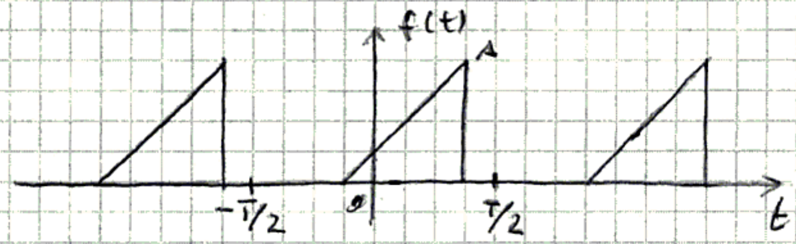
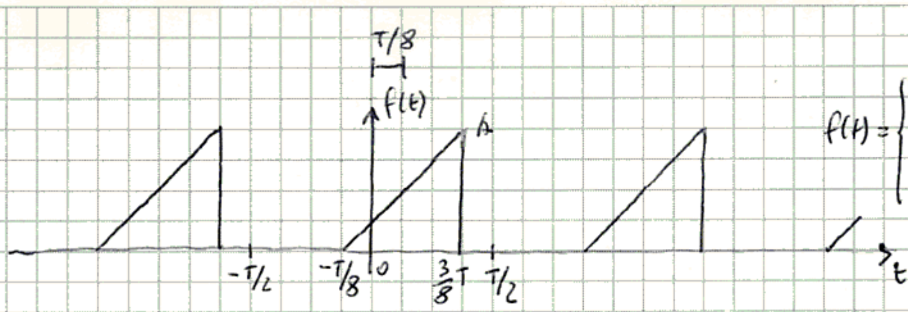
- NOME

- SCOMPORRE LA FUNZIONE PERIODICA ASSEGNATA NELLA SOMMA DI UNA FUNZIONE PARI E DI UNA FUNZIONE DISPARI.

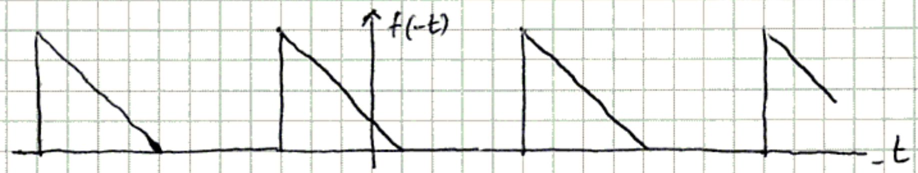
- SCRIVERE LE RELAZIONI CHE CONSENTONO IL CALCOLO DELLO SVILUPPO IN SERIE DELLA FUNZIONE PERIODICA ASSEGNATA.
(RISOLVERE FINO AL CALCOLO INDEFINITO DEGLI INTEGRALI)

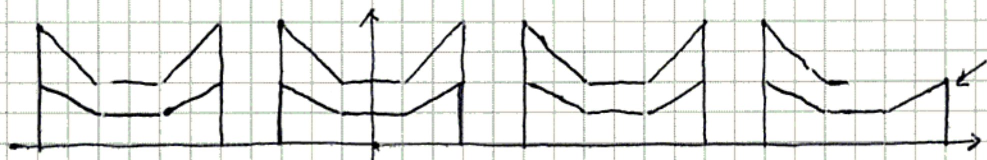
- DETERMINARE IL VALORE NUMERICO DEL VALOR MEDIO E DEL VALORE EFFICACE DELLA FUNZIONE ASSEGNATA
(CAMBIANDO L'ORIGINE DI UNA F.d.O. IL VALOR MEDIO E IL VALORE EFFICACE NON CAMBIANO)





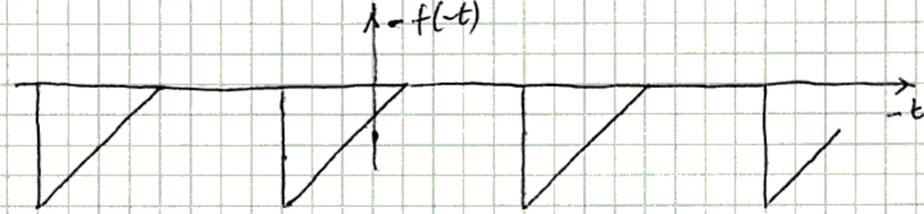
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2A}{T}t + \dfrac{A}{4} & -\dfrac{T}{8} < t < \dfrac{3}{8}T \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

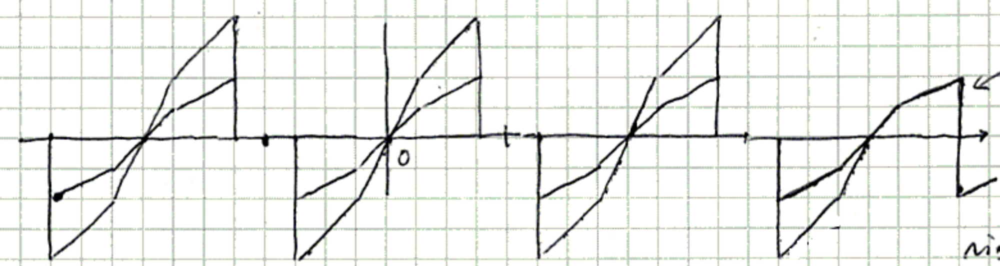




$$f_p = \frac{f(t)+f(-t)}{2}$$

fdO simmetrica rispetto all'asse $t=0$





$$f_d = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

fdO simmetrica rispetto all'origine $t=0$

$$f(t) = f_p + f_d = \frac{f(t)+f(-t)}{2} + \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/8}^{\frac{3}{8}T}\left(\frac{2A}{T}t + \frac{A}{4}\right)dt = \frac{1}{T}\left[\frac{A}{T}t^2 + \frac{A}{4}t\right]_{-T/8}^{\frac{3}{8}T} = \text{----}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/8}^{\frac{3}{8}T}\left(\frac{2A}{T}t + \frac{A}{4}\right)\cos n\omega t\,dt = \frac{4A}{T^2}\int_{-T/8}^{\frac{3}{8}T} t\cos n\omega t\,dt + \frac{A}{2T}\int_{-T/8}^{\frac{3}{8}T}\cos n\omega t\,dt =$$

$$= \frac{4A}{T^2}\left[t\,\frac{\sin n\omega t}{n\omega} + \frac{\cos n\omega t}{(n\omega)^2}\right]_{-T/8}^{\frac{3}{8}T} + \frac{A}{2T}\,\frac{\sin n\omega t}{n\omega}\Bigg|_{-T/8}^{\frac{3}{8}T} = \text{----}$$

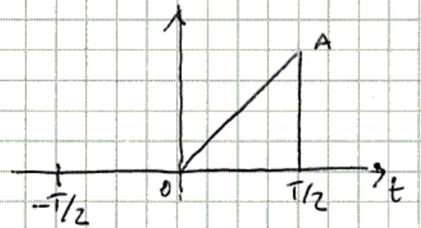
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/8}^{\frac{3}{8}T}\left(\frac{2A}{T}t + \frac{A}{4}\right)\sin n\omega t\,dt = \frac{4A}{T^2}\int_{-T/8}^{\frac{3}{8}T} t\sin n\omega t\,dt + \frac{A}{2T}\int_{-T/8}^{\frac{3}{8}T}\sin n\omega t\,dt =$$

$$= \frac{4A}{T^2}\left[-t\,\frac{\cos n\omega t}{n\omega} + \frac{\sin n\omega t}{(n\omega)^2}\right]_{-T/8}^{\frac{3}{8}T} - \frac{A}{2T}\,\frac{\cos n\omega t}{n\omega}\Bigg|_{-T/8}^{\frac{3}{8}T} = \text{---}$$

VALOR MEDIO E VALORE EFFICACE

valor medio e valore efficace non dipendono dall'origine delle fdO

cambiando l'origine



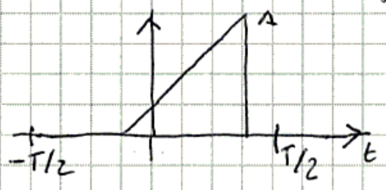
$$v(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T}t & 0<t<\frac{T}{2} \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

VALOR MEDIO $V_m = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} \frac{2A}{T} t \, dt = \frac{A}{T^2} t^2 \Big|_0^{T/2} = \frac{A}{T^2} \cdot \frac{T^2}{4} = \frac{A}{4}$

VALORE EFFICACE $V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2} \left(\frac{2A}{T}t\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{4A^2}{T^3} \frac{t^3}{3}\Big|_0^{T/2}} = A\sqrt{\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{T^3}_1} \cdot \frac{1}{3} \frac{\cancel{T^3}^1}{\cancel{8}_2}} = \frac{A}{\sqrt{6}}$

– CIÒ CHE SEGUE NON ERA RICHIESTO

mantenendo l'origine come nella funzione assegnata



$$v(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T}t + \frac{A}{4} & -\frac{T}{8}<t<\frac{3}{8}T \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

VALORE EFFICACE

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T \left(\frac{2A}{T}t + \frac{A}{4}\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/8}^{\frac{3}{8}T} \left(\frac{4A^2}{T^2}t^2 + 2 \cdot \frac{A}{4} \cdot \frac{2A}{T}t + \frac{A^2}{16}\right) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{4A^2}{T^2}\frac{t^3}{3} + \frac{A^2}{T}\frac{t^2}{2} + \frac{A^2}{16}t\right]_{-T/8}^{\frac{3}{8}T}} = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{A^2}{T^3}\left[\frac{27}{512}T^3 + \frac{T^3}{512}\right] + \frac{A^2}{2T^2}\left[\frac{9}{64}T^2 - \frac{1}{64}T^2\right] + \frac{A^2}{16T}\left[\frac{3}{8}T + \frac{T}{8}\right]} =$$

$$= A\sqrt{\frac{\cancel{4}^1}{3} \cdot \frac{\cancel{28}^7}{\cancel{512}_{\cancel{128}\,32}} + \frac{1}{2}\frac{\cancel{8}^1}{\cancel{64}_8} + \frac{1}{16} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{8}_2}} = A\sqrt{\frac{7}{96} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}} = A\sqrt{\frac{7+6+3}{96}} = A\sqrt{\frac{16}{96}} = \frac{A}{\sqrt{6}}$$

VALOR MEDIO

il valor medio si ricava proseguendo il calcolo di A_0 lasciato in sospeso

$$A_0 = \text{- - - -} = \frac{1}{T} A\left[\frac{1}{\cancel{T}}\frac{9}{64}T^{\cancel{2}} + \frac{1}{4}\frac{3}{8}T - \frac{1}{\cancel{T}}\frac{T^{\cancel{2}}}{64} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}T\right] =$$

$$= A\left[\frac{9}{64} + \frac{3}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{32}\right] = A\,\frac{9+6-1+2}{64} = \frac{16}{64}A = \frac{1}{4}A$$

VALOR MEDIO E VALORE EFFICACE calcolati in questo modo sono naturalmente uguali a quelli determinati precedentemente, in modo + semplice e rapido, con la funzione traslata nel tempo.

continuando il calcolo dei coefficienti a_n e b_n lasciati in sospeso

$$a_n = \dots = \frac{4A}{T^2}\left[\frac{3}{8}T\,\frac{\sin n\omega\frac{3}{8}T}{n\omega} + \frac{\cos n\frac{3}{8}T}{(n\omega)^2} - \left(+\frac{1}{8}T\right)\frac{\sin(+n\omega T/8)}{n\omega} - \frac{\cos n\omega T/8}{(n\omega)^2}\right] + \frac{A}{2Tn\omega}\left(\sin n\omega\frac{3}{8}T + \sin n\omega\frac{T}{8}\right) =$$

$$n\omega = 2\pi \quad , \quad \omega\frac{3}{8}T = \frac{3}{4}\pi \quad , \quad \omega\frac{1}{8}T = \pi/4$$

$$= \frac{\cancel{4}^{2}A}{n\cancel{2}\pi}\left(\frac{3}{8}\sin n\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{8}\sin n\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\cancel{4}^{1}A}{{}_{1}\cancel{4}n^2\pi^2}\left(\cos n\frac{3}{4}\pi - \cos n\frac{\pi}{4}\right) + \frac{A}{4n\pi}\left(\sin n\frac{3}{4}\pi + \sin n\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{A}{4n\pi}\left(3\sin n\frac{3}{4}\pi - \cancel{\sin n\frac{\pi}{4}} + \sin n\frac{3}{4}\pi + \cancel{\sin n\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{A}{n^2\pi^2}\left(\cos n\frac{3}{4}\pi - \cos n\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{A}{4n\pi}\left(4\sin n\frac{3}{4}\pi\right) + \frac{A}{n^2\pi^2}\left(\cos n\frac{3}{4}\pi - \cos n\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{A}{n\pi}\sin n\frac{3}{4}\pi + \frac{A}{n^2\pi^2}\left(\cos n\frac{3}{4}\pi - \cos n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$b_n = \dots = \frac{4A}{T^2}\left[-\frac{3}{8}T\,\frac{\cos n\omega\frac{3}{8}T}{n\omega} + \frac{\sin n\omega\frac{3}{8}T}{(n\omega)^2} + \left(-\frac{T}{8}\right)\frac{\cos n\omega T/8}{n\omega} + \frac{\sin n\omega T/8}{(n\omega)^2}\right] - \frac{A}{2Tn\omega}\left(\cos n\omega\frac{3}{8}T - \cos n\omega\frac{T}{8}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{4}^{2}A}{n\cancel{2}\pi}\left(-\frac{3}{8}\cos n\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{8}\cos n\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\cancel{4}^{1}A}{{}_{1}\cancel{4}n^2\pi^2}\left(\sin n\frac{3}{4}\pi + \sin n\frac{\pi}{4}\right) - \frac{A}{4n\pi}\left(\cos n\frac{3}{4}\pi - \cos n\frac{\pi}{4}\right) =$$

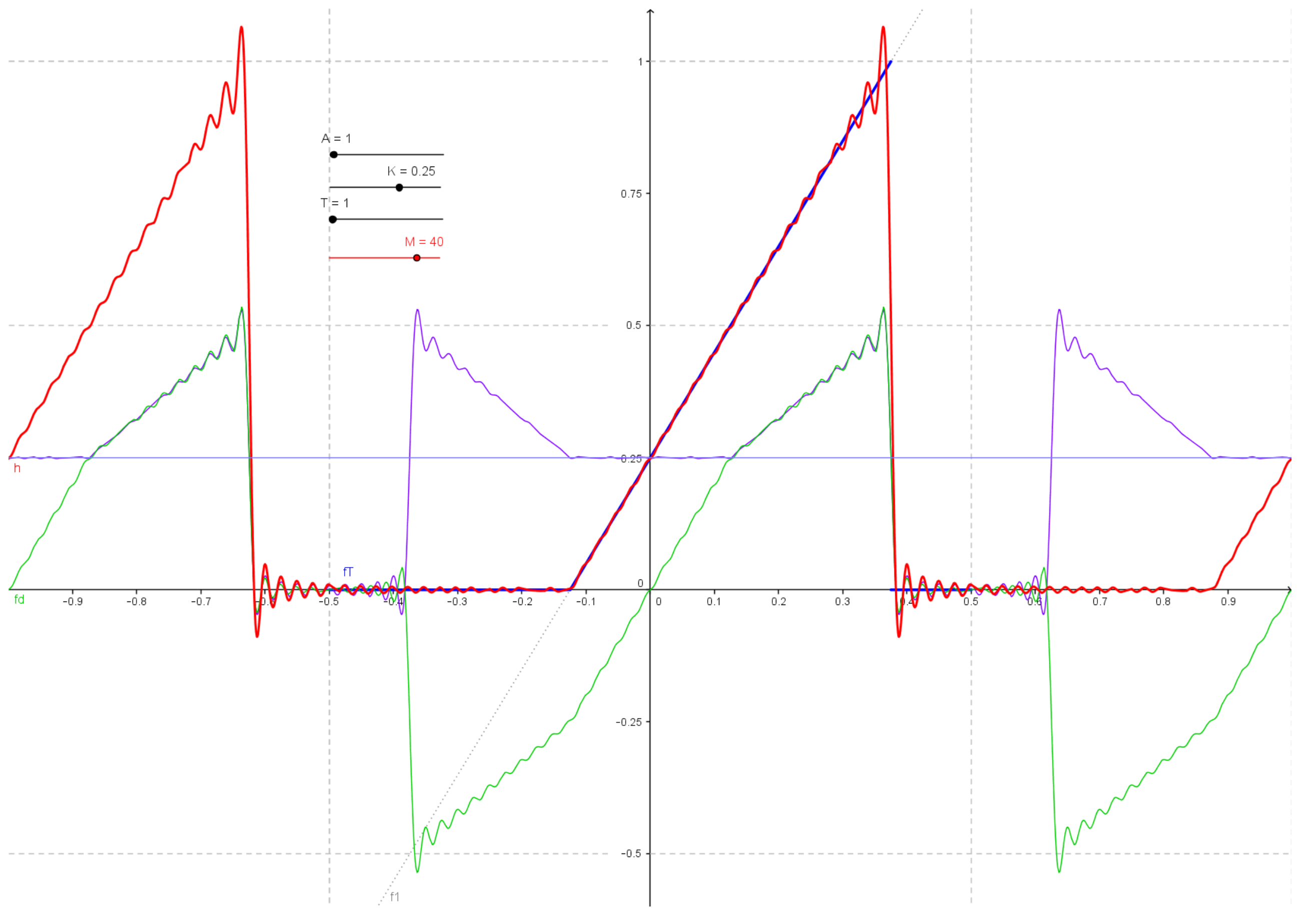
$$= \frac{A}{4n\pi}\left(-3\cos n\frac{3}{4}\pi - \cancel{\cos n\frac{\pi}{4}} - \cos n\frac{3}{4}\pi + \cancel{\cos n\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{A}{n^2\pi^2}\left(\sin n\frac{3}{4}\pi + \sin n\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{A}{4n\pi}\left(-4\cos n\frac{3}{4}\pi\right) + \frac{A}{n^2\pi^2}\left(\sin n\frac{3}{4}\pi + \sin n\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{A}{n\pi}\cos n\frac{3}{4}\pi + \frac{A}{n^2\pi^2}\left(\sin n\frac{3}{4}\pi + \sin n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(t) = \underbrace{A_0 + \sum a_n \cos n\omega t}_{f_p} + \underbrace{\sum b_n \sin n\omega t}_{f_d} = f_p(t) + f_d(t)$$

la successione numerica dei coefficienti a_n e b_n può essere generata utilizzando le espressioni algebriche ricavate dai calcoli effettuati precedentemente OPPURE può essere calcolata molto più rapidamente con GEOGEBRA, il quale esegue direttamente il calcolo numerico degli integrali definiti; in questo modo, però, non è disponibile l'espressione algebrica dei coefficienti stessi.


A = 1
K = 0.25
T = 1
M = 40
h
fd
fT
f1
1
0.75
0.5
0.25
0
-0.25
-0.5
-0.9
-0.8
-0.7
-0.5
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.5
0.7
0.8
0.9