# Capitolo 6

# Il comportamento dei sistemi di controllo in regime permanente

## 6.1 CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO PER TIPI

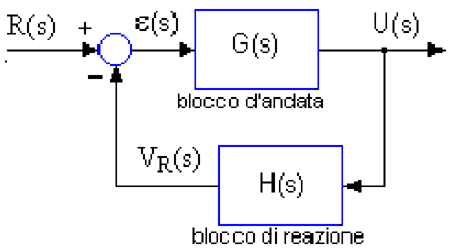
La classificazione dei sistemi ad anello chiuso per tipo, viene fatto in relazione al numero di poli nell'origine della f.d.t. ad anello aperto.
Il tipo del sistema indica il numero dei poli che la G(s)·H(s) presenta nell'origine

| N. dei poli nulli della G(s)·H(s) | classificazione |
|---|---|
| 0 | sistema di tipo zero |
| 1 (s al denominatore ) | sistema di tipo uno |
| 2 ($s^2$ al denominatore ) | sistema di tipo due |

Nel progetto di un sistema di controllo ad anello chiuso occorre tener conto, della precisione e della sensibilità ai disturbi additivi e parametrici .

## 6.2 ERRORE A REGIME

La precisione rappresenta la capacità di un sistema di produrre una risposta la più simile possibile a quella desiderata, ma in un sistema di controllo reale l'uscita non è mai esattamente quella desiderata ma è affetto da errore




La precisione di un sistema è evidenziata dall'errore statico, cioè l'errore permanente o a regime.
Esso è definito come differenza tra il valore d'uscita desiderata $u_0(t)$ e il valore realmente ottenuto $u(t)$ a transitorio esaurito, quando vengono applicati in ingresso i segnali tipici: gradino; rampa; parabola $e(\infty) = \lim_{t\to\infty} u_0(t) - u(t)$

Si dimostra che:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{H_0[1+G(s)H_0]}$$

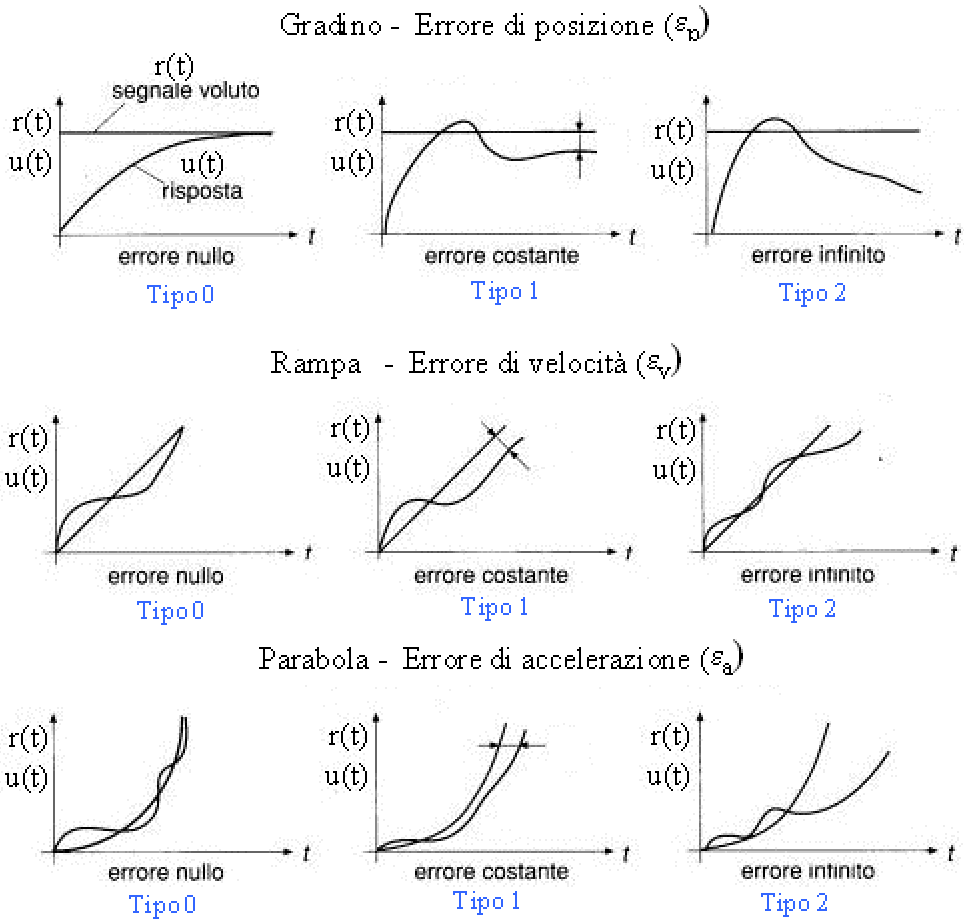
dove $\mathbf{H_o}$ = guadagno del blocco di reazione

L'errore statico viene calcolato in funzione del tipo di segnale in ingresso R(s) e viene indicato come errore:

- di posizione ($\varepsilon_p$) nel caso di ingresso a gradino
- di velocità ($\varepsilon_v$) per la rampa
- di accelerazione ($\varepsilon_a$) per la parabola

I coefficienti di posizione $k_a$ di velocità $k_v$ e di accelerazione $k_a$ sono definiti nel modo seguente $k_a = \lim_{s \to 0} G(s)$ ; $k_v = \lim_{s \to 0} s \cdot G(s)$ ; $k_a = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot G(s)$

In figura sono riportati gli errori statici per i tre tipi di sistema,

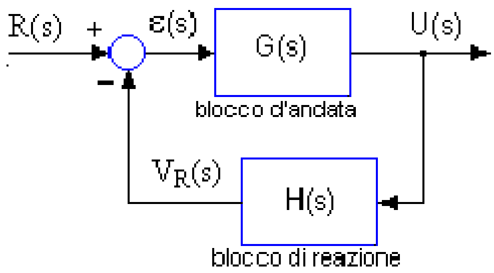



- Con l'errore nullo, dopo la fase transitoria l'uscita ha l'andamento desiderato
- Con l'errore costante l'uscita si discosta dall'andamento voluto di un valore costante
- Con l'errore infinito l'uscita si discosta sempre più con il passare del tempo dall'andamento desiderato

## 6.3 CALCOLO DELL'ERRORE A REGIME

- **Consideriamo il sistema in figura e dimostriamo che l'errore a regime vale**

$$\varepsilon\,(\infty) \;=\; \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{H_0\left[1 + G(s)H_0\right]}$$




- Ricaviamo l'uscita ideale complessa. $U_o(s)$ cioè il valore che assume l'uscita quando $\varepsilon(s)=0$

$$\varepsilon(s) = R(s) - V_R(s) = R(s) - U(s)\,H(s) = 0 \qquad \Rightarrow \quad U_o(s) = \frac{R(s)}{H(s)}$$

- Ricaviamo l'uscita effettiva complessa U(s) cioè il valore che assume l'uscita quando $\varepsilon(s) \neq 0$

$$U(s) = \frac{G(s)R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- Ricaviamo l'errore E(s)

$E(s) = U_0(s)-U(s)$

sostituendo si ha: $E(s) = \dfrac{R(s)}{H(s)} - \dfrac{G(s)R(s)}{1+G(s)H(s)} = \dfrac{R(s)}{H(s)\left[1+G(s)H(s)\right]}$

considerando $H(s) = \text{costante} = H_o$ $\quad \Rightarrow \; E(s) = \dfrac{R(s)}{H_0\left[1+G(s)H_0\right]}$

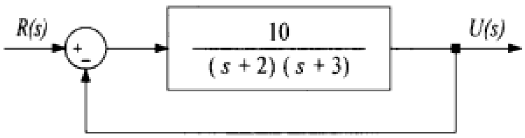
- Per il teorema del valore finale $e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s)$ sostituendo si ha:

$$\boxed{e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{H_0\left[1 + G(s)H_0\right]}}$$

## 6.4 ESERCIZI – ERRORI A REGIME

**Esercizio 1 - Errori a regime - Sistema di tipo zero**

Determinare il tipo di sistema e calcolare l' errore di posizione $\varepsilon_p$, di velocità $\varepsilon_v$ e di accelerazione $\varepsilon_a$ e i coefficienti $k_p$, $k_v$ e $k_a$ per segnali d'ingresso a gradino a rampa e a parabola




**Soluzione**

Il sistema è di tipo 0, poiché la f.d.t. ad anello aperto non ha poli nell'origine .

$$G(s)H(s) = \frac{10}{(s+2)(s+3)}$$

L'errore a regime applicando il teorema del valore finale è uguale a

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{H_0[1+G(s)H_0]}$$

<u>Questo errore è:</u>

- **per un segnale a gradino unitario r(t) = 1 ⇒ R(s) = 1/s**

$$\varepsilon_p = e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+\frac{10}{(s+2)(s+3)}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{10}{(s+2)(s+3)}} \frac{1}{1+\frac{5}{3}} = \frac{3}{8}$$

$$k_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10}{(s+2)(s+3)} = \frac{5}{3}$$

- **per un segnale a rampa unitaria r(t) = t ⇒ R(s) = 1/s²**

$$\varepsilon_v = e(\infty) = \lim_{s\to 0} = s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{10}{(s+2)(s+3)}} \lim_{s\to 0} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+\frac{10}{(s+2)(s+3)}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{10}{(s+2)(s+3)} = \frac{0}{6} = 0$$

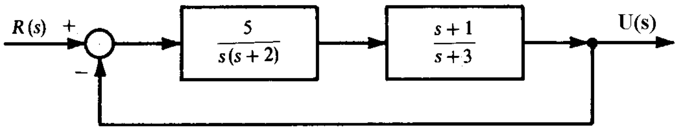
- **per un segnale a parabola unitaria R(t) = $t^2$ ⇒ R(s) = $2/s^3$**

$$\varepsilon_a = e(\infty) = \lim_{s\to 0} = s\cdot\frac{2}{s^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{10}{(s+2)(s+3)}}\ \lim_{s\to 0} = \frac{2}{s^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{10}{(s+2)(s+3)}} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2\cdot G(s) = \lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{10}{(s+2)(s+3)} = \frac{0}{6} = 0$$

**<u>Esercizio 2 - Errori a regime - Sistema di tipo uno</u>**

Determinare il tipo di sistema e calcolare l' errore di posizione $\varepsilon_p$, di velocità $\varepsilon_v$ e di accelerazione $\varepsilon_a$ e i coefficienti $k_p$, $k_v$ e $k_a$ per segnali d'ingresso a gradino a rampa e a parabola




**Soluzione**

Il sistema è di tipo 1, poiché nella della f.d.t. ad anello aperto compaiono un polo nullo.

$$G(s)H(s) = \frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

L'errore a regime è uguale a $e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \dfrac{R(s)}{H_0[1+G(s)H_0]}$

<u>Questo errore è:</u>

- **per un segnale a gradino unitario r(t) = 1 ⇒ R(s) = 1/s**

$$\varepsilon_p = e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{5(s+1)}{s(s+2)(s+3)}} = \frac{1}{1+\dfrac{5}{0}} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

$$kp = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} = \frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = \frac{5}{0} = \infty$$

- **per un segnale a rampa unitaria r(t) = t ⇒ R(s) = 1/s²**

$$\varepsilon_v = e(\infty) = \lim_{s\to 0} = s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{5(s+1)}{s(s+2)(s+3)}} \lim_{s\to 0} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{5(s+1)}{s(s+2)(s+3)}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+\dfrac{5s(s+1)}{s(s+2)(s+3)}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+\dfrac{5(s+1)}{(s+2)(s+3)}} = \frac{1}{\dfrac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = \lim_{s\to 0} \frac{5(s+1)}{(s+2)(s+3)} = \frac{5}{6}$$

- **per un segnale a parabola unitaria R(t) = $t^2$ ⇒ R(s) = $2/s^3$**

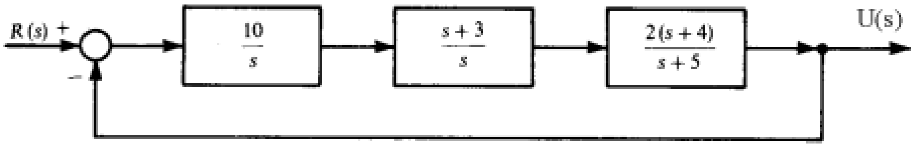
$$\varepsilon_a = e(\infty) = \lim_{s\to 0} = s\cdot\frac{1}{s^3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{5(s+1)}{s(s+2)(s+3)}}\ \lim_{s\to 0} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{5(s+1)}{s(s+2)(s+3)}} =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+\dfrac{5s^2(s+1)}{s(s+2)(s+3)}} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+\dfrac{5s(s+1)}{(s+2)(s+3)}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2\cdot G(s) = \lim_{s\to 0}\ s^2\cdot\frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = \lim_{s\to 0}\ \frac{5s(s+1)}{(s+2)(s+3)} = 0$$

**Esercizio 3 - Errori a regime - Sistema di tipo due**

Determinare il tipo di sistema e calcolare l' errore di posizione $\varepsilon_p$, di velocità $\varepsilon_v$ e di accelerazione $\varepsilon_a$ e i coefficienti $k_p$, $k_v$ e $k_a$ per segnali d'ingresso a gradino a rampa e a parabola.




Soluzione

Il sistema è di tipo 2, poiché nella della f.d.t. ad anello aperto compaiono due poli nulli.

$$G(s)H(s) = \frac{20(s+3)(s+4)}{s^2(s+5)}$$

L'errore a regime è uguale a $e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{H_0\left[1+G(s)H_0\right]}$

Questo errore è:

- **per un segnale a gradino unitario r(t) = 1 ⇒ R(s) = 1/s**

$$\varepsilon_p = e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+\frac{20(s+3)(s+4)}{s^2(s+5)}} = \frac{1}{1+\frac{20\cdot 3\cdot 4}{0}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$k_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{20(s+3)(s+4)}{s^2(s+5)} = \frac{240}{0} = \infty$$

- **per un segnale a rampa unitaria r(t) = t ⇒ R(s) = 1/s²**

$$\varepsilon_v = e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{20(s+3)(s+4)}{s^2(s+5)}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+\frac{20(s+3)(s+4)}{s^2(s+5)}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+\frac{20s(s+3)(s+4)}{s^2(s+5)}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+\frac{20(s+3)(s+4)}{s(s+5)}} = \frac{1}{0+\frac{1}{0}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{20(s+3)(s+4)}{s^2(s+5)} = \lim_{s\to 0} \frac{20(s+3)(s+4)}{s(s+5)} = \frac{240}{0} = \infty$$

- **per un segnale a parabola unitaria R(t) = $t^2$ ⇒ R(s) = $2/s^3$**

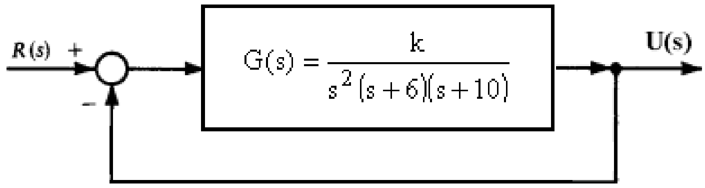
$$\varepsilon_a = e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{20(s+3)(s+4)}{s^2(s+5)}} = \lim_{s\to 0} \frac{2}{s^2} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{20(s+3)(s+4)}{s^2(s+5)}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} = \frac{2}{s^2 + \dfrac{20s^2(s+3)(s+4)}{s^2(s+5)}} = \lim_{s\to 0} \frac{2}{s^2 + \dfrac{20(s+3)(s+4)}{(s+5)}} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{s\to 0} s^2 \cdot \frac{20(s+3)(s+4)}{s^2(s+5)} = \lim_{s\to 0} \frac{20(s+3)(s+4)}{(s+5)} = 48$$

**Esercizio 4- Errore a regime - Sistema di tipo due - Progetto**

Sapendo che l'errore a transitorio esaurito vale 1,5 per un segnale d'ingresso a parabola unitaria, determinare il valore di k




Soluzione

Il sistema è di tipo 2, poiché nella della f.d.t. ad anello aperto compaiono due poli nulli.

L'errore a regime è uguale a $e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \dfrac{R(s)}{H_0\left[1+G(s)H_0\right]}$

- **Per un segnale a parabola unitaria** $r(t) = t^2$ **e** $R(s) = \dfrac{2}{s^3}$ **questo errore è:**

$$e(\infty) = \varepsilon_a = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{2}{s^3} \frac{1}{1+\dfrac{k}{s^2(s+6)(s+10)}} = \lim_{s\to 0} \frac{2}{s^2} \frac{1}{\dfrac{s^2(s+6)(s+10)+k}{s^2(s+6)(s+10)}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{2}{s^2} \cdot \frac{s^2(s+6)(s+10)}{s^2(s+6)(s+10)+k} = \lim_{s\to 0} 2 \cdot \frac{(s+6)(s+10)}{s^2(s+6)(s+10)+k} = \frac{2\cdot 60}{k} = \frac{120}{k}$$

- **Posto $\varepsilon_a$ uguale a 1,5 si ricava k**

$$\varepsilon_a = \frac{120}{k} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{120}{1{,}5} = 80$$

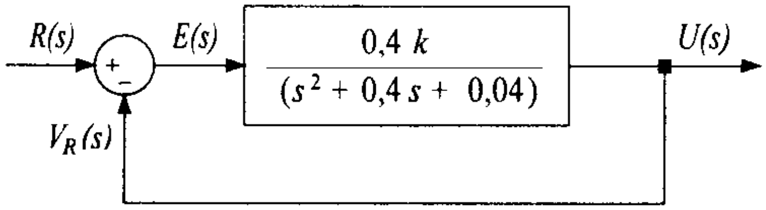
- **Metodo alternativo (mediante l'uso della tabella)**

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{s\to 0} s^2 \cdot \frac{k}{s^2(s+6)(S+10)} = \frac{k}{60}$$

$$\varepsilon_a = \frac{R}{H_0 \cdot k_a} = \frac{2}{1\cdot \dfrac{k}{60}} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad 2 = 1{,}5\frac{k}{60} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\cdot 60}{1{,}5} = 80$$

**Esercizio 5- Errore a regime - Sistema di tipo uno – Progetto**

Ricavare il valore di k affinché l'errore a regime sia minore del 2% per un segnale d'ingresso a gradino unitario.




Soluzione

Il sistema è di tipo 0, poiché la f.d.t. ad anello aperto non ha poli nell'origine .

$$G(s)H(s) = \frac{0{,}4k}{s^2 + 0{,}4s + 0{,}04}$$

L'errore a regime è uguale a $e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{H_0\left[1 + G(s)H_0\right]}$

- **Per un segnale a gradino unitario r(t) = 1 e R(s) = 1/s questo errore è:**

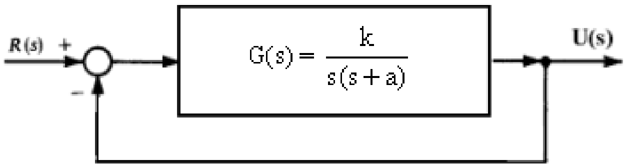
$$\varepsilon_p = e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{0{,}4k}{s^2 + 0{,}4s + 0{,}04}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + \frac{0{,}4k}{s^2 + 0{,}4s + 0{,}04}} = \frac{1}{1 + \frac{0{,}4k}{0{,}04}}$$

- **Posto $\varepsilon_p < 2/100$ si ricava k**

$$\frac{1}{1 + \frac{0{,}4k}{0{,}04}} < \frac{2}{100} \Rightarrow 1 + \frac{0{,}4k}{0{,}04} > 50 \Rightarrow \frac{0{,}4k}{0{,}04} > 49 \Rightarrow k > \frac{49 \cdot 0{,}04}{0{,}4} \Rightarrow k > 4{,}9$$

**Esercizio 6- Errore a regime - Sistema di tipo uno - Progetto**

Determinare i parametri su cui agire per diminuire l'errore, quando in ingresso è applicata una rampa unitaria r(t) = t




Soluzione

Il sistema è di tipo 1, poiché nella della f.d.t. ad anello aperto compare un polo nullo

L'errore a regime è uguale a $e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{H_0[1+G(s)H_0]}$

- per un segnale a parabola $r(t) = t$ e $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\varepsilon_V = e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{s(s+a)}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{s(s+a)}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+\frac{s\cdot k}{s(s+a)}} =$$

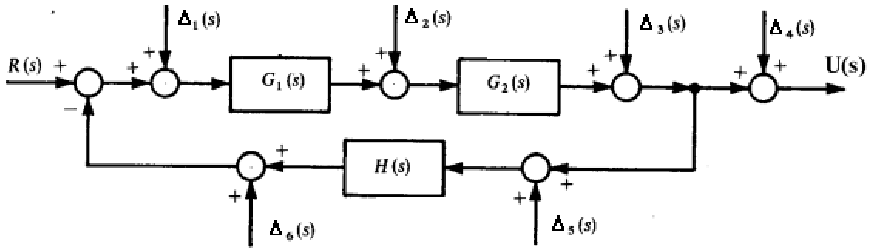
$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+\frac{k}{(s+a)}} = \frac{a}{k}$$

Per diminuire l'errore a regime è bisogna <u>aumentare k</u> oppure <u>diminuire a</u>

±

## 6.5 I DISTURBI ADDITIVI: GENERALITÀ

I disturbi additivi sono segnali indesiderati che entrano nel sistema e si sommano al segnale utile

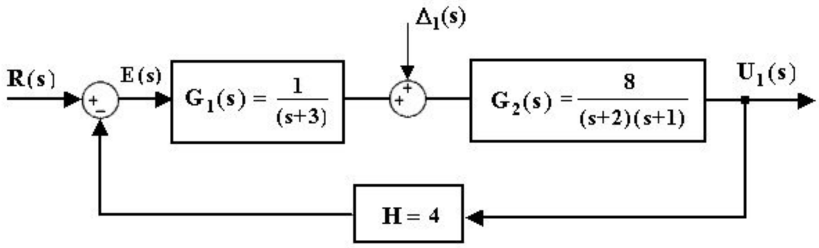



Ad esempio in un sistema di riscaldamento la variazione della temperatura esterna è un disturbo additivo che provoca una variazione non desiderata del valore della grandezza fisica.
Per valutare l'effetto prodotto da uno o più disturbi sulla risposta si applica il principio di sovrapposizione degli effetti.

## 6.6 ESERCIZI - EFFETTI DEI DISTURBI ADDITIVI

### Esercizio 1 – Disturbo sul blocco di andata - Risposta a regime

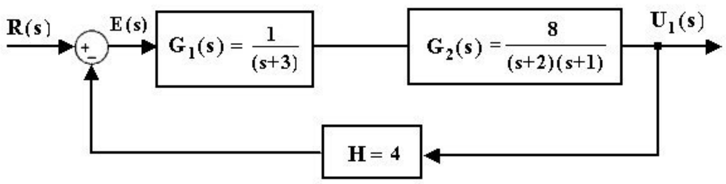
Determinare la risposta a regime del sistema in figura sollecitato da un segnale a gradino unitario. Il disturbo ha ampiezza 0,1.



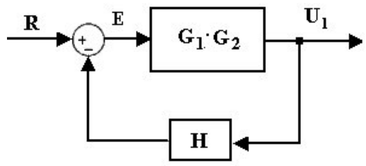

Soluzione

Per determinare l'uscita applichiamo e il principio di sovrapposizione degli effetti: considerando l'uscita come somma dell'uscita $U_1(S)$ dovuta al segnale R(s), e $U_2(s)$, dovuta al disturbo.

- **Consideriamo agente solo il segnale R(s) poniamo $\Delta_1(s) = 0$**



Riducendo i due blocchi in cascata ad un solo blocco con fdt $G_1.G_2$ si ha




$$W_1 = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 \cdot G_2 \cdot H}$$

$$U_1 = W \cdot R$$

$$W_1(s) = \frac{\dfrac{8}{(s+1)(s+2)(s+3)}}{1 + \dfrac{32}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{8}{(s+1)(s+2)(s+3)+32} = \frac{8}{(s^2+3s+2)(s+3)+8} =$$

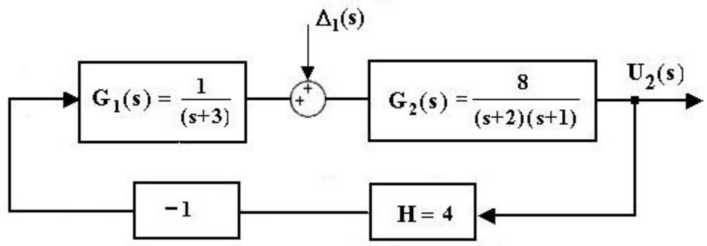
$$= \frac{8}{(s^2+3s+2)(s+3)+32} = \frac{8}{s^3+6s^2+11s+38} \quad \text{( fdt del sistema in assenza del disturbo)}$$

Avendo in ingresso un gradino di ampiezza unitaria $R(s)=1/s$ :

$$U_1(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{8}{s^3+6s^2+11s+38} \quad \text{(uscita complessa in assenza del disturbo)}$$

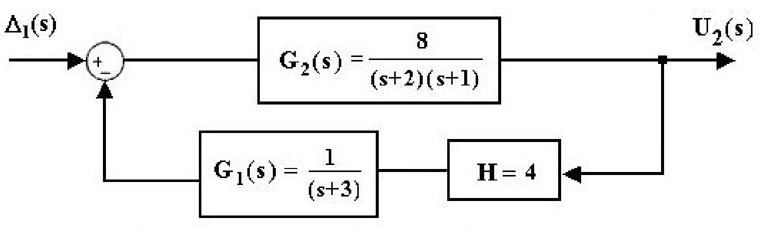
$$U_{f1} = \lim_{s \to 0} s \cdot U_1(s) = s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{8}{s^3+6s^2+11s+38} = 0{,}21 \quad \text{(valore a regime)}$$

- **Consideriamo ora, agente solo il disturbo $\Delta_1(s)$ poniamo R(s)= 0**

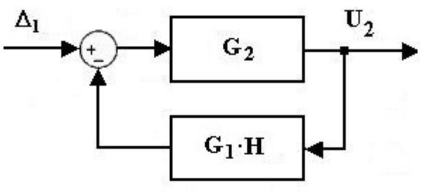



*Nota: il blocco –1 è dovuto al nodo sommatore che ora svolge la funzione invertente*

Lo schema è equivalente




Riducendo i due blocchi in cascata ad un solo blocco si ha




$$W_2 = \frac{G_2}{1 + G2 \cdot G_1 \cdot H}$$

$$U2 = W_2 \cdot \Delta_1$$

$$W_2 = \frac{\dfrac{8}{(s+1)(s+2)}}{1 + \dfrac{32}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = W_2 = \frac{\dfrac{8}{(s+1)(s+2)}}{\dfrac{(s+1)(+2)(s+3)+32}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{8(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{8(s+3)}{s^3 + +6s^2 + 11s + 38}$$

Avendo in ingresso un disturbo di ampiezza 0,1 $\Rightarrow$ $\Delta_1(s)$=0,1/s sostituendo si ha :

$$\boxed{U_2(s) = \frac{0{,}1}{s} \cdot \frac{8(s+3)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 38} \qquad \text{(uscita complessa dovuta al solo disturbo)}}$$

$$U_{f2} = \lim_{s \to 0} s \cdot U_2(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{0{,}1}{s} \cdot \frac{8(s+3)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 38} = \lim_{s \to 0} \frac{8(s+3)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 38} \Rightarrow$$

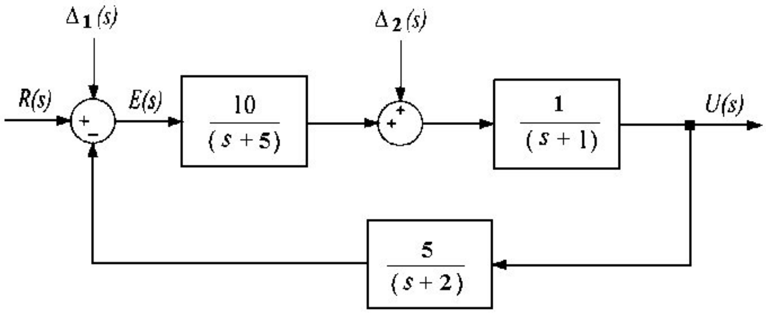
$$\boxed{U_{f2} = \frac{2{,}4}{38} = 0{,}063 \text{ (valore a regime dovuto al solo disturbo)}}$$

La risposta complessiva a regime è

$$\boxed{U_f = U_{f1} + U_{f2} = 0{,}21 + 0{,}06\ 3 = 0{,}273}$$

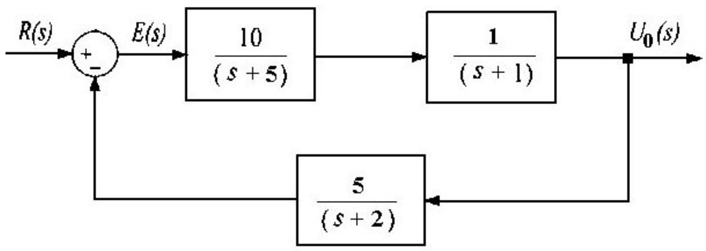
**Esercizio 2 – Disturbo all' ingresso e sul blocco di andata - Risposta a regime**

Determinare la risposta a regime del sistema in figura sollecitato da un segnale a gradino unitario. I disturbi hanno entrambi ampiezza 0,1




Per determinare l'uscita applichiamo e il principio di sovrapposizione degli effetti: considerando l'uscita come somma dell'uscita $U_0(S)$ dovuta al segnale R(s), $U_1(s)$, dovuta al disturbo $\Delta_1(s)$ e $U_2(s)$ , dovuta al disturbo $\Delta_2(s)$

- **Consideriamo agente solo il segnale R(s), poniamo $\Delta_0(s)=0$ e $\Delta_1(s)=0$**




$$W_0(s)=\frac{\dfrac{10}{(s+1)(s+5)}}{1+\dfrac{50}{(s+1)(s+2)(s+5)}}=\frac{\dfrac{10}{(s+1)(s+5)}}{\dfrac{(s+1)(s+2)(s+5)+50}{(s+1)(s+2)(s+5)}}=\frac{10(s+1)(s+5)}{(s^2+3s+2)(s+5)}=$$

$$=\frac{10(s+2)}{s^3+8s^2+17s+60}$$

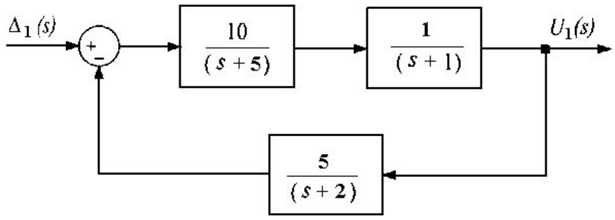
$$U_0(s)=W_1(s)\cdot R(s)$$

Avendo in ingresso un gradino di ampiezza unitaria R(s)=1/s, sostituendo si ha:

$$U_0(s)\ =\ \frac{1}{s}\cdot\frac{10(s+2)}{s^3+8s^2+17s+60}$$ (uscita complessa in assenza dei disturbi)

$$U_{f0}\ =\lim_{s\to 0}s\cdot U_0(s)=\ s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{10(s+2)}{s^3+8s^2+17s+60}=\frac{20}{60}=0{,}333$$ **(**valore a regime)

- **Consideriamo ora agente solo il disturbo $\Delta_1(s)=0$, poniamo R(s) e $\Delta_1(s)=0$**



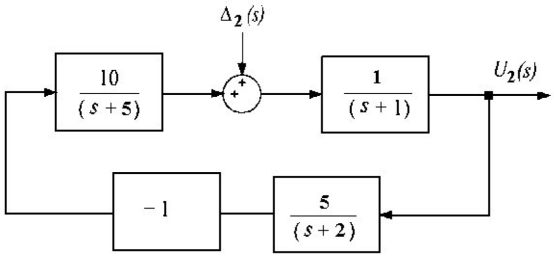

$$W_1(s) = W_0(s) = = \frac{10(s+2)}{s^3+8s^2+17s+60} \quad ; \quad U_1(s) = W_1(s)\cdot\Delta_1(s)$$

Avendo in ingresso un disturbo di ampiezza 0,1 $\Rightarrow$ $\Delta_1(s)$=1/s, sostituendo si ha:

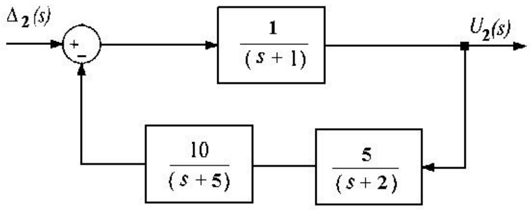
$$U_1(s) = \frac{0{,}1}{s}\cdot\frac{10(s+2)}{s^3+8s^2+17s+60} \quad \text{(uscita complessa dovuta al disturbo } \Delta_1\text{)}$$

$$U_{f1} = \lim_{s\to 0} s\cdot U_0(s) = s\cdot\frac{0{,}1}{s}\cdot\frac{10(s+2)}{s^3+8s^2+17s+60} = \frac{20}{60} = 0{,}033 \quad \text{(valore a regime)}$$

- **Consideriamo infine agente solo il disturbo $\Delta_1(s)$ =0, poniamo R(s) e $\Delta_0(s)$ =0**




$\Rightarrow$




$$W_2(s) = \frac{\dfrac{1}{(s+1)}}{1+\dfrac{50}{(s+1)(s+2)(s+5)}} = \frac{(s+2)(s+5)}{s^3+8s^2+17s+60} \quad ; \quad U_2(s) = W_2(s)\cdot\Delta_2(s)$$

Avendo in ingresso un disturbo di ampiezza 0,1 $\Rightarrow$ $\Delta_2(s)$=1/s, sostituendo si ha:

$$U_2(s) = \frac{0{,}1}{s}\cdot\frac{(s+2)(s+5)}{s^3+8s^2+17s+60} \quad \text{(uscita complessa dovuta al disturbo } \Delta_1\text{)}$$

$$U_{f2} = \lim_{s\to 0} s\cdot U_0(s) = s\cdot\frac{0{,}1}{s}\cdot\frac{(s+2)(s+5)}{s^3+8s^2+17s+60} = \frac{1}{60} = 0{,}017 \quad \text{(valore a regime)}$$

**Nota:**

L'effetto del disturbo che si introduce nel blocco di andata è minore di quello all'ingresso.

$$U_f = U_{f0} + U_{f1} + U_{f2} = 0{,}333 + 0{,}033 + 0{,}017 = 0{,}383$$

## 6.7 SENSIBILITÀ DI UNA FUNZIONE ALLE VARIAZIONI PARAMETRICHE

Le variazioni di alcune caratteristiche del sistema conseguente alle variazioni dei parametri è detta sensibilità.

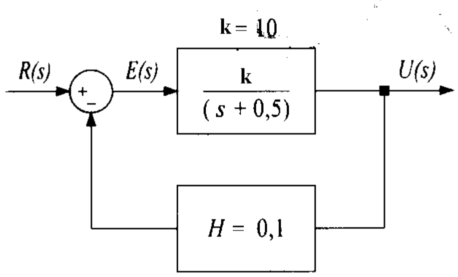
Si definisce sensibilità di una funzione F(s) rispetto a un parametro p e si indica $S_p^{F(s)}$ il rapporto tra la variazione percentuale della funzione e la variazione percentuale del parametro

$$S_p^{F(s)} = \frac{\frac{\Delta F(s)}{F(s)}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\Delta F(s)}{\Delta p} \cdot \frac{p}{F(s)} \qquad \text{per } \Delta p \to 0 \qquad \boxed{S_p^{F(s)} = \frac{\partial F(s)}{\partial p} \cdot \frac{p}{F(s)}}$$

$\frac{\partial F(s)}{\partial p}$ è la derivata parziale della funzione F(s) calcolata rispetto al parametro p

## 6.8 ESERCIZI - SENSIBILITÀ DELLA FDT ALLE VARIAZIONI PARAMETRICHE

Calcolare la sensibilità della funzione di trasferimento del sistema rappresentato in figura 5.3.21 alle variazioni del parametro *k* e della funzione di trasferimento del blocco di retroazione.
Scritta la funzione di trasferimento ad anello chiuso




$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

la sensibilità alle variazioni di *k* e alle variazioni di *H* sono rispettivamente uguali a

$$S_k^{W(s)} = \frac{\partial W(s)}{\partial k} \cdot \frac{k}{W(s)} = \frac{s + 0{,}5}{[s + 0{,}5 + k \cdot H]^2} \cdot \frac{k \cdot (s + 0{,}5 + k \cdot H)}{k}$$

$$S_H^{W(s)} = \frac{\partial W(s)}{\partial H} \cdot \frac{H}{W(s)} = \frac{-k \cdot H}{[s + 0{,}5 + k \cdot H]^2} \cdot \frac{H}{\frac{k}{s + 0{,}5 + k \cdot H}}$$

$$S_k^{W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k \cdot H}{s + 0{,}5}}$$

$$S_H^{W(s)} = \frac{-k \cdot H}{s + 0{,}5 + k \cdot H}$$

Considerato che le variazioni dei parametri avvengono in tempi molto lunghi, la sensibilità a regime è uguale a

$$S_k^{W(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + \frac{k \cdot H}{s + 0{,}5}} = \frac{1}{3} \qquad S_H^{W(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{-k \cdot H}{s + 0{,}5 + k \cdot H} = -\frac{1}{1{,}5}$$

L'aumento del guadagno $k$ diminuisce la sensibilità $S_k^{W(s)}$ e aumenta la sensibilità $S_H^{W(s)}$ alle variazioni di $H$.