ANTITRASFORMATA DI LAPLACE

L'ANTITRASFORMATA DI LAPLACE (O TRASFORMAZIONE INVERSA DI LAPLACE) CONSENTE IL PASSAGGIO DAL DOMINIO DELLA FREQUENZA COMPLESSA s AL DOMINIO DEL TEMPO t.

$$F(s) \rightarrow f(t)$$

ED È INDICATA CON $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

ESISTE UNA FORMULA DI ANTITRASFORMAZIONE (*) MA HA INTERESSE PURAMENTE TEORICO: È SCOMODA DA VALUTARE E SI USA QUASI MAI!

LA DEFINIZIONE DI ANTITRASFORMATA IMPLICA CHE SUSSISTE UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA FUNZIONI DEL TEMPO E CORRISPONDENTI TRASFORMATE SOLO PER FUNZIONI DEL TEMPO NULLE PER TEMPI NEGATIVI (CIOÈ LA FUNZIONE $f(t)$ RICAVATA VALE SOLO PER $t \geq 0$, $f(t) = 0$ PER $t < 0$, PROPRIETÀ DI CAUSALITÀ).

ANTITRASFORMATA PER FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

m GRADO DEL NUM.
n GRADO DEL DEN.

$n < m$ FUNZ. RAZ. IMPROPRIA

SI EFFETTUA LA DIVISIONE TRA POLINOMI: IL RISULTATO È UN POLINOMIO IN s PIÙ UNA FRAZIONE CON GRADO DEL NUM. $<$ DI QUELLO DEL DENOM.

NELL'ANTITRASFORMATA COMPAIONO IMPULSI DI DIRAC DI ORDINE SUPERIORE

ES $F(s) = \dfrac{5s^3+3s^2+8s+6}{s^2+4} = \dots = 5s+3+\dfrac{-12s-6}{s^2+4}$

$f(t) = 5\delta'(t) + 3\delta(t) + \dots$

$n = m$ FUNZ. RAZ. PROPRIA (NON STRETTAMENTE)

EFFETTUATA LA DIVISIONE TRA POLINOMI SI TROVA UNA COSTANTE PIÙ LA SOLITA FRAZIONE CON GRADO DEL NUM. $<$ DI QUELLO DEL NUM.

NELL'ANTITRASFORMATA COMPARE UN IMPULSO DI DIRAC

ES $F(s) = \dfrac{3s^3+45s^2+225s+385}{(s+5)^3} = 3 + \dfrac{10}{(s+5)^3}$

$f(t) = 3\delta(t) + \dots$

(*) TRASFORMATA DI LAPLACE

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad \text{con } s > \sigma_c$$

ascissa di convergenza.

ANTITRASFORMATA DI LAPLACE

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds \qquad \text{con } \sigma_0 > \sigma_c$$

IL PERCORSO DI INTEGRAZIONE DELL'ANTITRASFORMATA DI LAPLACE È SU UNA RETTA VERTICALE AL PIANO COMPLESSO DI ASCISSA σ_0 QUALSIASI, NEL DOMINIO DI CONVERGENZA DI $F(s)$ (A DESTRA DELL'ASCISSA DI CONVERGENZA σ_c)

$n > m$ FUNZ. RAZ. FRATTA STRETTAMENTE PROPRIA

L'ANTITRASFORMATA NON CONTIENE IMPULSI DI DIRAC

IL DEN. SI ESPRIME COME PRODOTTO DI TERMINI

LE RADICI DEL DENOM. SONO I POLI DELLA FUNZ.

ANTITRASFORMATA DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE STRETTAMENTE PROPRIE.

ESPANSIONE IN FRATTI SEMPLICI

a) SI DETERMINANO I POLI CON LA RISPETTIVA MOLTEPLICITÀ:

I POLI POSSONO ESSERE

- REALI
- COMPLESSI CONIUGATI
  - SEMPLICI
  - MULTIPLI

b) SI ESPRIME LA FUNZIONE COME SOMMA DI FRATTI SEMPLICI

c) SI CALCOLANO LE COSTANTI DEI FRATTI SEMPLICI (DETTE RESIDUI ASSOCIATI AI POLI)

d) SI DETERMINA L'ANTITRASFORMATA SULLA BASE DI TRASFORMATE NOTEVOLI

ES. 1 POLI REALI SEMPLICI

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

– a) $D(s) = 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} P_1 = -1 \\ P_2 = -2 \end{matrix}\right\}$ Poli reali semplici

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

– b) $F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$

– c) CALCOLO COSTANTI

1° METODO: IDENTITÀ DEI POLINOMI (DEL MINIMO COMUNE MULTIPLO)

$$F(s) = \frac{s(A+B)+2A+B}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \qquad \begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=2 \\ B=-1 \end{matrix}$$

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

– d) $f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$

ES 2   POLI REALI SEMPLICI E POLI REALI MULTIPLI

$$F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$$

- a) $p_1 = -1$ $\mu_1 = 1$ μ_1, μ_2 e μ_3 sono le molteplicità dei rispettivi poli

$p_2 = -2$ $\mu_2 = 1$

$p_3 = 0$ $\mu_3 = 2$

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2(s+1)(s+2)}$$

- b) $$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s^2}$$

- c) CALCOLO COSTANTI

2° METODO : METODO DEI RESIDUI (FORMULA GENERALE)

$$A = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{s+3}{s^2(s+2)}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$B = \frac{s+3}{s^2(s+1)}\Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

$$C_2 = s^2 F(s)\Big|_{s=0} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=0} = \frac{3}{2}$$

$$C_1 = \frac{d}{ds}\left[s^2 F(s)\right]\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]\Big|_{s=0} = -\frac{7}{4}$$

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{3}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{s}$$

- d) $$f(t) = 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{7}{4} + \frac{3}{2}t \qquad t \geq 0$$

ES 3 POLI REALI SEMPLICI E POLI REALI MULTIPLI

$$F(s) = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)^2}$$

- a) $p_1 = -1 \quad n_1 = 1$

  $p_2 = -2 \quad n_2 = 2$

- b) $F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}$

c) CALCOLO COSTANTI

$$A = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{5s+3}{(s+2)^2}\Big|_{s=-1} = -2$$

$$B_2 = (s+2)^2 F(s)\Big|_{s=-2} = \frac{5s+3}{s+1}\Big|_{s=-2} = 7$$

$$B_1 = \frac{d}{ds}\left[(s+2)^2 F(s)\right]\Bigg|_{s=-2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{5s+3}{s+1}\right)\Bigg|_{s=-2} = \frac{5(s+1)-(5s+3)}{(s+1)^2}\Bigg|_{s=-2} = \frac{5-3}{(s+1)^2}\Bigg|_{s=-2} = 2$$

$$F(s) = -2\frac{1}{s+1} + 2\cdot\frac{1}{s+2} + 7\frac{1}{(s+2)^2}$$

d) $f(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t} + 7te^{-2t}$

ES. 4 POLI REALI MULTIPLI

$$F(s) = \frac{s^4+3s^3+2s^2+s+5}{(s+1)^5}$$

- a) $p_1 = -1 \quad m_1\ 5$

- b) $$F(s) = \frac{A_5}{(s+1)^5} + \frac{A_4}{(s+1)^4} + \frac{A_3}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_1}{s+1}$$

- c) CALCOLO COSTANTI

$$A_5 = (s+1)^5 \cdot F(s)\Big|_{s=-1} = (s^4+3s^3+2s^2+s+5)\Big|_{s=-1} = \;---$$

$$A_4 = \frac{d}{ds}(s^4+3s^3+2s^2+s+5)\Big|_{s=-1} = (4s^3+9s^2+4s+1)\Big|_{s=-1} = \;---$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}(s^4+3s^3+2s^2+s+5)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(4s^3+9s^2+4s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2}(12s^2+18s+4)\Big|_{s=-1} = \;----$$

$$A_2 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3}(s^4+3s^3+2s^2+s+5)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{6}\frac{d}{ds}(12s^2+18s+4)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{6}(24s+18)\Big|_{s=-1} = \;---$$

$$A_1 = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{ds^4}(s^4+3s^3+2s^2+s+5)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{24}\frac{d}{ds}(24s+18)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{24}\cdot 24 = 1$$

- d) $$f(t) = A_5 \cdot \frac{t^4}{4!}e^{-t} + A_4\frac{t^3}{3!}e^{-t} + A_3\frac{t^2}{2}e^{-t} + A_2\, t\, e^{-t} + A_1 e^{-t} \qquad t \geq 0$$

ES 5A POLI REALI PIÙ POLI COMPLESSI CONIUGATI

$$F(s) = \frac{7s^2-8s+5}{s^3+2s^2+5s} = \frac{7s^2-8s+5}{s(s^2+2s+5)}$$

- a) $P_1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} P_2 = -1+j2 \\ P_3 = -1-j2 \end{array}\right\} \text{C. CON.} \qquad s^2+2s+5 = (s-P_2)(s-P_3)$$

- b) $F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s-P_2} + \frac{B_2}{s-P_3}$ $\qquad B_2 = B_1^*$ $\quad$ B_2 E B_1 SONO COMPL. CONIUG.

- C) CALCOLO COSTANTI

$$A = sF(s)\Big|_{s=0} = \frac{7s^2-8s+5}{s^2+2s+5}\Big|_{s=0} = 1$$

$$B_1 = (s-P_2)F(s)\Big|_{s=P_2} = \frac{7s^2-8s+5}{s(s-P_3)}\Big|_{s=P_2} = \frac{7(-1+j2)^2-8(-1+j2)+5}{(-1+j2)(\underbrace{j4}_{P_2-P_3})} = 3+j4$$

$$B_2 = (s-P_3)F(s)\Big|_{s=P_3} = \frac{7s^2-8s+5}{s(s-P_2)}\Big|_{s=P_3} = \frac{7(-1-j2)^2-8(-1-j2)+5}{(-1-j2)(\underbrace{-j4}_{P_3-P_2})} = 3-j4 = B_1^*$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3+j4}{s-P_2} + \frac{3-j4}{s-P_3}$$

- d) $f(t) = 1+(3+j4)e^{(-1+j2)t} + (3-j4)e^{(-1-j2)t} \qquad t \geq 0$

SI PROSEGUE UTILIZZANDO LA RELAZIONE DI EULERO PER GIUNGERE AD UNA FUNZIONE REALE

$$f(t) = 1 + e^{-t}\left[(3+j4)e^{j2t} + (3-j4)e^{-j2t}\right] =$$

$$= 1 + e^{-t}\left\{3\left(\frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2}\right).2 + j4\left(\frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2j}\right).2j\right\}$$

$$= 1 + e^{-t}\{6\cos 2t - 8\sin 2t\} \qquad t \geq 0$$

CON TRASFORMATA DI STEINMETZ

$$S[6\cos 2t - 8\sin 2t] = 6+j8 = 10e^{j\phi} \quad \text{CON } \phi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$$

ANTITRASF. DI STEINMETZ.

$$S^{-1}[10e^{j\phi}] = Re[10e^{j\phi}e^{j\omega t}] = 10\cos(\omega t+\phi) \quad \text{con} \begin{cases} \omega = 2 \\ \phi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \end{cases}$$

PERCIÒ $\quad f(t) = 1 + e^{-t} \cdot 10\cos\left(2t + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) \qquad t \geq 0$

ES 5B $\quad F(s) = \dfrac{7s^2-8s+5}{s^3+2s^2+5s} = \dfrac{7s^2-8s+5}{s(s^2+2s+5)}$

SOLUZIONE COME ES 5A FINO AL PUNTO C
POI SI PROSEGUE CON IL METODO DI COMPLETAMENTO DEI QUADRATI:
SI ACCOPPIANO I POLI COMPLESSI CONIUGATI E SI AGGIUSTANO LE COSTANTI AL NUMERAT.
PER APPLICARE LA PROPRIETÀ DELLA TRASLAZIONE IN FREQ.

– c) $F(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{3+j4}{s-p_2} + \dfrac{3-j4}{s-p_3} =$

$$= \frac{1}{s} + \frac{3+j4}{s+1-j2} + \frac{3-j4}{s+1+j2} =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{3(s+1)-8+3(s+1)-8}{s^2+2s+5} =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{6(s+1)-16}{s^2+2s+5} =$$

$$= \frac{1}{s} + 6\,\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - 8\,\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

– d) $f(t) = 1 + 6e^{-t}\cos 2t - 8e^{-t}\sin 2t \qquad t \geq 0$

ES. 5C

$$F(s) = \frac{7s^2-8s+5}{s^3+2s^2+5s} = \frac{7s^2-8s+5}{s(s^2+2s+5)}$$

a) $P_1 = 0$

$\left.\begin{array}{l} P_2 = -1+j2 \\ P_3 = -1-j2 \end{array}\right\}$ COMP. CONIUG.

b) METODO DEL RIPORTO SUCCESSIVO A PRIMO MEMBRO

$$F(s) = \frac{A}{s} + F_1(s)$$

c) CALCOLO LA COSTANTE A

$$A = s\,F(s)\Big|_{s=0} = \left.\frac{7s^2-8s+5}{s^2+2s+5}\right|_{s=0} = 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + F_1(s)$$

DETERMINO $F_1(s)$

$$F_1(s) = F(s) - \frac{1}{s} = \frac{7s^2-8s+5}{s(s^2+2s+5)} - \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{7s^2-8s+5-s^2-2s-5}{s(s^2+2s+5)} =$$

$$= \frac{6s^2-10s}{s(s^2+2s+5)} = \frac{6s-10}{s^2+2s+5}$$

$$F_1(s) = \frac{6s-10}{s^2+2s+5}$$

I POLI SONO COMPL. CONIUG. $\rightarrow$ SCRIVO IL DEN. COME SOMMA DI QUADRATI

$$F_1(s) = \frac{6s-10}{(s+1)^2+2^2} = \frac{6(s+1)-16}{(s+1)^2+2^2} = \frac{6(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - 8\cdot\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + 6\,\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - 8\,\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$f(t) = 1 + 6e^{-t}\cos 2t - 8e^{-t}\sin 2t \quad t \geq 0$$

ES. 6

OCCHIO AL NUM.

$$F(s) = \frac{s^3+3s^2+6s+8}{(s-1)^3 (s+2)^2}$$

$$F(s) = \frac{A_3}{(s-1)^3} + \frac{A_2}{(s-1)^2} + \frac{A_1}{s-1} + \frac{B_2}{(s+2)^2} + \frac{B_1}{s+2}$$

⋮

NEL CALCOLO DEI COEFFICIENTI RISULTA

$$B_2 = (s+2)^2 \cdot F(s)\Big|_{s=-2} = 0 \quad !!$$

SIGNIFICA CHE ANCHE IL NUMERATORE SI ANNULLA PER $s=-2$
CIOÈ C'È UNO ZERO E UN POLO COINCIDENTI.

SI SEMPLIFICA L'ESPRESSIONE DELLA FUNZIONE
CON RUFFINI

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & 6 & 8 \\ -2 & & -2 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

CIOÈ $\quad s^3+3s^2+6s+8 = (s+2)(s^2+s+4)$

E $\quad F(s) = \dfrac{s^2+s+4}{(s-1)^3 (s+2)}$

ES 7

METODO DEL RIPORTO SUCCESSIVO AL PRIMO MEMBRO

$$F(s) = \frac{3s+1}{(s+1)(s+2)^3}$$

V. UNIBA (DOTOLI: ANTITRASFORMATA PAG. 13 E SEGG.)

b) $$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B3}{(s+2)^3} + \frac{B2}{(s+2)^2} + \frac{B_1}{s+2}$$

d) $$f(t) = A e^{-t} + B_3 \frac{t^2}{2} e^{-2t} + B_2 t e^{-2t} + B_1 e^{-2t} \quad t \geq 0$$

c) CALCOLO COEFF.

$$A = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{3s+1}{(s+2)^3}\Big|_{s=-1} = -2$$

$$B_3 = (s+2)^3 F(s)\Big|_{s=-2} = \frac{3s+1}{s+1}\Big|_{s=-2} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$\rightarrow \quad F(s) = -\frac{2}{s+1} + \frac{5}{(s+2)^3} + F_1(s)$$

$$F_1(s) = F(s) + \frac{2}{s+1} - \frac{5}{(s+2)^3} = \frac{3s+1}{(s+1)(s+2)^3} + \frac{2}{s+1} - \frac{5}{(s+2)^3} =$$

$$= \frac{3s+1+2(s+2)^3 - 5(s+1)}{(s+1)(s+2)^3} =$$

$$= \frac{3s+1+2(s^3+6s^2+12s+8) - 5s-5}{D} =$$

$$= \frac{3s+1+2s^3+12s^2+24s+16-5s-5}{D} =$$

$$= \frac{2s^3+12s^2+22s+12}{(s+1)(s+2)^3} = \quad \rightarrow \text{RADICI}$$

	2	12	22	12
-1		-2	-10	-12
	2	10	12	0
-2		-4	-12	
	2	6	0	

$$2s^3+12s^2+22s+12 = (s+1)(s+2)(2s+6)$$

$$= \frac{\cancel{(s+1)}\cancel{(s+2)}(2s+6)}{\cancel{(s+1)}\cancel{(s+2)}(s+2)^2}$$

$$F_1(s) = \frac{2s+6}{(s+2)^2} = \frac{B_2}{(s+2)^2} + \frac{B_1}{s+2} = \frac{B_2}{(s+2)^2} + F_2(s)$$

$$B_2 = (s+2)^2 F_1(s)\Big|_{s=-2} = 2s+6\Big|_{s=-2} = 2$$

$$F_1(s) = \frac{2s+6}{(s+2)^2} = \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{B_1(s+2)}{(s+2)^2} = \frac{2+B_1(s+2)}{(s+2)^2} \quad \rightarrow B_1 = 2$$

$$\left[F_2(s) = F_1(s) - \frac{2}{(s+2)^2} = \frac{2s+6-2}{(s+2)^2} = \frac{2s+4}{(s+2)^2} = \frac{2}{(s+2)} \quad \rightarrow B_1 = 2 \right]$$

ES 8 $$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

ES 9 $$F(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s+1)(s^2+2s+2)}$$

ES.10 $$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$ POLI COMPL. CONIUG. MULTIPLI