Dipartimento di Elettronica e Informazione

POLITECNICO DI MILANO

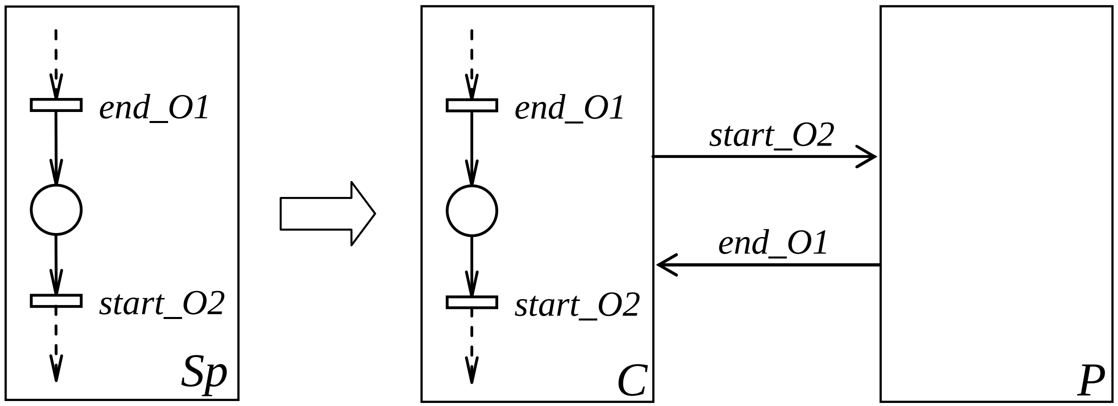
Automazione industriale
dispense del corso
14. Controllo con reti di Petri

Luigi Piroddi
piroddi@elet.polimi.it

Uso delle reti di Petri nel controllo di sistemi a eventi discreti

Ai fini del controllo di sistemi a eventi discreti, le reti di Petri sono state utilizzate in varie modalità in letteratura:

- *modello del solo impianto*,
  da cui poi “calcolare” il controllore (realizzato con altri formalismi matematici)
- *modello del solo controllore* (v. metodi diretti)
  - modello delle specifiche sul comportamento desiderato, da cui si può successivamente dedurre (facilmente) il modello del controllore
  - esempio: si desideri realizzare una sequenza tra due eventi, *end_O1* e *start_O2*;
    la specifica conterrà una porzione di rete come quella in figura (a sinistra)



il modello del controllore deputato ad imporre il soddisfacimento di tale specifica conterrà la stessa porzione di rete con l’aggiunta delle necessarie variabili di ingresso e uscita (v. parte destra della figura)

- quando la transizione associata all’evento *end_O1* è abilitata (*transizione non controllabile*), esso dovrà comunque attendere che l’evento accada, prima di far scattare la transizione, non facendo nulla nel frattempo
- poi, appena la transizione contrassegnata con l’evento *start_O2* è abilitata (*transizione controllabile*), deve scattare, generando l’evento corrispondente

▼ la retroazione tra *C* e *P* è modellizzata mediante la condivisione di eventi (ciascuno dei due sistemi genera eventi, che l’altro consuma)

▼ in tale modo di procedere, si opera un’unica fase di formalizzazione e definizione di modelli: il controllore viene progettato direttamente a partire dai “dati” del problema, affinando sempre più le specifiche

▶ *modello sia dell’impianto che del controllore*, sincronizzati in vari modi:

▼ *P* e *C* = reti di Petri collegate con archi,
il sistema retroazionato è anch’esso una rete di Petri;
questo consente, per esempio, di svolgere l’analisi del modello complessivo

▼ *P* e *C* = reti di Petri sincronizzate
i due sotto-sistemi sono modellizzati come reti di Petri etichettate (le transizioni sono associate ad eventi e una transizione scatta *se* è abilitata, *quando* avviene l’evento associato); la retroazione è modellizzata mediante la condivisione di eventi: una rete genera eventi, che l’altra “consuma”; le due reti di Petri si *sincronizzano* sugli eventi; il modello preserva la modularità del progetto, ma l’analisi non è sempre immediata

Controllo supervisivo basato su invarianti

Il controllo supervisivo basato su invarianti è un metodo indiretto di progetto, in cui la sintesi della rete di Petri che opera il controllo (*supervisore*), avviene a partire dalla conoscenza della rete di Petri che modellizza il sistema da controllare (*impianto*).

Il supervisore impone determinati vincoli sulla marcatura della rete dell’impianto (GMECs, *Generalized Mutual Exclusion Constraints*), sfruttando la nozione di P-invarianti.

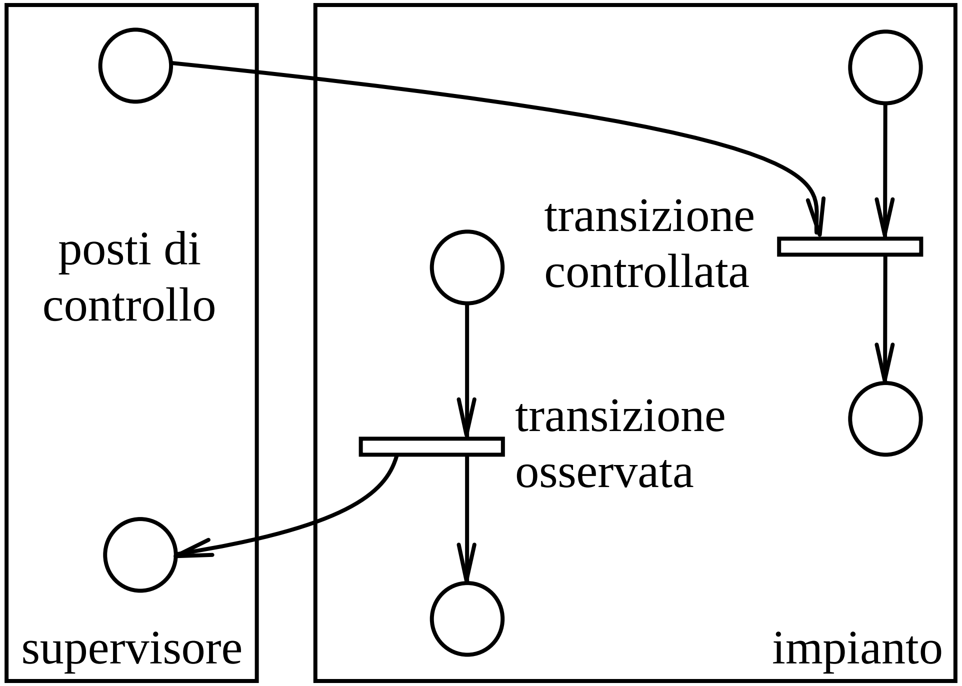
Una trattazione dettagliata del metodo si può trovare nel libro:

- J.O Moody and P.J. Antsaklis, “*Supervisory control of discrete event systems using Petri nets*”, Kluwer Academic Publishers

Il modello del supervisore è costituito esclusivamente da posti (*posti di controllo*), opportunamente collegati con le transizioni del modello dell’impianto.

Le transizioni dell’impianto con archi entranti in posti di controllo prendono il nome di *transizioni osservate*.

Quando tali transizioni scattano, si marcano dei posti di controllo.



Le transizioni dell’impianto con archi uscenti da posti di controllo prendono il nome di *transizioni controllate*.

L’abilitazione di tali transizioni è condizionata alla marcatura dei posti di controllo.

Il tipo di vincoli che si vuole imporre al funzionamento dell’impianto è di tipo GMEC (Generalized Mutual Exclusion Constraint):

$$LM_P \leq b$$

dove

- L è un vettore riga di numeri interi
- M_P è il vettore della marcatura dell’impianto
- b è uno scalare intero

In altre parole, la specifica di comportamento desiderato richiesta per il sistema controllato è che una combinazione lineare delle marcature dei posti della rete di impianto non superi un valore prefissato (in nessuno stato raggiungibile).

Il metodo ricade nella categoria dei problemi con specifica a stati proibiti (*forbidden state control*).

I vincoli di tipo GMEC non sono i più generali possibili, ma comprendono un buon numero di casi utili nella pratica, tra cui i vincoli di mutua esclusione nell’accesso a risorse condivise.

Esempio

Supponiamo di avere una cella di lavorazione con un unico manipolatore che può essere utilizzato per operazioni di carico di due macchine diverse che lavorano in concorrenza.

Nel modello dell'impianto ci saranno due posti, p_i e p_j, che rappresentano le due operazioni di carico (o_i e o_j).

Per impedire che le due operazioni siano contemporaneamente attive, occorre evitare che i due posti siano contemporaneamente marcati:

$$m_i + m_j \leq 1$$

Si ammettono quindi solo 3 situazioni:

- o_i e o_j inattive ($m_i = m_j = 0$)
- o_i attiva e o_j inattiva ($m_i = 1$, $m_j = 0$)
- o_i inattiva e o_j attiva ($m_i = 0$, $m_j = 1$)

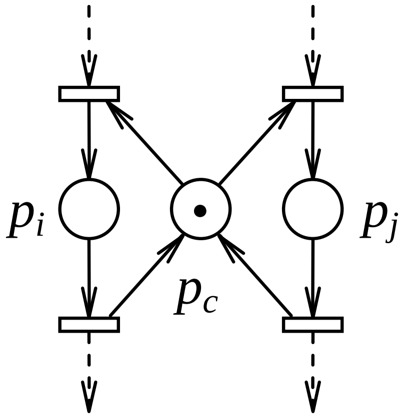
Il metodo consiste nel trasformare il vincolo di disuguaglianza in uno di uguaglianza, aggiungendo una variabile di slack $m_c \geq 0$:

$$\left.\begin{array}{l} m_i + m_j + m_c = 1 \\ m_c \geq 0 \end{array}\right\} \quad m_i + m_j \leq 1$$

Ora, interpretando m_c come marcatura di un posto aggiuntivo (che farà parte del supervisore), questo dovrà essere sempre marcato con un gettone se nessuna delle due operazioni è attiva e smarcato se una delle due operazioni è attiva.

Si osservi che il vincolo di uguaglianza è interpretabile come un P-invariante x per la rete controllata (gli elementi x_k di x sono nulli tranne che per $k = i, j, n+1$, dove $x_k = 1$, n essendo il numero di posti della rete originaria).

Una configurazione dei collegamenti e della marcatura del posto di controllo che assicura che il comportamento sia quello specificato è rappresentato in figura.



In generale:

- per ogni vincolo di tipo GMEC si introdurrà un nuovo posto di controllo opportunamente collegato e marcato
- tale posto di controllo genera un nuovo P-invariante nella rete controllata

Sintesi del supervisore con il metodo basato su P-invarianti

Sia data una rete di Petri con n posti ed m transizioni, che modellizzi l’impianto da controllare, e sia C_P la sua matrice di incidenza ($n \times m$).

Si vogliano imporre al sistema determinate specifiche di comportamento, esprimibili mediante una collezione di n_c vincoli GMEC, o più sinteticamente con la disuguaglianza matriciale:

$$LM_P \leq b$$

dove

- L è una matrice $n_c \times n$ di numeri interi
- M_P è il vettore della marcatura dell’impianto
- b è un vettore colonna $n_c \times 1$ di numeri interi

Seguendo il procedimento adottato nell’esempio, definiamo un vettore colonna di n_c variabili di slack, M_C tale che:

$$LM_P + M_C = b.$$

Esso rappresenta il vettore marcatura degli n_c posti di controllo che devono essere aggiunti alla rete di partenza, per ottenere il soddisfacimento delle specifiche.

Sia C_C la matrice di incidenza ($n_c \times m$) che rappresenta la topologia dei collegamenti dei posti di controllo con le transizioni dell’impianto.

Etichettando per convenzione i posti di controllo con indici progressivi, da n+1 a n+n_c, la matrice di incidenza della rete controllata risulta essere:

$$C = \begin{bmatrix} C_P \\ C_C \end{bmatrix}$$

Corrispondentemente, la marcatura generica e iniziale della rete controllata sono:

$$M = \begin{bmatrix} M_P \\ M_C \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} M_{P0} \\ M_{C0} \end{bmatrix}$$

Ora, la generica riga del vincolo $LM_P + M_C = b$ può essere interpretata come un’equazione sulle marcature associata ad un P-invariante x della rete controllata.

Coerentemente, l’equazione matriciale introduce n_c P-invarianti raggruppati nella matrice $X = [\ L \quad I\ ]^T$ (ogni P-invariante è una colonna di X), tali per cui:

$$X^T M = b.$$

Affinché le colonne di X siano effettivamente dei P-invarianti per il sistema complessivo, devono soddisfare l’equazione $X^T C = 0$, ovvero:

$$[\ L \quad I\ ]\begin{bmatrix} C_P \\ C_C \end{bmatrix} = LC_P + C_C = 0.$$

In conclusione, se la marcatura iniziale dell’impianto è compatibile con il vincolo dato, cioè se $LM_{P0} \leq b$, allora il supervisore a reti di Petri con

- matrice di incidenza $C_C = -LC_P$
- marcatura iniziale $M_{C0} = b - LM_{P0}$

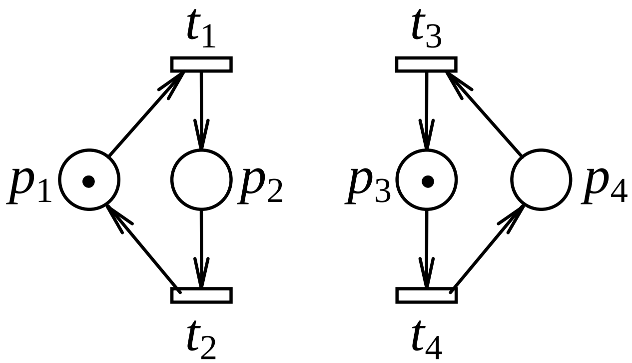
è in grado di imporre il vincolo dato.

Osservazioni:

- non si può applicare il metodo a vincoli di uguaglianza del tipo $LM_P = b$
  - infatti, questa condizione richiederebbe di fatto che le colonne di L^T fossero dei P-invarianti per la rete originaria
  - ora, se questo si verificasse, non ci sarebbe bisogno di posti di controllo aggiuntivi (del resto, risulterebbe $C_C = -LC_P = 0$, per la stessa definizione di P-invarianti)
  - in caso contrario non è possibile imporlo senza modificare la rete di Petri che modellizza l’impianto.
- il metodo di sintesi illustrato è *massimamente permissivo*, cioè impone solo i vincoli richiesti e non altri (non inibisce altri stati oltre a quelli esplicitamente proibiti dalle specifiche)
  - infatti, il supervisore è una rete di Petri che inibisce lo scatto di transizioni che porterebbero a $M_C < 0$ (transizioni non abilitate)
  - questa condizione implicherebbe $LM_P > b$ e quindi violerebbe il vincolo
- i P-invarianti del sistema complessivo sono quelli dell’impianto più quelli richiesti dai vincoli e imposti dai posti di controllo

Esempio

Si consideri un sistema costituito da due macchine, M_1 e M_2, che possono lavorare in parallelo, modellizzate semplicemente con due stati (libera e occupata).



Interpretazione del modello a rete di Petri:

- il posto p_1 rappresenta la disponibilità della macchina M_1
- il posto p_2 rappresenta lo stato di macchina M_1 occupata
- il posto p_4 rappresenta la disponibilità della macchina M_2
- il posto p_3 rappresenta lo stato di macchina M_2 occupata
- inizialmente la macchina M_1 è libera, mentre M_2 è occupata (p_1 e p_3 marcati)

La matrice di incidenza è

$$C_P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La specifica prevede che le due macchine non possano lavorare contemporaneamente. In altre parole, le marcature della rete in cui p_2 e p_3 sono contemporaneamente marcati non devono essere raggiungibili (*stati proibiti*).

Ciò può essere espresso sinteticamente mediante il vincolo:

$$m_2 + m_3 \leq 1$$

Poiché si tratta di un vincolo di tipo GMEC, $LM_P \leq b$, con $L = [\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ ]$ e $b = 1$, inizialmente rispettato (dato che $m_{20} + m_{30} = 1$), è possibile sintetizzare un controllore con il metodo basato sui P-invarianti.

Il P-invariante da imporre alla rete controllata è

$X = [\ L \ \ 1\ ]^T = [\ 0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1\ ]^T$,

corrispondente al vincolo di uguaglianza:

$m_2 + m_3 + m_5 = 1$,

dove m_5 rappresenta la marcatura del posto aggiuntivo di controllo.

Le connessioni del posto di controllo alle transizioni della rete si ottengono dalla formula seguente:

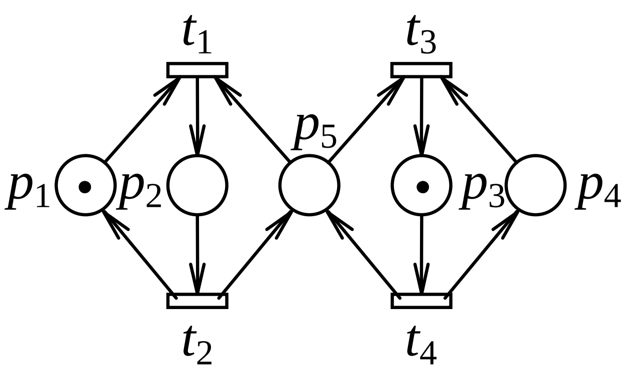
$$C_C = -\,LC_P = -\,[\ 0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0\ ] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [\ -1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 1\ ]$$

La marcatura iniziale del posto di controllo è pari a

$$M_{C0} = b - LM_{P0} = 1 - [\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ ] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Poiché $C_C = [\ -1\ \ 1\ \ -1\ \ 1\ ]$, il posto aggiuntivo si marca con un gettone quando scattano t_2 o t_4 e perde un gettone se scattano t_1 o t_3.

La rete che modellizza il sistema controllato è rappresentata in figura:



Prevenzione dei deadlock

Il metodo di sintesi basato sui P-invarianti può essere utilizzato per evitare i blocchi critici in un sistema, controllando che i sifoni della rete non si svuotino.

Infatti,

- un sifone *S* smarcato non può più acquistare gettoni, cosicché le transizioni in $S\bullet$ risultano morte, determinando un blocco parziale o totale (deadlock) della rete
- esistono classi di reti per cui il controllo di sifoni è sufficiente a garantire non solo l’assenza di deadlock, ma anche la vivezza (reti a scelta asimmetrica)
- attenzione però che nelle reti generalizzate anche un sifone (insufficientemente) marcato può causare un deadlock

A questo proposito, si definisce *sifone controllato* un sifone che rimane marcato in tutte le marcature raggiungibili.

Dato un generico sifone *S*, il vincolo che impone che non si possa mai smarcare del tutto è il seguente:

$$\sum_{\forall p_i \in S} m_i \geq 1$$

Tale vincolo si può riformulare nella forma GMEC standard $LM_P \leq b$, ponendo $b = -1$ e

$$l_i = \begin{cases} -1 & \text{se } p_i \in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si noti che l’applicazione del metodo al controllo dei sifoni introduce dei P-invarianti con elementi sia negativi che positivi.

Tuttavia, se la rete di partenza è conservativa, è facile verificare che i P-invarianti in questione corrispondono in ogni caso a dei P-invarianti positivi.

Può accadere che l’applicazione stessa del metodo basato sui P-invarianti possa introdurre nuovi sifoni nella rete (i vincoli imposti possono essere tali da bloccare la rete in un modo nuovo).

Occorre allora iterare il metodo.

In certe condizioni (p.es. la limitatezza), è garantito che l’applicazione iterativa del metodo converga ad una rete priva di sifoni non controllati.

Transizioni non controllabili e non osservabili

Finora abbiamo assunto che nella sintesi del supervisore si potesse

- misurare qualunque evento generato dal sistema da controllare, attraverso archi da transizioni della rete a posti di controllo
- condizionare lo scatto di una qualunque transizione della rete, attraverso archi da posti di controllo a transizioni della rete

Più in generale, ci possono essere:

- *transizioni non controllabili*
  - misure
  - guasti e i malfunzionamenti, che il modello dell’impianto può descrivere, ma che non possono essere controllati (non si può impedire ad una macchina di guastarsi!)
  - esiti alternativi di un’operazione (ad es. quando si cuoce un dolce non si può decidere a priori se sarà buono, crudo o bruciato)
  - processi irreversibili, non interrompibili una volta attivati (tipici delle reazioni chimiche)
- *transizioni non osservabili*
  - eventi troppo costosi o difficili da monitorare direttamente
  - malfunzionamenti di sensori

Perché il supervisore risulti realizzabile non deve accadere che esistano:

- archi uscenti da transizioni non osservabili della rete ed entranti nei posti di controllo
- archi uscenti da posti di controllo ed entranti in transizioni non controllabili della rete

Qualora il metodo basato sui P-invarianti porti a progettare un supervisore non realizzabile per i motivi appena elencati, occorre preventivamente modificare il vincolo originario in uno

- compatibile con esso
- tale che il supervisore risulti realizzabile

Il vincolo modificato risulterà necessariamente più restrittivo.

Condizioni di ammissibilità di un vincolo:

❶ $LC_{nc} \leq 0$

dove C_{nc} è una sotto-matrice estratta da C_P, ottenuta prendendo solo le colonne di C_P corrispondenti a transizioni non controllabili

- infatti, poiché $C_C = -LC_P$, la condizione precedente impedisce che possano esserci collegamenti uscenti da posti di controllo ed entranti in transizioni non controllabili (elementi di C_C negativi in corrispondenza delle colonne associate alle transizioni non controllabili)

❷ $LC_{no} = 0$

dove C_{no} è una sotto-matrice estratta da C_P, ottenuta prendendo solo le colonne di C_P corrispondenti a transizioni non osservabili (che vengono assunte anche non controllabili, per convenzione)

- la condizione precedente impedisce che possano esserci collegamenti (in qualunque verso) tra posti di controllo e transizioni non osservabili

Sia dato un vincolo GMEC $LM_P \leq b$ non ammissibile.

Si vuole cercare un vincolo nuovo $L^* M_P \leq b^*$ che sia:

❶ ammissibile e

❷ tale che $\forall M_P$ raggiungibile da M_{P0} che rispetti $L^* M_P \leq b^*$ valga anche $LM_P \leq b$

Un insieme di vincoli che soddisfa la seconda condizione si ottiene scegliendo:

$L^* = R_1 + R_2 L$

$b^* = R_2(b+\mathbf{1}) - \mathbf{1}$ ← NB. **1** indica un vettore colonna $[\ 1\ \ 1\ \ \dots\ \ 1\ ]^T$

con

- R_1 matrice $n_c \times n$ (n_c = numero di vincoli) tale che $R_1 M_P \geq 0$, per ogni marcatura raggiungibile (si osservi che basta scegliere $R_1 \geq 0$)
- R_2 matrice $n_c \times n_c$ diagonale e definita positiva

In conclusione, il metodo basato su P-invarianti è applicabile al vincolo modificato (con $R_1 + R_2 L \neq 0$), dove R_1 e R_2 sono scelte nel rispetto delle condizioni precedenti, purché $L^* M_{P0} \leq b^*$ e il vincolo nuovo sia ammissibile.

Il nuovo vincolo ($L^* M_P \leq b^*$) implica il precedente ($LM_P \leq b$).

Infatti:

$$(R_1+R_2L)\, M_P \leq R_2\,(b+\mathbf{1}) - \mathbf{1}$$

da cui si ricava

$$R_2\,(LM_P-b) \leq R_1M_P + R_2\,(LM_P-b) \leq R_2\mathbf{1} - \mathbf{1}$$

ovvero

$$LM_P-b \leq \mathbf{1} - R_2^{-1}\mathbf{1} = \begin{bmatrix} (1-1/r_{2,1}) \\ (1-1/r_{2,2}) \\ \dots \\ (1-1/r_{2,nc}) \end{bmatrix} < \mathbf{1}$$

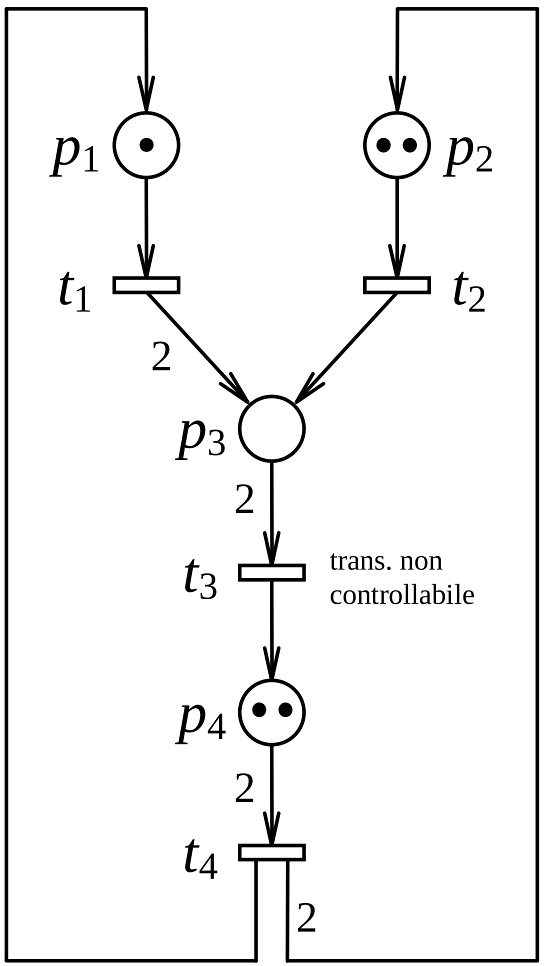
Poiché i coefficienti di L, M_P e b sono tutti interi, l’espressione precedente implica

$$LM_P-b \leq 0$$

Esempio

Si consideri la rete di Petri in figura, la cui interpretazione schematica è la seguente:

- t_1 caricamento reagenti nel reattore dalla linea A
- t_2 caricamento reagenti nel reattore dalla linea B
- p_3 reazione chimica in corso nel reattore
- t_3 termine reazione (*transizione non controllabile*, perché, una volta avviata, la reazione non si può fermare)
- p_4 stoccaggio dei prodotti per raffreddamento



Si vuole implementare il vincolo che non più di due unità di prodotto per volta possano essere raffreddate, ovvero

$m_4 \leq 2$.

Il vincolo corrisponde a $LM_P \leq b$, con $L = [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ]$ e $b = 2$.

La matrice di incidenza è

$$C_P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$ dove C_{nc} è evidenziata in rosso.

Si verifica immediatamente che la condizione di ammissibilità del vincolo ($LC_{nc} \leq 0$) è violata, poiché

$LC_{nc} = 1$

Quindi, non è possibile sintetizzare il supervisore a partire dal vincolo originario ma occorre modificarlo.

Si deve riformulare il vincolo come $L^* M_P \leq b^*$, in modo tale che:

❶ $L^* M_P \leq b^* \;\; \Rightarrow \;\; LM_P \leq b$

❷ $L^* C_{nc} \leq 0$

❸ $L^* M_{P0} \leq b^*$

La condizione ❶ è automaticamente soddisfatta se si sceglie:

- $L^* = R_1 + R_2 L$
- $b^* = R_2(b+1) - 1$
- R_1 tale che $R_1 M_P \geq 0$, $\forall M$ raggiungibile
- $R_2 > 0$

La condizione ❷ richiede che $L^* C_{nc} \leq 0$. Ora, poiché

$$L^* = R_1 + R_2 L = [\ r_{11}\ \ r_{12}\ \ r_{13}\ \ r_{14}\ ] + r_2 \cdot [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ]$$

$$C_{nc} = [\ 0\ \ 0\ \ -2\ \ 1\ ]^T$$

la condizione diventa:

$$L^* C_{nc} = -2 r_{13} + r_{14} + r_2 \leq 0$$

e tenendo conto che $r_{13} \geq 0$, $r_{14} \geq 0$ e $r_2 > 0$, si ha che

$$r_{13} \geq \frac{r_{14} + r_2}{2} > 0$$

Per esempio, ponendo:

$R_1 = [\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ ]$

$R_2 = 1$

si ottiene

$L^* = R_1 + R_2L = [\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ ] + 1\cdot[\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ] = [\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ ]$

$b^* = R_2(b+1) - 1 = 1\cdot(2+1) - 1 = 2$

Per l’applicabilità del metodo di controllo supervisivo (condizione ❸) occorre verificare che la marcatura iniziale del posto di controllo risulti nonnegativa.

$$M_{C0} = b^* - L^*M_{P0} = 2 - [\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ ]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Poiché tutte e tre le condizioni sono soddisfatte, il vincolo $L^* M_P \leq b^*$:

$m_3 + m_4 \leq 2$

può essere implementato con il metodo di controllo supervisivo basato su P-invarianti garantendo il soddisfacimento del vincolo originario senza che la transizione non controllabile venga condizionata nel suo scatto.

Applicando il metodo di sintesi basato su P-invarianti, si ottiene infine:

$$C_C = -L^* C_P = -[\,0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1\,] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = [\,-2 \;\; -1 \;\; 1 \;\; 2\,]$$

$$M_{C0} = b^* - L^* \cdot M_{P0} = 2 - [\,0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1\,] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

La corrispondente rete controllata è rappresentata in figura.

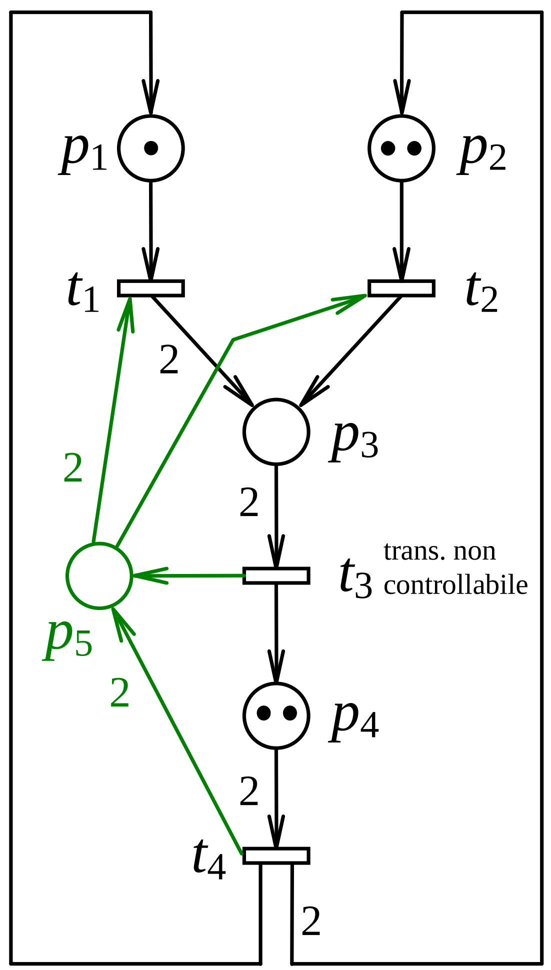
La rete originaria ammetteva un unico P-invariante:

$2m_1 + m_2 + m_3 + 2m_4 = 8$

La rete controllata ammette anche il P-invariante:

$m_3 + m_4 + m_5 = 2$

corrispondente a $x = [\ L^* \ \ 1\ ]^T$.



La rete originaria aveva 52 stati raggiungibili, che con il controllo non ammissibile sarebbero diminuiti a 47.

Il vincolo ammissibile implementato conserva solo 9 stati raggiungibili.

Una soluzione più permissiva (35 stati) si ottiene scegliendo per esempio:

$R_1 = [\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ ]$, $R_2 = 2$

che determina il vincolo $L^* M_P \leq b^*$ con

$L^* = R_1 + R_2 L = [\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ ] + 2\cdot[\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ] = [\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ ]$

$b^* = R_2(b+1) - 1 = 2\cdot(2+1) - 1 = 5$

ovvero

$m_3 + 2m_4 \leq 5$

Si noti infatti che tale vincolo è meno restrittivo di quello trovato in precedenza. Ad esempio, questo vincolo consente di avere $m_3 = 1$ quando $m_4 = 2$, che con l’altro vincolo era vietato.

Vincoli sugli eventi

I vincoli considerati finora sono tutti vincoli sullo stato.

Tuttavia, la specifica può riguardare anche *eventi*, ovvero il vettore di scatti.

Ad esempio, si può richiedere che due transizioni non possano scattare simultaneamente, o che una determinata transizione non possa mai scattare se un dato posto è marcato.

La forma generale di vincoli misti, che includono sia il vettore della marcatura M_P, sia il vettore di scatti s, è la seguente:

$$LM_P + fs \le b$$

con $f \ge 0$.

Ad esempio, il vincolo misto

$$m_i + s_j \le 1$$

indica che negli stati in cui la transizione t_j è abilitata essa non deve scattare se il posto p_i risulta marcato (interpretazione *diretta* del vincolo misto).

Vincoli sugli eventi: interpretazione diretta

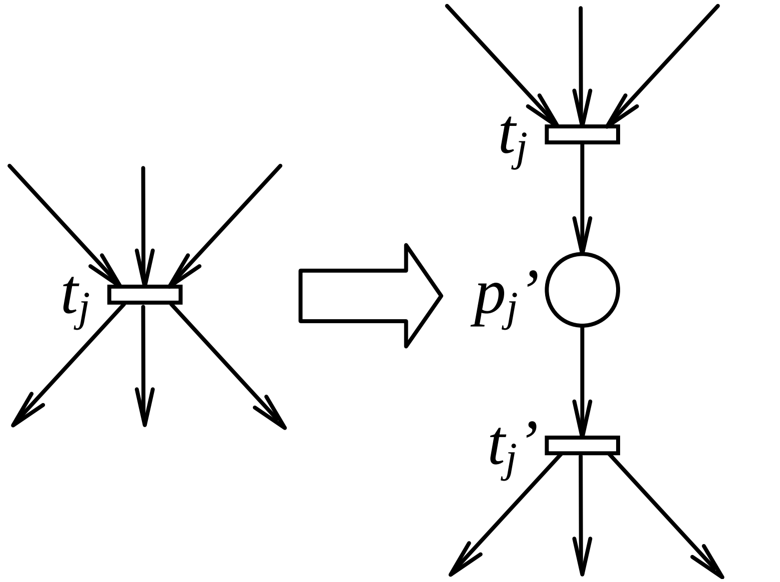
Per implementare il vincolo secondo l’interpretazione diretta si opera nel modo seguente:

❶ espansione della transizione t_j in una sequenza transizione-posto-transizione, dove il posto p_j’ serve a registrare lo scatto di t_j

❷ trasformazione del vincolo misto in un vincolo che coinvolge solo le marcature: $m_i + s_j \leq 1 \;\rightarrow\; m_i + m_j' \leq 1$

❸ sintesi del supervisore con riferimento al vincolo modificato

❹ eliminazione del posto p_j’ e fusione delle transizioni t_j e t_j’

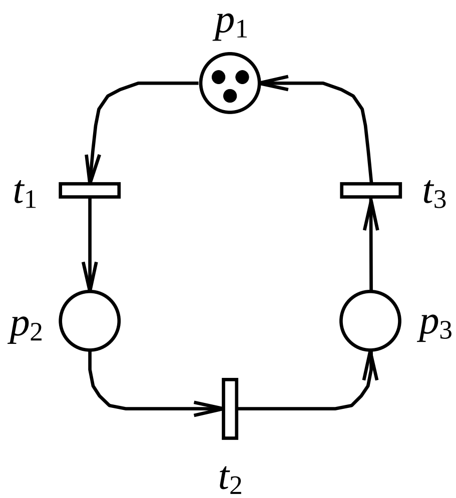


Esempio

Si consideri la rete di Petri riportata in figura, nella quale si vuole imporre il vincolo misto

$m_2 + s_3 \leq 1$

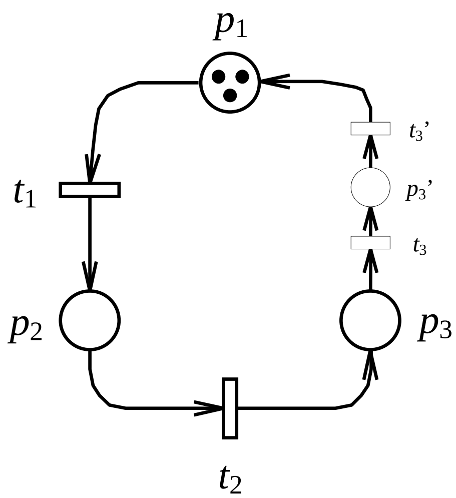
ovvero il posto p_2 non deve mai avere più di un gettone e se è marcato la transizione t_3 non deve scattare.



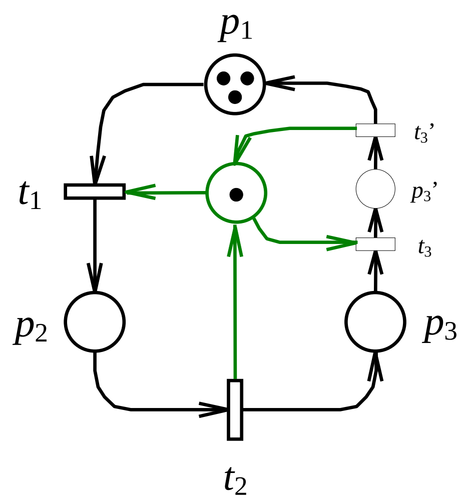
Si espande la transizione t_3 come rappresentato a lato.

Per la rete ottenuta il vincolo diventa:

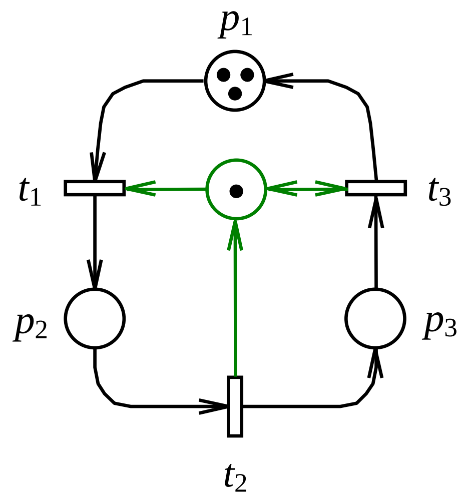
$m_2 + m_3' \leq 1$



Applicando il metodo di sintesi basato sui P-invarianti si ottiene la rete controllata di figura.



Ora, facendo ricollassare t_3-p_3’-t_3’ nella transizione t_3, si ottiene la rete rappresentata a lato, dove il posto di controllo è collegato a t_3 con un autoanello.



Si osservi che nella rete finale sono consentiti stati della rete originaria che, in quella rete, abilitavano t_3.

Ad esempio, è possibile raggiungere uno stato in cui $m_2 = m_3 = 1$ (è lo stato con marcatura [1 1 1 0]’).

Ora però, lo scatto di t_3 è possibile solo se p_2 è smarcato.

In generale, quindi, l’implementazione di vincoli misti secondo l’interpretazione diretta genera degli autoanelli. Questo implica che per il calcolo diretto del supervisore non si possa usare la matrice di incidenza.

Dato il vincolo $LM_P + fs \leq b$, e definite I_C e O_C le matrici di ingresso e uscita relative al controllore (da determinare), e I_{LC} e O_{LC} le matrici di ingresso e uscita relative alla matrice di incidenza $-LC_P$ ($-LC_P = O_{LC} - I_{LC}$), si ha:

$$I_C = I_{LC} + f,\ \ O_C = O_{LC} + f,\ \ M_{C0} = b - LM_{P0}$$

Nell’esempio, $C_P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $L = [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ]$, $f = [\ 0\ \ 0\ \ 1\ ]$, $b = 1$

$$-LC_P = [\ -1\ \ 1\ \ 0\ ] = O_{LC} - I_{LC} \quad \Rightarrow \quad O_{LC} = [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ],\ I_{LC} = [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]$$

$$I_C = I_{LC} + f = [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ] + [\ 0\ \ 0\ \ 1\ ] = [\ 1\ \ 0\ \ 1\ ]$$

$$O_C = O_{LC} + f = [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ] + [\ 0\ \ 0\ \ 1\ ] = [\ 0\ \ 1\ \ 1\ ]$$

$$M_{C0} = b - LM_{P0} = 1 - [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ]\,[\ 3\ \ 0\ \ 0\ ]^T = 1$$

Vincoli sugli eventi: implementazione indiretta

Un rimedio semplice per evitare l’insorgere di autoanelli è quello di reimpostare il problema richiedendo che la transizione t_j del vincolo misto sia non controllabile.

In questo modo non potranno crearsi archi diretti verso tale transizione e non ci saranno autoanelli nella soluzione.

Questo equivale ad interpretare il vincolo misto in maniera *indiretta*.

Con riferimento al vincolo misto

$$m_i + s_j \leq 1$$

tutti gli stati che abilitano t_j devono essere proibiti se il posto p_i è marcato.

Si noti che la seconda interpretazione è più restrittiva: gli stati che abilitano t_j non vengono consentiti se il posto p_i è marcato, mentre nell’interpretazione diretta essi vengono consentiti e viene proibito lo scatto di t_j.

Il procedimento per il calcolo del supervisore nel caso di interpretazione indiretta è identico al precedente, solo che il problema di sintesi viene affrontato marcando come non controllabili le transizioni presenti nel vincolo.

In dettaglio, occorrerà:

❶ espandere le transizioni del vincolo misto

❷ trasformare il vincolo misto in un vincolo standard sulle marcature

❸ *trasformare il vincolo sugli stati (inammissibile, perché porterebbe a controllare le transizioni non controllabili) in uno ammissibile*

❹ applicare il metodo di sintesi al vincolo sugli stati trasformato

❺ far collassare nuovamente le transizioni espanse in precedenza, rimuovendo i posti aggiuntivi

Esempio

Consideriamo nuovamente l’esempio studiato in precedenza, assumendo ora che la transizione t_3 sia non controllabile. Come già sappiamo, il vincolo

$$m_2 + m_3' \leq 1$$

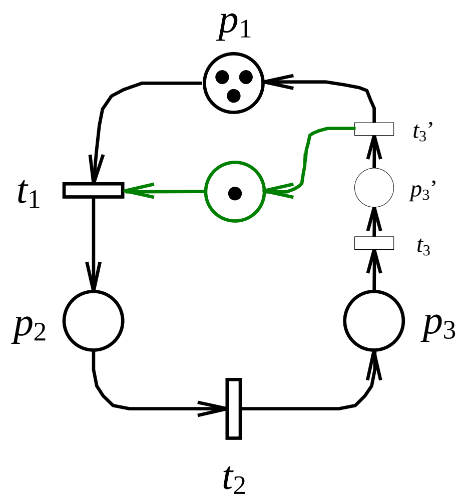
non risulta ammissibile (il supervisore che lo impone ha un arco verso t_3). Occorre perciò trasformare il vincolo rendendolo più restrittivo, ma ammissibile.

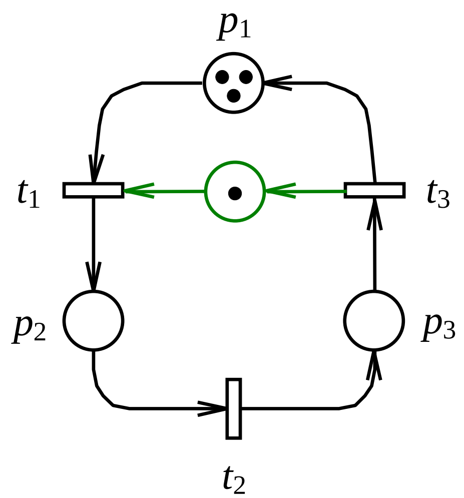
Ad esempio, un vincolo trasformato che va bene è il seguente:

$$m_2 + m_3 + m_3' \leq 1$$

che si controlla con la rete della figura in alto.

Poi, eliminando i posti aggiuntivi e fondendo le transizioni t_3 e t_3’ si ottiene la rete finale.





E’ facile constatare che tale supervisore è più restrittivo di quello trovato in precedenza.

Infatti, lo stato $m_2 = m_3 = 1$, proibito in questa implementazione, era invece raggiungibile con la realizzazione diretta.

Con la soluzione indiretta, però, si evitano autoanelli.