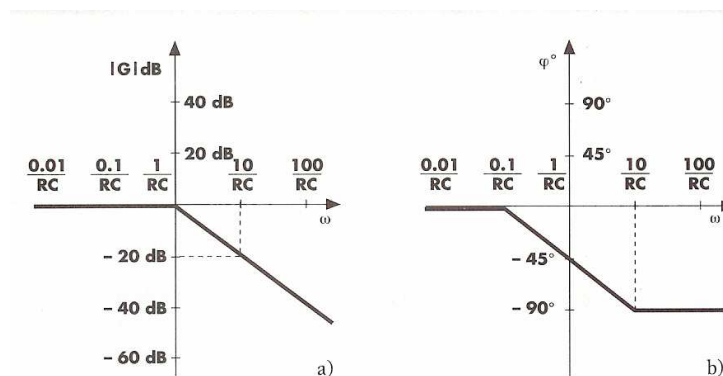
$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = -10 \log_{10} (1 + \omega^2 R^2 C^2) \quad (3.8)$$

Si considerano ora due casi.

- Se  $\omega \ll 1/RC$  allora  $(\omega RC)^2 \ll 1$  e l'argomento del logaritmo è assimilabile a 1 ovvero il modulo in dB della f.d.t. si può considerare pari a 0.
- Se  $\omega \gg 1/RC$  allora  $(\omega RC)^2 \gg 1$  e l'argomento del logaritmo è assimilabile a  $(\omega RC)^2$  e quindi il modulo in dB vale  $-10 \log_{10} (\omega RC)^2 = -20 \log_{10} (\omega RC)$ . In questo caso al crescere di  $\omega$  il modulo decresce di 20 dB per ogni decade di aumento.

In ultima analisi per  $\omega \ll 1/RC$  il diagramma è una semiretta che coincide con un tratto dell'asse delle ascisse; per  $\omega \gg 1/RC$  il diagramma del modulo di  $G(j\omega)$  è una semiretta con pendenza di  $-20\text{dB/dec}$  (si tenga presente che  $\ll$  e  $\gg$  vuole dire in pratica “almeno 10 volte” e quindi in termini di  $\omega$  o  $f$  almeno una decade prima o dopo). Se ora, per ulteriore semplificazione, si suppone che i risultati raggiunti siano validi anche per  $\omega < 1/RC$  e per  $\omega > 1/RC$ , si ottiene il diagramma asintotico del modulo di fig. 3.3 a.

FIG. 3.3 Diagrammi asintotici del modulo (a) e della fase (b).



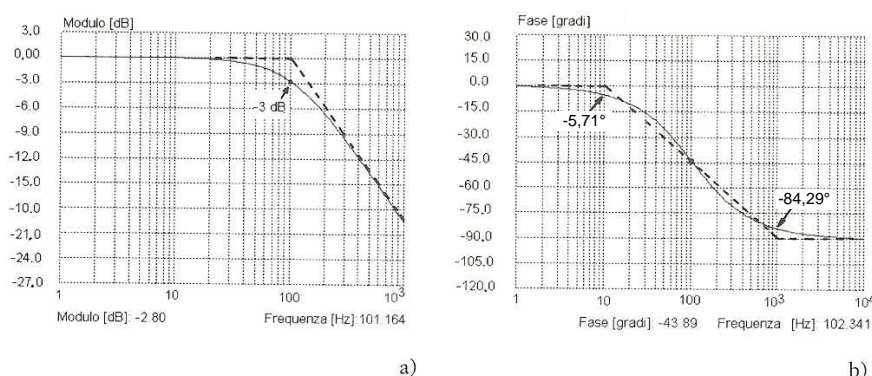
Evidentemente questo diagramma è solo un'approssimazione di quello reale e quindi è opportuno valutare l'entità dell'errore commesso. In particolare, il massimo errore si verifica per  $\omega = 1/RC$ , che è l'origine delle due semirette asintotiche oltre che la **pulsazione di taglio del filtro passa-basso** (a questa pulsazione la resistenza è uguale al modulo della reattanza). L'ampiezza del modulo a questa pulsazione risulta:

$$|G(j1/RC)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{|1 + jRC/RC|} = -20 \log_{10} \sqrt{2} = -3,01 \text{ dB} \quad (3.9)$$

In corrispondenza della frequenza di taglio il modulo della f.d.t. vale  $-3 \text{ dB}$  (0,707 come valore effettivo) e quindi l'errore del diagramma asintotico è di  $3 \text{ dB}$ .

Un esempio di diagramma del modulo reale per un passa-basso del primo ordine è riportato in fig. 3.4.

FIG. 3.4 Diagrammi del modulo (a) e della fase (b) reali e asintotici con  $R = 22 \text{ k}\Omega$  e  $C = 68 \text{ nF}$ .



### Fase della funzione di trasferimento

Si è già accennato al fatto che la fase passa da  $0^\circ$  a  $-90^\circ$  quando  $\omega$  va da 0 a  $+\infty$ .

Alla frequenza di taglio la fase ricordando la (3.4) risulta:

$$\text{fase } G(j\omega) = -\arctg\left(\frac{1}{RC} RC\right) = -45^\circ \quad (3.10)$$

Una decade prima e una decade dopo la frequenza (pulsazione) di taglio si hanno rispettivamente i valori di fase  $-\arctg(0,1) = -5,71^\circ$  e  $-\arctg(10) = -84,29^\circ$ , la cui somma è esattamente  $-90^\circ$ . Si può allora assumere che, approssimativamente, la fase sia nulla una decade prima della pulsazione di taglio e  $-90^\circ$  una decade dopo. Alla pulsazione di taglio si ha la fase media di  $-45^\circ$  (valore questo ultimo rigoroso).

Il diagramma asintotico della fase è riportato in fig. 3.3 b, mentre in fig. 3.4b è riportato un esempio di diagramma reale.

## 4 Poli, zeri e fattorizzazione della funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento di un sistema lineare in funzione di  $s$  può in generale esprimersi come rapporto tra polinomi:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (4.1)$$

*Le radici del polinomio al denominatore, ovvero i valori di  $s$  che lo annullano, sono detti **poli** della funzione di trasferimento.* Il loro numero, ovvero il grado del polinomio al denominatore della funzione di trasferimento, indica l'**ordine del sistema** rappresentato dalla funzione di trasferimento.

*Le radici del polinomio al numeratore sono dette **zeri** della funzione di trasferimento.*

Nella (4.1) quindi  $m$  è il numero degli zeri e  $n$  il numero dei poli.

Si tenga presente che *il numero dei poli*, oltre che coincidere con il grado del polinomio al denominatore, *corrisponde anche al numero di elementi reattivi indipendenti presenti nel circuito* del sistema considerato.

I poli e gli zeri possono essere reali o complessi, in questo secondo caso *sono sempre a coppie complesse e coniugate* (ovvero se esiste il polo  $\sigma + j\omega$  esiste anche il polo  $\sigma - j\omega$ ).

Fattorizzando i polinomi al numeratore e al denominatore è possibile scrivere la funzione di trasferimento nel seguente modo:

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_{m'})}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n'})} \quad (4.2)$$

$K$  è detto **fattore di guadagno** mentre  $z_1, z_2 \dots z_{m'}$  sono gli zeri non nulli di  $G(s)$  e  $p_1, p_2 \dots p_{n'}$  sono i poli non nulli di  $G(s)$ ; l'intero  $g$  rappresenta il **tipo** del sistema ed è dato dalla differenza tra il numero dei poli nulli ( $n - n'$ ) e quello degli zeri nulli ( $m - m'$ ).

Più sinteticamente la (4.2) può essere scritta:

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m'} (s - z_i)}{s^g \prod_{i=1}^{n'} (s - p_i)} \quad (4.3)$$

Introducendo per i poli e gli zeri non nulli le costanti di tempo:

$$\tau_{z_i} = -\frac{1}{z_i} \quad \tau_{p_i} = -\frac{1}{p_i} \quad (4.4)$$

La (4.2) può essere scritta:

$$G(s) = \mu \frac{(1 + s\tau_{z_1})(1 + s\tau_{z_2}) \dots (1 + s\tau_{z_{m'}})}{s^g (1 + s\tau_{p_1})(1 + s\tau_{p_2}) \dots (1 + s\tau_{p_{n'}})} \quad (4.5)$$

Il termine  $\mu$  esprime il **guadagno** di  $G(s)$ .

Più sinteticamente la (6.3) può essere scritta:

$$G(s) = \mu \frac{\prod_{i=1}^{m'} (1 + s\tau_{z_i})}{s^g \prod_{i=1}^{n'} (1 + s\tau_{p_i})} \quad (4.6)$$

In queste relazioni se  $g=0$  il guadagno assume il significato di **guadagno statico**  $G(0)$ . Ovvero in assenza di poli e zeri nell'origine  $\mu$  esprime il *guadagno a frequenza zero*.

Il fattore di guadagno  $K$  e il guadagno  $\mu$  sono legati dalla relazione:

$$\mu = K \frac{(-z_1)(-z_2) \dots (-z_{m'})}{(-p_1)(-p_2) \dots (-p_{n'})} \quad (4.7)$$

Il segno di  $\mu$  non è detto coincida con quello di  $K$ : affinché questo avvenga è *necessario che la somma del numero dei poli e degli zeri con parte reale positiva sia pari*; in particolare se tutti i poli e gli zeri sono a *parte reale negativa* (caso molto importante perché è quello dei sistemi stabili)  $\mu$  e  $K$  hanno lo stesso segno.

## 5 Tracciamento dei diagrammi di Bode con poli e zeri reali

In questo paragrafo vengono generalizzati i risultati ottenuti con la risposta in frequenza del filtro passa-basso del primo ordine del paragrafo 4. Si tenga presente che in questo paragrafo non si considera il caso di poli e zeri complessi (e coniugati).

Si utilizza per le funzioni di trasferimento la rappresentazione fattorizzata del tipo (4.5) che evidenzia le costanti di tempo e il guadagno  $\mu$ ; evidentemente, qualora la f.d.t. fosse espressa nell'altra forma fattorizzata, sarà sempre possibile ricondursi a quella qui considerata tenendo presente quanto esposto nel paragrafo 4.

### Diagramma del modulo

Ponendo  $s = j\omega$  e esprimendo il modulo in dB dalla (4.5) si ottiene:

$$|G(j\omega)| = 20\log_{10}|\mu| \frac{|1 + j\omega\tau_{z_1}| \cdot |1 + j\omega\tau_{z_2}| \dots |1 + j\omega\tau_{z_m}|}{|j\omega|^g \cdot |1 + j\omega\tau_{p_1}| \cdot |1 + j\omega\tau_{p_2}| \dots |1 + j\omega\tau_{p_n}|} \quad (5.1)$$

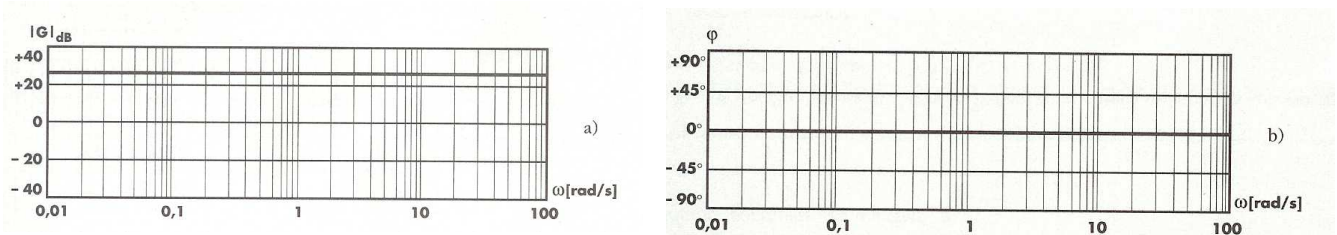
Sfruttando le proprietà dei logaritmi la (5.1) si può ricondurre a una somma:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| = & 20\log_{10}|\mu| + 20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{z_1}| + 20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{z_2}| + \\ & + \dots + 20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{z_m}| - 20 \cdot g \cdot \log_{10} \omega - 20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{p_1}| - \\ & + 20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{p_2}| - \dots - 20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{p_n}| \end{aligned} \quad (5.2)$$

Valutiamo l'effetto dei singoli termini.

- Il primo non crea problemi: essendo una costante al variare di  $\omega$  descrive una retta orizzontale posizionata al valore  $20\log_{10}|\mu|$  (fig. 5.1 a: la posizione nel grafico non è significativa perché dipende dal valore del guadagno).

FIG. 5.1 Diagrammi di Bode di  $\mu$  (la figura si riferisce al caso di  $\mu > 0$ , ovvero sfasamento nullo).



- I termini  $20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{z_i}|$  e  $-20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{p_i}|$  si comportano al variare di  $\omega$  in modo analogo al termine  $-20\log_{10}|1 + j\omega RC|$  del passa-basso del par. 3. In particolare:
  - $20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{z_i}|$ : 0 dB e pendenza 0 dB/dec per  $\omega < 1/\tau_{z_i}$ ; 0 dB in  $\omega = 1/\tau_{z_i}$  (con errore in difetto di 3 dB); pendenza +20dB/dec per  $\omega > 1/\tau_{z_i}$  (fig. 5.2 a: con  $\omega_z$  si intende la pulsazione corrispondente allo zero).
  - $-20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{p_i}|$ : 0 dB e pendenza 0dB/dec per  $\omega < 1/\tau_{p_i}$ ; 0 dB in  $\omega = 1/\tau_{p_i}$  (con errore in eccesso di 3 dB); pendenza -20dB/dec per  $\omega > 1/\tau_{p_i}$  (fig. 5.2 a: con  $\omega_p$  si intende la pulsazione corrispondente al polo).

FIG. 5.2 Diagrammi di Bode per il termine  $20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{z_i}|$  (zero non nell'origine): la fase vale nell'ipotesi di zero negativo.

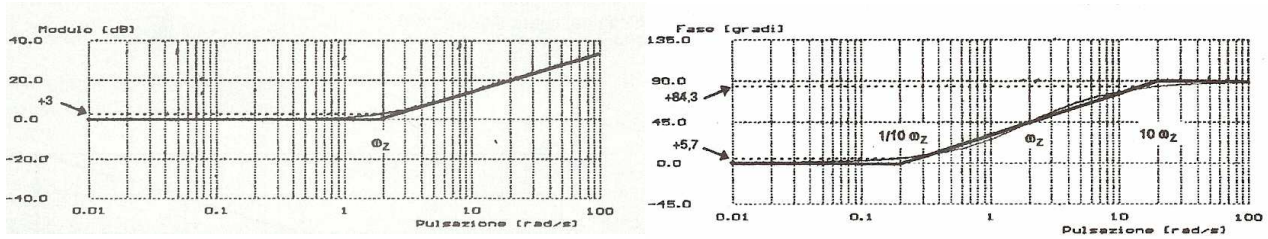
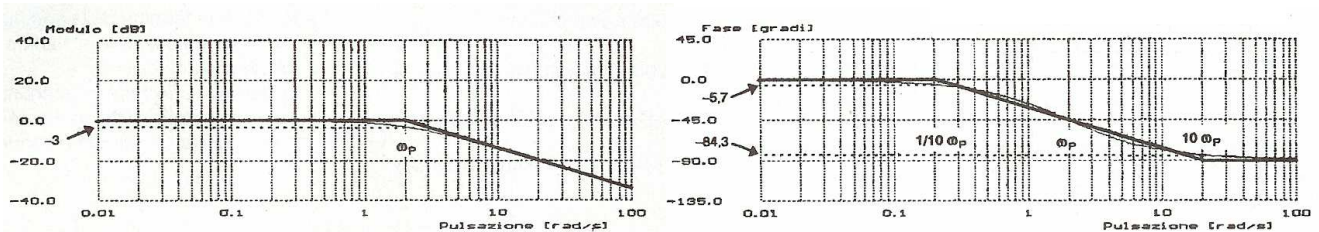


FIG. 5.3 Diagrammi di Bode per il termine  $-20\log_{10}|1 + j\omega\tau_{p_i}|$  (polo non nell'origine): la fase vale nell'ipotesi di polo negativo.



- Il termine  $-20 \cdot g \cdot \log_{10} \omega$  determina una pendenza  $-20 \cdot g$  dB/dec per tutti i valori di  $\omega$ ; intersezione con l'asse a 0 dB per  $\omega=1$  rad/s (nel caso di un solo zero nell'origine si ha la situazione di fig. 5.4 a, nel caso di un solo polo nell'origine quella di fig. 5.5 a.

FIG. 5.4 Diagrammi di Bode per il termine  $20\log_{10}\omega$  (zero nell'origine).

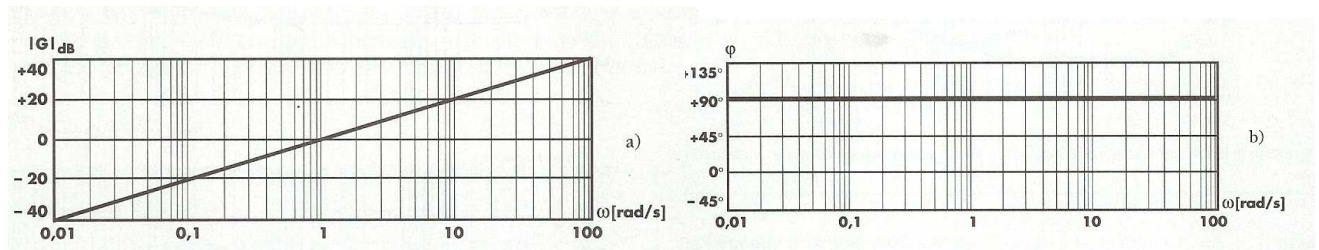
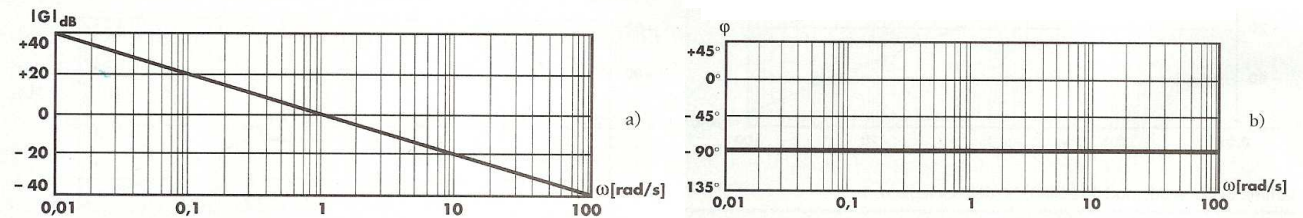


FIG. 5.5 Diagrammi di Bode per il termine  $-20\log_{10}\omega$  (polo nell'origine).



*Il diagramma asintotico completo del modulo è dato dalla somma dei diagrammi asintotici dei singoli termini sopra considerati.*

## Diagramma della fase

Per la fase si ha:

$$\begin{aligned} \text{fase}[G(j\omega)] = & \text{fase}(\mu) + \text{fase}(1 + j\omega\tau_{z_1}) + \text{fase}(1 + j\omega\tau_{z_2}) + \dots + \text{fase}(1 + j\omega\tau_{z_{m'}}) + \\ & - \text{fase}(j\omega)^g - \text{fase}(1 + j\omega\tau_{p_1}) - \text{fase}(1 + j\omega\tau_{p_2}) - \dots - \text{fase}(1 + j\omega\tau_{p_{n'}}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Valutiamo ora l'effetto dei singoli termini.

- Relativamente al guadagno  $\mu$  la sua fase è  $0^\circ$  se positivo e  $-180^\circ$  se negativo (fig. 5.1 b per guadagno positivo).
- $+\text{fase}(1 + j\omega\tau_{z_i}) = \arctg \omega\tau_{z_i}$ : per  $\omega$  positive assume valori tra  $0^\circ$  e  $+90^\circ$  con  $\tau_{z_i} > 0$  (zero negativo) e tra  $0^\circ$  e  $-90^\circ$  con  $\tau_{z_i} < 0$  (zero positivo). La fig. 5.2 b si riferisce al caso di zero negativo.
- $-\text{fase}(1 + j\omega\tau_{p_i}) = -\arctg \omega\tau_{p_i}$ : per  $\omega$  positive assume valori tra  $0^\circ$  e  $-90^\circ$  con  $\tau_{p_i} > 0$  (polo negativo) e tra  $0^\circ$  e  $+90^\circ$  con  $\tau_{p_i} < 0$  (polo positivo). La fig. 5.3 b si riferisce al caso di polo negativo.
- $-\text{fase}(j\omega)^g = -g \cdot \text{fase}(j\omega) = -g \cdot 90^\circ$ . La fig. 5.4 vale per uno zero nell'origine ovvero per  $g = -1$ ; la figura 5.5 per un polo nell'origine, ovvero per  $g = 1$ .

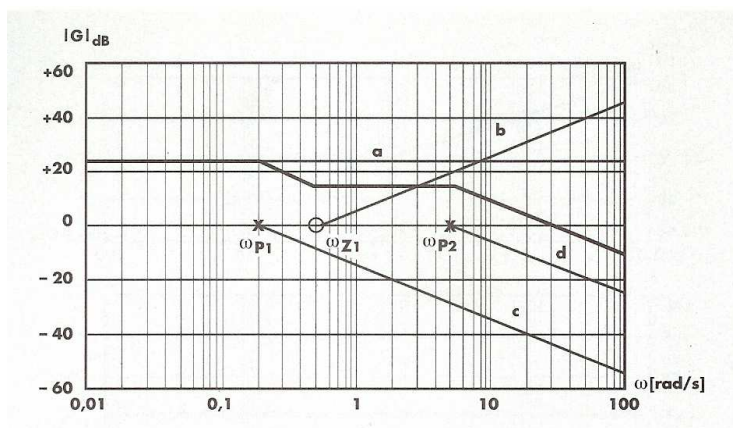
Anche per la fase il diagramma asintotico è la somma dei diagrammi asintotici dei singoli termini.

**Esempio 1.** Tracciare il diagramma dei moduli della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{15(1+2s)}{(1+5s)(1+0,2s)}$$

Il diagramma è riportato in fig. 5.6.

FIG. 5.6 Diagramma asintotico del modulo della f.d.t. dell'esempio 1.



Per la giustificazione si tenga presente quanto segue.

Il guadagno  $\mu = 15$  corrisponde alla retta  $a$  di ordinata:

$$20\log_{10} 15 = 23,5 \text{ dB}$$

Al termine  $1+2s$  corrisponde la spezzata  $b$  con tratto ascendente di pendenza  $+20\text{dB/dec}$ . Lo zero e la corrispondente pulsazione sono:

$$z_1 = -\frac{1}{\tau_{z_1}} = -0,2 \quad \omega_{z_1} = 0,5 \text{ rad/s}$$

Al termine  $1+5s$  corrisponde la spezzata  $c$  con tratto discendente di pendenza  $-20\text{dB/dec}$ . Il polo e la corrispondente pulsazione risultano:

$$p_1 = -0,2 \quad \omega_{p_1} = 0,2 \text{ rad/s}$$

Analogamente al termine  $1+0,2s$  corrisponde la spezzata  $d$  con:

$$p_2 = -5 \quad \omega_{p_2} = 5 \text{ rad/s}$$

Il grafico finale si ottiene sommando i singoli grafici elementari, ma la sua costruzione può risultare più agevole seguendo il seguente procedimento, valido nell'ipotesi che non ci siano zeri o poli nell'origine (come in questo caso):

- si individuano tutti i poli e gli zeri e li si indicano simbolicamente sull'asse  $x$  in corrispondenza della relativa pulsazione (o = zero, x = polo);
- si traccia una retta parallela all'asse  $x$  di ordinata pari al valore in dB del guadagno  $\mu$ . (che, mancando poli e zeri nell'origine, assume il significato di guadagno statico) partendo dalla sinistra del primo polo e del primo zero;
- per ogni zero incontrato percorrendo l'asse  $x$  da sinistra verso destra si introduce una pendenza di  $+20 \text{ dB/dec}$  e per ogni polo una pendenza di  $-20 \text{ dB/dec}$ .

**Esempio 2.** Tracciare il diagramma dei moduli e calcolare lo sfasamento per  $\omega = 20 \text{ rad/s}$  della seguente f.d.t.:

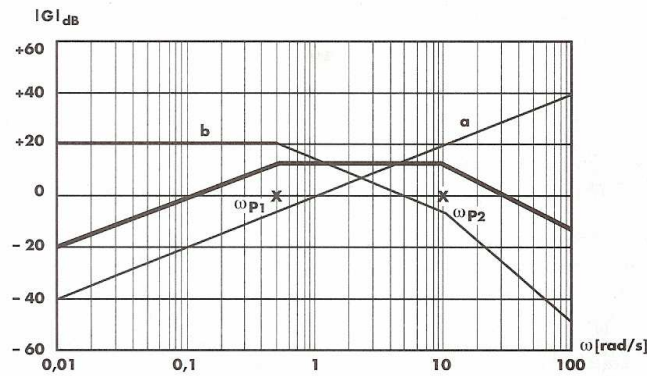
$$G(s) = \frac{10s}{(1+2s)(1+0,1s)}$$

La figura 5.7 riporta il diagramma dei moduli. Questo diagramma è stato ottenuto scomponendo la f.d.t. nel prodotto:

$$G(s) = (s) \cdot \left( \frac{10}{(1+2s)(1+0,1s)} \right)$$

Il termine  $s$  (zero nell'origine) corrisponde alla retta  $a$  (pendenza  $+20 \text{ dB/dec}$  passante per  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ), l'altro termine alla spezzata  $b$ . Il diagramma finale corrisponde alla somma di questi due.

FIG. 5.7 Diagramma asintotico del modulo della f.d.t. dell'esempio 2.



Volendo tracciare il diagramma asintotico della fase si può procedere in modo analogo. Per il calcolo preciso dello sfasamento alla pulsazione di 20 rad/s risulta:

$$\varphi = +90^\circ - \arctg 2 \cdot 20 - \arctg 0,1 \cdot 20 \approx -62^\circ$$

Anche in questo caso è possibile seguire un procedimento di costruzione del grafico del modulo simile a quello dell'esempio precedente, che però deve tenere presente l'esistenza dello zero nell'origine (più in generale di zeri o poli nell'origine):

- si individuano tutti i poli e gli zeri non nell'origine e li si indicano simbolicamente sull'asse  $x$  in corrispondenza della relativa pulsazione ( $o = \text{zero}$ ,  $\times = \text{polo}$ );
- se non esistono poli o zeri nell'origine, si traccia una retta parallela all'asse  $x$  di ordinata pari al valore in dB del guadagno  $\mu$ . (che, mancando poli e zeri nell'origine, assume il significato di guadagno statico) partendo dalla sinistra del primo polo e del primo zero;
- se esistono poli o zeri nell'origine si traccia una retta con pendenza determinata dal numero di poli o zeri nell'origine ( $-20 \cdot g \text{ dB/dec}$ ) e che in  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  presenti un modulo pari a  $|\mu|_{\text{dB}}$ ;
- per ogni zero incontrato percorrendo l'asse  $x$  da sinistra verso destra si introduce una pendenza di  $+20 \text{ dB/dec}$  e per ogni polo una pendenza di  $-20 \text{ dB/dec}$ .

**Esempio 3.** Tracciare i diagrammi di Bode asintotici della f.d.t.:

$$G(s) = \frac{100(1+s)}{s(1+0,1s)}$$

Presenta uno zero ( $z = -1$ ) e due poli di cui uno nell'origine ( $p_1 = 0$  e  $p_2 = -10$ ).

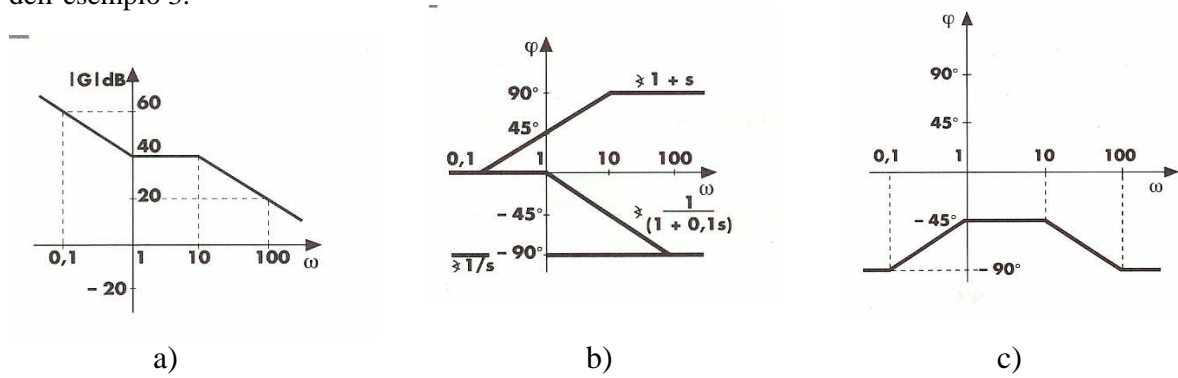
Per tracciare il diagramma del modulo si può iniziare tracciando una retta con pendenza di  $-20 \text{ dB/dec}$ , dovuta al polo nell'origine, che in  $\omega = 1$  abbia un modulo di 40 dB ( $20 \log_{10} 100$ ) e poi in corrispondenza di  $\omega = 1$  si introduce, grazie allo zero, una pendenza di  $+20 \text{ dB/dec}$ , che raddrizza il grafico fino a  $\omega = 10$ , dove il secondo polo ripristina la pendenza iniziale (fig. 5.8 a).

Per la fase risulta:

$$\text{fase} [G(j\omega)] = 0^\circ + \arctg \omega - 90^\circ - \arctg(0,1 \omega)$$

In figura 5.8 c è riportato il diagramma risultante ottenuto sommando i singoli diagrammi asintotici di figura 5.8b.

FIG. 5.8 Diagramma del modulo (a), singoli contributi della fase (b) e diagramma della fase (c) della f.d.t. dell'esempio 3.



**Esempio 4.** Tracciare i diagrammi di Bode asintotici della f.d.t. (1.4).

In fig. 5.9 si riportano i grafici richiesti.

FIG. 5.9 Diagrammi di Bode asintotici della (1.4).

