



Automazione industriale dispense del corso

13. Reti di Petri: analisi strutturale – sifoni e trappole

Luigi Piroddi
piroddi@elet.polimi.it

Introduzione

Abbiamo visto in precedenza il ruolo dei P-invarianti nel caratterizzare la limitatezza e la conservatività di una rete di Petri e quello dei T-invarianti riguardo alla reversibilità di una rete.

I sifoni e le trappole sono utili per l'analisi di vivezza e di non bloccaggio:

- ▶ un *sifone* è un insieme di posti che una volta persi tutti i gettoni non è più in grado di riacquistarne
- ▶ analogamente, una *trappola* è un insieme di posti che una volta acquisito almeno un gettone non è più in grado di smarcare completamente tutti i suoi posti
- ▶ un sifone inizialmente marcato che perde tutti i gettoni o una trappola inizialmente vuota che ne acquista qualcuno ci dicono che è avvenuto qualcosa di *irreversibile* nell'evoluzione della rete

Sifone

Un insieme di posti S è un sifone se e solo se:

$$\bullet S \subseteq S \bullet$$

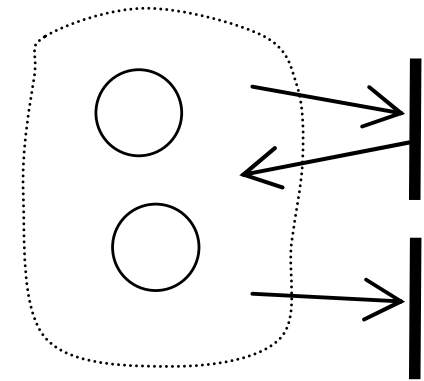
Tutte le transizioni di ingresso per un sifone (ovvero, il cui scatto immette gettoni) sono anche transizioni di uscita.

Lo scatto di una transizione appartenente all'insieme $S \bullet \setminus \bullet S$ (transizione solo in uscita da posti del sifone) tende a svuotare di gettoni il sifone.

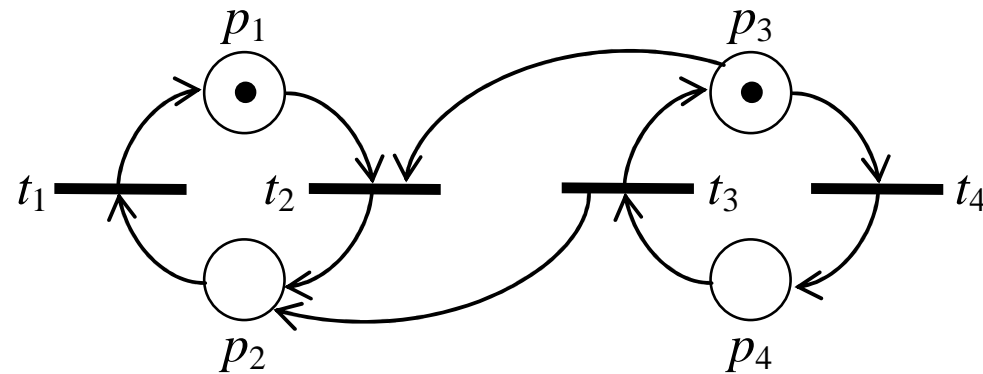
Se S è un sifone privo di gettoni in una certa marcatura M , allora è privo di gettoni in ogni marcatura $M' \in R(N, M)$ raggiungibile da M . Infatti,

- ▶ se un sifone S è smarcato, nessuna delle transizioni di $S \bullet$ è abilitata
- ▶ poiché $S \bullet$ contiene l'insieme delle transizioni che potenzialmente potrebbero marcare S (per la definizione di sifone, $S \bullet \supseteq \bullet S$), nessuna di queste ultime può scattare e il sifone rimane permanentemente vuoto

In presenza di un sifone S non marcato, tutte le transizioni di $S \bullet$ sono morte, e la rete non è viva.



Esempio



Esempi di sifoni:

$$S_1 = \{p_3, p_4\} \rightarrow \bullet S_1 = \{t_3, t_4\} \subset \{t_2, t_3, t_4\} = S_1 \bullet$$

$$S_2 = \{p_2, p_3, p_4\} \rightarrow \bullet S_2 = \{t_2, t_3, t_4\} \subset \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = S_2 \bullet$$

$$S_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \rightarrow \bullet S_3 = \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = S_3 \bullet$$

Trappola

Un insieme di posti S è una trappola se e solo se:

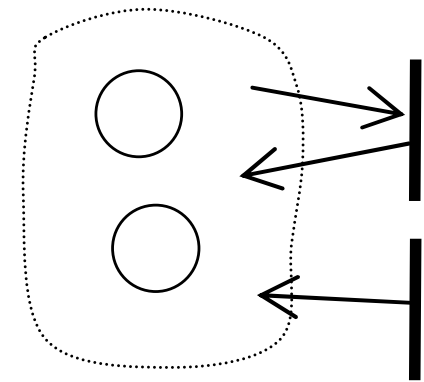
$$S \bullet \subseteq \bullet S$$

Tutte le transizioni in uscita da posti della trappola sono anche transizioni in ingresso per posti della trappola.

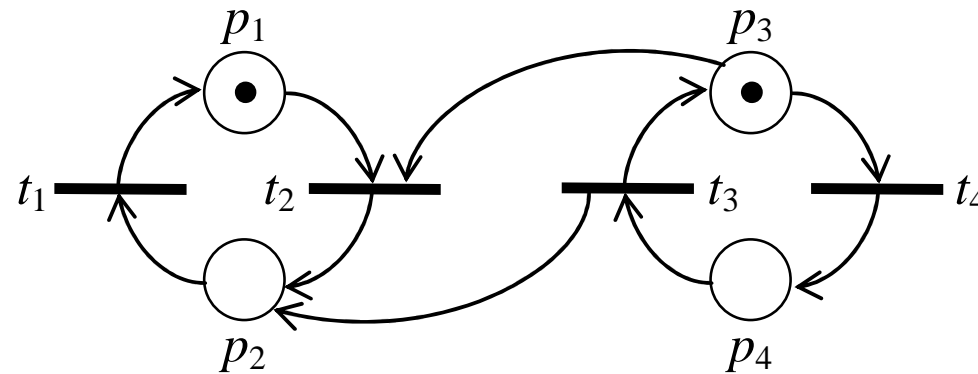
Lo scatto di una transizione appartenente all'insieme $\bullet S \setminus S \bullet$ (solo in ingresso per posti della trappola) tende a riempire di gettoni la trappola.

Proprietà di una trappola:

- ▶ ogni transizione il cui scatto potenzialmente fa diminuire il numero di gettoni appartiene a $S \bullet$
- ▶ ma se S è una trappola, tale transizione appartiene anche a $\bullet S$, quindi il suo scatto ha anche come effetto di generare dei gettoni in S
- ▶ se S è una trappola marcata in una certa marcatura M , allora rimane marcata in ogni marcatura $M' \in R(N, M)$ raggiungibile da M



Esempio (cont.)



Esempi di trappole:

$$S_4 = \{p_1, p_2\} \rightarrow S_4 \bullet = \{t_1, t_2\} \subset \{t_1, t_2, t_3\} = \bullet S_4$$

$$S_5 = \{p_1, p_2, p_4\} \rightarrow S_5 \bullet = \{t_1, t_2, t_3\} \subset \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = \bullet S_5$$

$$S_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \rightarrow S_3 \bullet = \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = \bullet S_3$$

Si osservi che S_3 è sia un sifone che una trappola:

- ▶ poiché è una trappola inizialmente marcata, non si svuota mai completamente
- ▶ è un sifone che non si può svuotare

Legami tra sifoni, trappole e P-invarianti

Il supporto di un P-invariante positivo è sia un sifone che una trappola

- ▶ se $M_0 = 0$ l'insieme di posti rimane permanentemente vuoto, come un sifone
- ▶ se $M_0 > 0$ l'insieme di posti non si può mai smarcare del tutto, come una trappola
- ▶ non vale il viceversa: nell'esempio precedente S_3 è un sifone e una trappola, ma non coincide con il supporto di un P-invariante

Quindi, non tutti i sifoni di una rete sono “pericolosi” ai fini della vivezza.

Un sifone contenente una trappola marcata non si può mai svuotare del tutto.

Che legame c'è, allora, tra i sifoni di una rete (ordinaria) e la sua vivezza?

- ▶ se M è una marcatura morta, allora l'insieme $S = \{p \in P \mid M(p) = 0\}$ dei posti privi di gettoni in M è un sifone non marcato
- ▶ se ogni sifone contiene una trappola marcata in una marcatura M , allora non esiste in $R(N, M)$ una marcatura morta
- ▶ infatti, se esistesse tale marcatura (M'), allora i posti privi di gettoni in M' costituirebbero un sifone smarcato, contraddicendo l'ipotesi

In generale, una rete in cui non esiste nessuna marcatura raggiungibile morta non è necessariamente una rete viva (una rete è viva se tutte le marcature raggiungibili sono vive, che è una condizione molto più forte che l'assenza di marcature morte).

Casi particolari:

- ▶ una rete a scelta libera estesa è viva se e solo se tutti i suoi sifoni contengono una trappola marcata (*teorema di Commoner*).
- ▶ una rete a scelta asimmetrica è viva se (ma non solo se) tutti i suoi sifoni contengono una trappola marcata

I risultati precedenti valgono solo per reti ordinarie.

- ▶ in una rete generalizzata un deadlock può anche essere causato da sifoni non vuoti, ma non sufficientemente marcati
- ▶ anche nel caso di una rete generalizzata rimane però vero che il completo svuotamento di un sifone determina un blocco (parziale o totale) della rete, perché in tali condizioni le transizioni di S^\bullet sono morte

Sifoni di base, sifoni minimi e sifoni p -minimi

Il calcolo dei sifoni è un problema combinatorio complesso, ma per fortuna non serve calcolare tutti i sifoni. Infatti:

- ▶ l'unione di sifoni è un sifone
- ▶ un sifone *di base* è un sifone non ottenibile come unione di altri sifoni
- ▶ tutti i sifoni di una rete possono essere generati per unione di sifoni di base

Perciò è sufficiente calcolare i sifoni *di base*.

Dal punto di vista del problema della prevenzione dei deadlock non servono nemmeno tutti i sifoni di base, ma solo i sifoni *minimi*:

- ▶ un sifone S è detto *minimo* se e solo se non esiste un altro sifone S' tale che $S' \subset S$
- ▶ ciascun sifone della rete o è minimo o contiene uno o più sifoni minimi
- ▶ se si impedisce che tutti i sifoni minimi si svuotino, nessun sifone della rete potrà svuotarsi del tutto
- ▶ un sifone minimo è anche di base, ma non tutti i sifoni di base sono minimi

In conclusione: $\{\text{sifoni}\} \supseteq \{\text{sifoni di base}\} \supseteq \{\text{sifoni minimi}\}$.

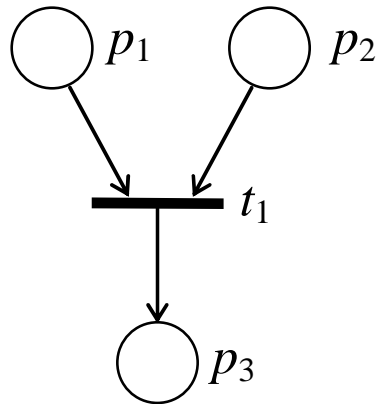
I sifoni di base non sono tutti minimi, ma sono tutti p -minimi:

- ▶ un sifone p -minimo con riferimento ad un posto p_i è un sifone contenente il posto p_i e un insieme minimo di posti
- ▶ tutti i sifoni p -minimi sono anche di base
- ▶ un sifone è di base se e solo se è p -minimo rispetto a qualche posto

In altre parole: $\{\text{sifoni di base}\} = \bigcup_{i=1}^n \{\text{sifoni } p_i\text{-minimi}\}$

Analoghe definizioni si possono fornire anche per le trappole.

Esempio



	$\bullet S$	$S \bullet$
p_1	\emptyset	t_1
p_2	\emptyset	t_1
p_3	t_1	\emptyset

Sifoni p_1 -minimi: $\{p_1\}$

Sifoni p_2 -minimi: $\{p_2\}$

Sifoni p_3 -minimi: $\{p_1, p_3\}, \{p_2, p_3\}$

Altri sifoni: $\{p_1, p_2\}, \{p_1, p_2, p_3\}$

Sifoni di base: $\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_1, p_3\}, \{p_2, p_3\}$

Infatti, gli altri sifoni si ottengono per unione di sifoni di base

Sifoni minimi: $\{p_1\}, \{p_2\}$

Infatti, tutti gli altri sifoni contengono p_1 e/o p_2

Calcolo dei sifoni (e delle trappole)

Esistono diversi modi per calcolare i sifoni:

- ❶ calcolo dei sifoni minimi mediante l'uso diretto della definizione
- ❷ calcolo di alcuni sifoni tramite simulazione
- ❸ calcolo di tutti i sifoni per via algoritmica

Per calcolare le trappole di una rete di Petri si può usare lo stesso metodo usato per trovare i sifoni:

- ▶ se si cambia il verso di tutti gli archi (p.es. cambiando di segno la matrice di incidenza), si scambiano pre-set e post-set di tutti i posti
- ▶ le trappole della rete di partenza coincidono con i sifoni della rete così trasformata
- ▶ pertanto, il calcolo dei sifoni della rete trasformata fornisce le trappole della rete di partenza

Metodo ①: calcolo dei sifoni minimi mediante la definizione

Il procedimento per il calcolo dei sifoni di base consiste nel calcolare iterativamente i sifoni *p-minimi* per ogni posto della rete, escludendo via via i posti già esaminati (evitando così di trovare sifoni *p-minimi* ma non minimi):

- ▶ si calcolano prima i sifoni p_1 -minimi, aggiungendo a p_1 i posti necessari (in tutte le possibili combinazioni) ad includere nel post-set dell'insieme considerato tutte le transizioni contenute nel pre-set
- ▶ poi si cercano i sifoni p_2 -minimi non contenenti p_1 , ovvero si elimina p_1 dalla rete e si procede come al passo precedente per p_2 ;
in questo modo si escludono automaticamente
 - ▼ sifoni p_2 -minimi già trovati (sifoni *p-minimi* sia per p_1 che p_2)
 - ▼ (alcuni) sifoni p_2 -minimi ma non minimi (contenenti sifoni p_1 -minimi)
- ▶ poi si cercano i sifoni p_3 -minimi non contenenti né p_1 , né p_2 , e così via

Al termine della procedura si saranno ottenuti tutti i sifoni minimi, più eventualmente qualche sifone di base (*p-minimo*), non minimo, da eliminare a posteriori.

Metodo ②: calcolo per simulazione

Se simulando la rete si individua uno stato di blocco, l'insieme di posti privo di gettoni in quello stato costituisce un sifone che si è smarcato.

Problemi:

- ▶ si individuano solo gli stati di blocco totale della rete, non quelli di blocco parziale
- ▶ l'analisi dipende dalla marcatura iniziale
- ▶ è di fatto un'analisi di raggiungibilità (che noi volevamo evitare con l'analisi strutturale)

Metodo ③: calcolo per via algoritmica

Esistono diversi algoritmi per il calcolo dei sifoni. Uno relativamente semplice è quello descritto di seguito, basato sulla modifica della matrice di incidenza.

- ▶ richiede la soluzione di un sistema di disequazioni lineari omogeneo
- ▶ è un metodo complesso, ma completo (fornisce tutte le soluzioni)

Procedimento:

- ① Si costruisce una nuova rete di Petri a partire da quella in esame.
 - ▼ la rete trasformata ha gli stessi posti, transizioni e archi della rete di partenza
 - ▼ il peso di ogni arco entrante in una transizione viene moltiplicato per un coefficiente pari alla *somma* di tutti i pesi degli archi uscenti dalla medesima transizione
 - ▼ in termini della matrice C , si moltiplicano gli elementi negativi di ogni colonna (archi entranti nella transizione corrispondente) per la somma degli elementi positivi della stessa colonna (archi uscenti)
- ② Si scrive la matrice di incidenza C' della rete trasformata.
- ③ Un insieme di posti $S = ||x||$, con $x \geq 0$, è un sifone della rete originaria se e solo se $x^T C' \leq 0$.

Ora, risolvere direttamente l'insieme di disequazioni $x^T C' \leq 0$ non è sempre facile. Un approccio alternativo è il seguente:

$$x^T C' \leq 0 \rightarrow [x^T \ z^T] \begin{bmatrix} C' \\ I \end{bmatrix} = 0$$

dove $z \geq 0$ rappresenta un vettore (di dimensioni pari al numero delle transizioni) di variabili di slack non negative.

Risolvere questo sistema di equazioni è equivalente al calcolo dei P-invarianti della rete trasformata a cui si aggiungano per ogni transizione un posto e un arco diretto dalla transizione al posto.

Con riferimento ai posti originali della rete, occorre poi calcolare i supporti dei P-invarianti così ottenuti: questi rappresentano dei sifoni per la rete originaria (famiglia generatrice di sifoni).