Circuiti dinamici

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 9-12-2010)

Circuiti resistivi e circuiti dinamici

- **Circuiti resistivi**: circuiti formati esclusivamente da componenti resistivi
  - le equazioni del circuito costituiscono un sistema di equazioni algebriche
  - i valori delle tensioni e delle correnti (**risposte**) in un certo istante dipendono solo dai valori delle grandezze impresse dei generatori indipendenti (**ingressi**) allo stesso istante
- **Circuiti dinamici**: circuiti che contengono almeno un componente dinamico (induttore o condensatore)
  - le equazioni del circuito costituiscono un sistema di equazioni differenziali
  - i valori delle risposte a un certo istante dipendono anche dagli andamenti degli ingressi negli istanti precedenti

Equazioni di un circuito dinamico lineare

- **Ipotesi**:
  - Circuito lineare
  - Numero di lati: l
  - Numero di lati corrispondenti a componenti dinamici: N_D
- **Equazioni**:
  - LKV, LKI ➡ l equazioni lineari algebriche omogenee
  - Componenti resistivi ➡ $l - N_D$ equazioni lineari algebriche
  - Componenti dinamici ➡ N_D equazioni differenziali lineari

Condensatori

$$\mathrm{i}_k(t) = C_k \frac{d\,\mathrm{v}_k}{dt}$$

Induttori

$$\mathrm{v}_k(t) = L_k \frac{d\,\mathrm{i}_k}{dt}$$

Stato di un circuito dinamico

- La determinazione dell'andamento della risposta di un circuito dinamico a partire da un istante iniziale t_0 richiede la conoscenza
  - dell'andamento per $t \geq t_0$ delle grandezze impresse dei generatori (**ingressi**)
  - di N_D **condizioni iniziali** corrispondenti ai valori all'istante t_0 delle grandezze che compaiono sotto il segno di derivata nelle equazioni del circuito (tensioni dei condensatori e correnti degli induttori)
- **Stato del circuito** all'istante $t = t_0$: insieme di informazioni che assieme all'andamento degli ingressi per $t \geq t_0$ consentono di determinare la risposta del circuito per $t \geq t_0$
  - ➡ Le condizioni iniziali rappresentano lo stato iniziale del circuito

Variabili di stato

- **Variabili di stato**: insieme di variabili mediante le quali è rappresentato lo stato del circuito
  - lo stato può essere rappresentato mediante le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori
  - la stessa informazione può essere rappresentata mediante le cariche dei condensatori e i flussi degli induttori
- Le variabili di stato determinano l'energia accumulata nei componenti dinamici
  - ➡ L'energia accumulata nel circuito è una funzione dello stato
- **Stato zero**: stato caratterizzato da valori nulli di tutte le tensioni dei condensatori e di tutte le correnti degli induttori
  - ➡ Nello stato zero l'energia accumulata nel circuito è nulla

Ordine di un circuito

- **Ordine di un circuito:** $N =$ numero di variabili indipendenti necessarie per descrivere lo stato del circuito
  - normalmente coincide con il numero di componenti dinamici (induttori e condensatori) contenuti nel circuito ➡ $N = N_D$
- In casi particolari è possibile che, a causa della struttura del circuito, le variabili di stato non siano indipendenti tra loro
  - ➡ $N < N_D$
  - questo può avvenire, ad esempio, se nel circuito è presente
    - una maglia i cui lati tutti sono condensatori o generatori di tensione
    - un taglio i cui lati sono tutti induttori o generatori di corrente
  - i circuiti in cui si verifica questa situazione sono detti **degeneri**

Equazione risolvente

- Risolvendo le equazioni di un circuito dinamico lineare rispetto alla tensione o alla corrente di un lato, indicata con $\mathrm{y}(t)$, si ottiene un'equazione differenziale del tipo

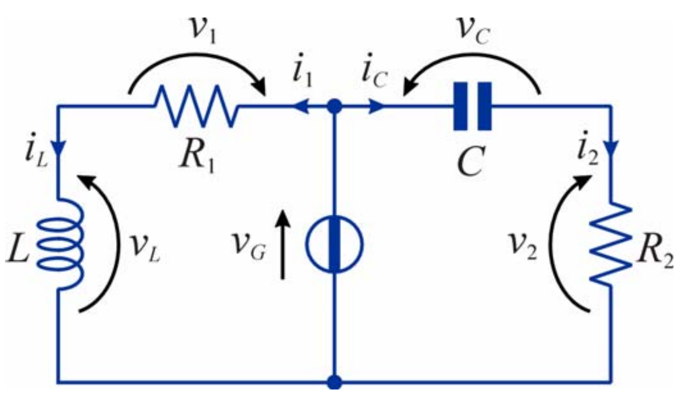
$$a_N \frac{d^N \mathrm{y}(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} \mathrm{y}(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{d\,\mathrm{y}(t)}{dt} + a_0\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{f}(t)$$

  - L'ordine dell'equazione differenziale generalmente coincide con l'ordine del circuito
  - Il secondo membro è una combinazione lineare degli ingressi e di loro derivate rispetto al tempo
  - I coefficienti a_k sono funzione dei parametri dei componenti diversi dai generatori indipendenti

Ordine dell'equazione risolvente

- In casi particolari l'equazione risolvente può essere di ordine inferiore all'ordine del circuito
- Ciò avviene quando la struttura del circuito è tale da rendere nulla l'interazione tra alcune risposte e alcune variabili di stato

Esempio



  - La tensione e la corrente di L e R_1 non dipendono da v_C
  - la tensione e la corrente di C e R_2 non dipendono da v_L
  - ➡ L'analisi del circuito richiede la risoluzione di due equazioni del primo ordine disaccoppiate

Condizioni iniziali

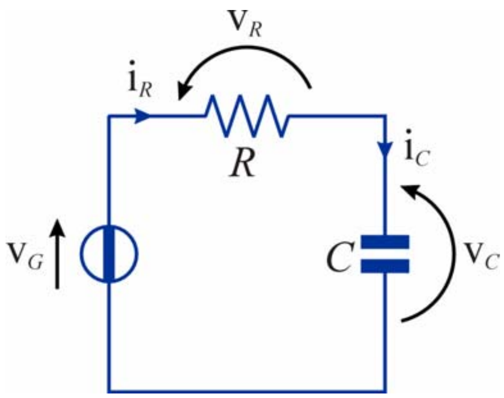
- Per determinare la risposta per $t > t_0$ si devono associare all'equazione N condizioni iniziali del tipo

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{y}(t_0) = Y_0 \\
& \left.\frac{d\,\mathrm{y}}{dt}\right|_{t_0} = Y_0^{(1)} \\
& \vdots \\
& \left.\frac{d^{N-1}\mathrm{y}}{dt^{N-1}}\right|_{t_0} = Y_0^{(N-1)}
\end{aligned}
\qquad\qquad Y_0, Y_0^{(1)}, \ldots, Y_0^{(N-1)} = \text{costanti}
$$

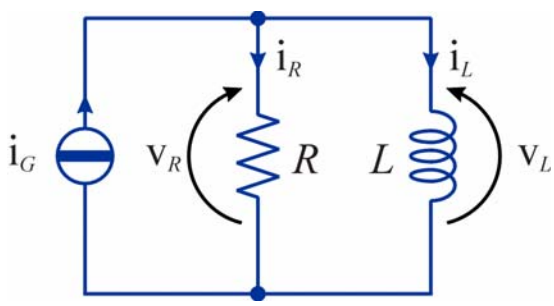
- I valori iniziali di $\mathrm{y}(t)$ e delle sue derivate possono essere determinati se sono noti i valori per $t = t_0$ delle variabili di stato

Circuiti elementari del primo ordine

- **Circuito del primo ordine**: circuito il cui stato è definito mediante una sola variabile
- ➡ La determinazione della risposta richiede la risoluzione di un'equazione differenziale del primo ordine
- Escludendo i casi degeneri, rientrano in questa categoria i circuiti che contengono un solo bipolo dinamico (condensatore o induttore)
- ➡ I casi più semplici sono i seguenti



Circuito RC



Circuito RL

Circuiti elementari del primo ordine

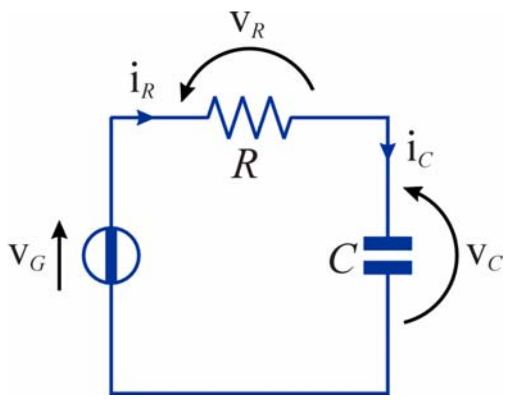
- Si assume che siano noti
  - gli andamenti degli ingressi (= grandezze impresse dai generatori indipendenti: $v_G(t)$ e $i_G(t)$) per $t \geq t_0$
  - i valori delle variabili di stato per $t = t_0$
    - $v_C(t_0) = V_{C0}$
    - $i_L(t_0) = I_{L0}$
- Si vogliono determinare le risposte dei circuiti per $t > t_0$
- Senza perdita di generalità ci si può limitare a considerare il caso particolare in cui $t_0 = 0$
- Le espressioni delle tensioni e delle correnti nel caso $t_0 \neq 0$ si possono ottenere da quelle ricavate per $t_0 = 0$ sostituendo t con $t - t_0$

Circuito RC elementare

- **LKI**: $i_R(t) = i_C(t) = i(t)$
- **LKV**: $v_R(t) + v_C(t) = v_G(t)$
- **Componenti**:

$$i(t) = C\frac{dv_c}{dt}$$

$$v_R(t) = Ri(t) = RC\frac{dv_c}{dt}$$



$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}v_G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{\tau}v_C(t) = \frac{1}{\tau}v_G(t) \qquad (\tau = RC)$$

- All'equazione si deve associare la condizione iniziale

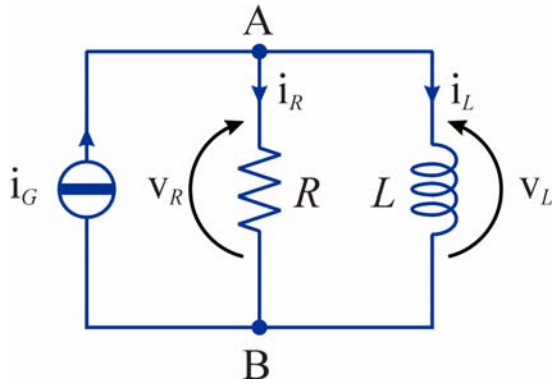
$v_C(0) = V_{C0}$

Circuito RL elementare

- **LKI**: $i_R(t)+i_L(t)=i_G(t)$
- **LKV**: $v_R(t)=v_L(t)=v(t)$
- **Componenti**:

$$v_L(t)=L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_R(t)=\frac{v(t)}{R}=\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}$$



$$\frac{di_L}{dt}+\frac{R}{L}i_L(t)=\frac{R}{L}i_G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{di_L}{dt}+\frac{1}{\tau}i_L(t)=\frac{1}{\tau}i_G(t) \qquad \left(\tau=\frac{L}{R}\right)$$

- All’equazione si deve associare la condizione iniziale

$$i_L(0)=I_{L0}$$

Equazione differenziale

- In entrambi i casi si è ottenuta un’equazione differenziale del tipo

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{1}{\tau}x(t)=\dfrac{1}{\tau}\mathrm{f}(t)\\ x(0)=X_0\end{cases}$$

- $\mathrm{f}(t)=$ grandezza impressa del generatore indipendente
- $\tau=$ **costante di tempo**
  - circuito RC ➡ $\tau=RC$

    $$[R][C]=\frac{[V]}{[I]}\times\frac{[Q]}{[V]}=\frac{[Q]}{[I]}=[T]$$

  - circuito RL ➡ $\tau=L/R=LG$

    $$\frac{[L]}{[R]}=\frac{[\Phi]}{[I]}\times\frac{[I]}{[V]}=\frac{[\Phi]}{[V]}=[T]$$

Risoluzione dell'equazione differenziale

- L'integrale generale dell'equazione di stato può essere espresso come
  $x_G(t) = x_H(t) + x_P(t)$
  - $x_H(t)$ = integrale generale dell'equazione omogenea associata
  - $x_P(t)$ = soluzione particolare dell'equazione differenziale
- Per determinare $x_H(t)$ si risolve l'equazione caratteristica
  $$\lambda + \frac{1}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\tau}$$
- Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è
  $$x_H(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soluzione particolare – ingresso costante

- Se la tensione o la corrente impressa del generatore indipendente è una costante (indicata con F), l'equazione diviene
  $$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}F$$
- In questo caso è immediato riconoscere che l'equazione ammette la soluzione particolare costante
  $$x_P(t) = F$$

Soluzione particolare - ingresso sinusoidale

- Se la tensione o la corrente impressa del generatore indipendente è una funzione sinusoidale di pulsazione ω
  $\mathrm{f}(t) = F_M \cos(\omega t + \varphi)$
  l'equazione ammette una soluzione particolare del tipo
  $x_p(t) = X_M \cos(\omega t + \xi)$
- Per ricavare X_M e ξ si sostituisce $x_P(t)$ nell'equazione differenziale
  $$\frac{dx_P}{dt} + \frac{1}{\tau} x_P(t) = \frac{1}{\tau} \mathrm{f}(t)$$
- Si applica la trasformata di Steinmetz al primo e al secondo membro dell'equazione differenziale
  $$j\omega \mathbf{X}_P + \frac{1}{\tau} \mathbf{X}_P = \frac{1}{\tau} \mathbf{F}$$
  $$\mathbf{F} = \mathfrak{S}\{\mathrm{f}(t)\} = F_M \, \mathrm{e}^{j\varphi}$$
  $$\mathbf{X}_P = \mathfrak{S}\{x_P(t)\} = X_M \, \mathrm{e}^{j\xi}$$

Soluzione particolare - Ingresso sinusoidale

- Si determina il fasore di $x_P(t)$
  $$\mathbf{X}_p = \frac{\mathbf{F}}{1 + j\omega\tau}$$
- Si antitrasforma:
  $$X_M = |\mathbf{X}_P| = \frac{F_M}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$
  $$\xi = \arg(\mathbf{X}_P) = \arg(\mathbf{F}) - \arg(1 + j\omega\tau) = \varphi - \mathrm{arctg}(\omega\tau)$$
- Quindi la soluzione particolare è
  $$x_p(t) = \frac{X_M}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos[\omega t + \varphi - \mathrm{arctg}(\omega\tau)]$$

Espressione della soluzione

- L'integrale generale dell'equazione differenziale

$$x_G(t) = x_H(t) + x_P(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + x_P(t)$$

- La costante k si determina imponendo che $x(t)$ soddisfi la condizione iniziale

$$x(0) = k + x_P(0) = X_0 \quad \Rightarrow \quad k = X_0 - x_P(0)$$

➡ L'espressione della soluzione (per $t > 0$) è

$$\boxed{x(t) = \left[X_0 - x_P(0)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} + x_P(t)}$$

Componente transitoria e componente di regime

$$x(t) = \underbrace{\left[X_0 - x_P(0)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Componente transitoria}} + \underbrace{x_P(t)}_{\text{Componente di regime}} \qquad \text{(Se } \tau > 0\text{)}$$

- Se $\tau > 0$ il primo termine tende a zero per $t \to \infty$
  - ➡ **componente transitoria**
  - la componente transitoria dipende sia dall'ingresso che dallo stato iniziale
- Per $t \to \infty$ la risposta tende ad identificarsi con il secondo termine
  - ➡ **componente di regime**
  - la componente di regime dipende solo dall'ingresso

Risposta libera e risposta forzata

$$x(t) = \underbrace{X_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\textbf{Risposta con ingresso zero}} + \underbrace{x_P(t) - x_P(0)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\textbf{Risposta nello stato zero}}$$

- La risposta con ingresso zero (**risposta libera**)
  - è dovuta all'energia immagazzinata nel circuito all'istante iniziale
  - dipende solo dallo stato iniziale
  - tende a zero per $t \to \infty$ (se $\tau > 0$)
- La risposta nello stato zero (**risposta forzata**)
  - dipende solo dall'ingresso
  - tende alla componente di regime per $t \to \infty$ (se $\tau > 0$)

Espressione della soluzione

- Se l'ingresso è costante la soluzione completa (per $t > 0$) è

$$x(t) = \left(X_0 - F\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + F$$

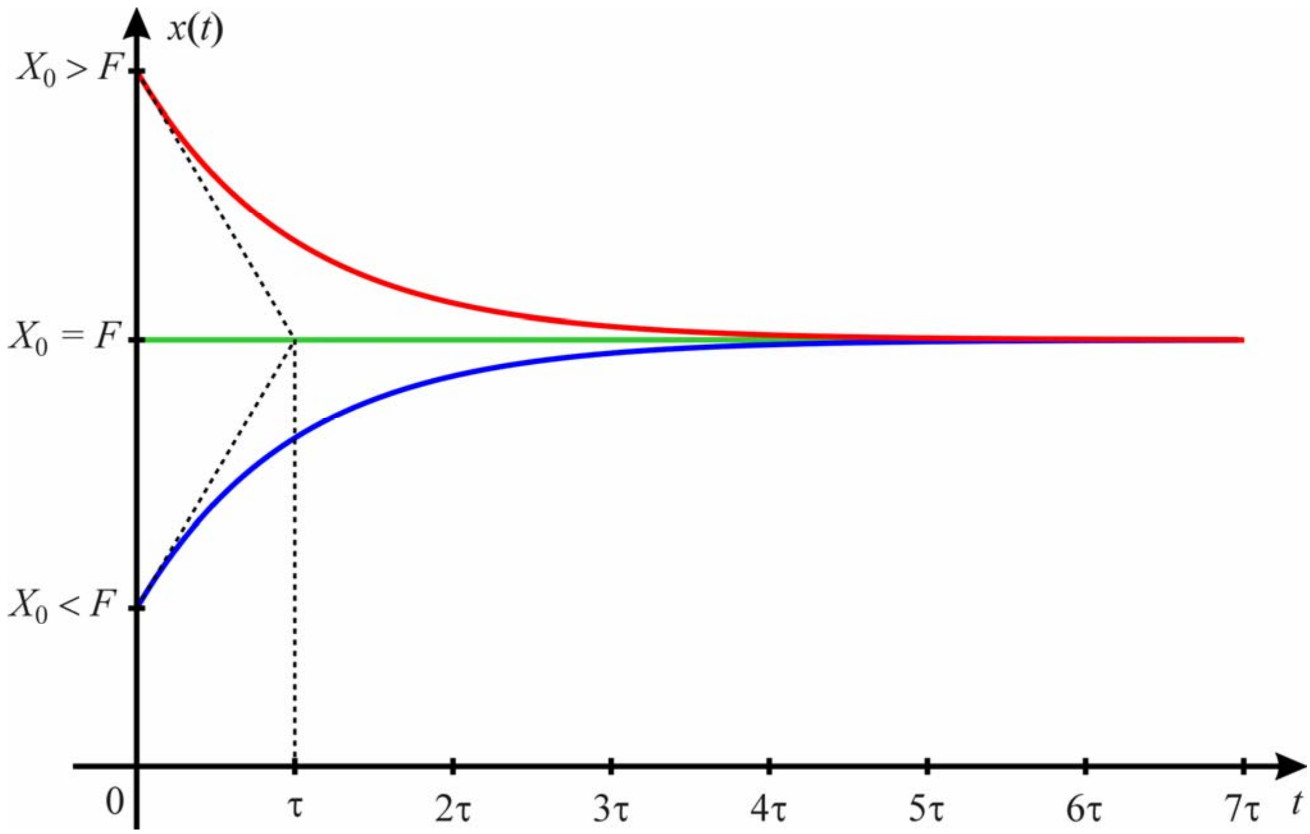
- Se l'ingresso è sinusoidale si ottiene

$$x(t) = \left(X_0 - \frac{F_M \cos\xi}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{F_M}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \cos(\omega t + \xi)$$

dove

$$\xi = \varphi - \operatorname{arctg}(\omega\tau)$$

Risposta con ingresso costante



Costante di tempo

- La costante di tempo è un indice della velocità con cui la componente transitoria della risposta tende a zero
- In un tempo pari alla costante di tempo la componente transitoria si riduce al 37% circa del suo valore iniziale
- In un tempo pari a 5τ si riduce a meno dell'1% del valore iniziale
- In un tempo pari a 7τ si riduce a meno dello 0.1% del valore iniziale

➡ In pratica si può assumere che componente transitoria si annulli in un tempo dell'ordine di 5-7 volte la costante di tempo

t	$e^{-t/\tau}$
0	1.0000
τ	0.3679
2τ	0.1353
3τ	0.0498
4τ	0.0183
5τ	0.0067
6τ	0.0025
7τ	0.0009

Costante di tempo

- La retta tangente nel punto iniziale alla curva che rappresenta la risposta raggiunge il valore asintotico F per $t = \tau$
- Dato che

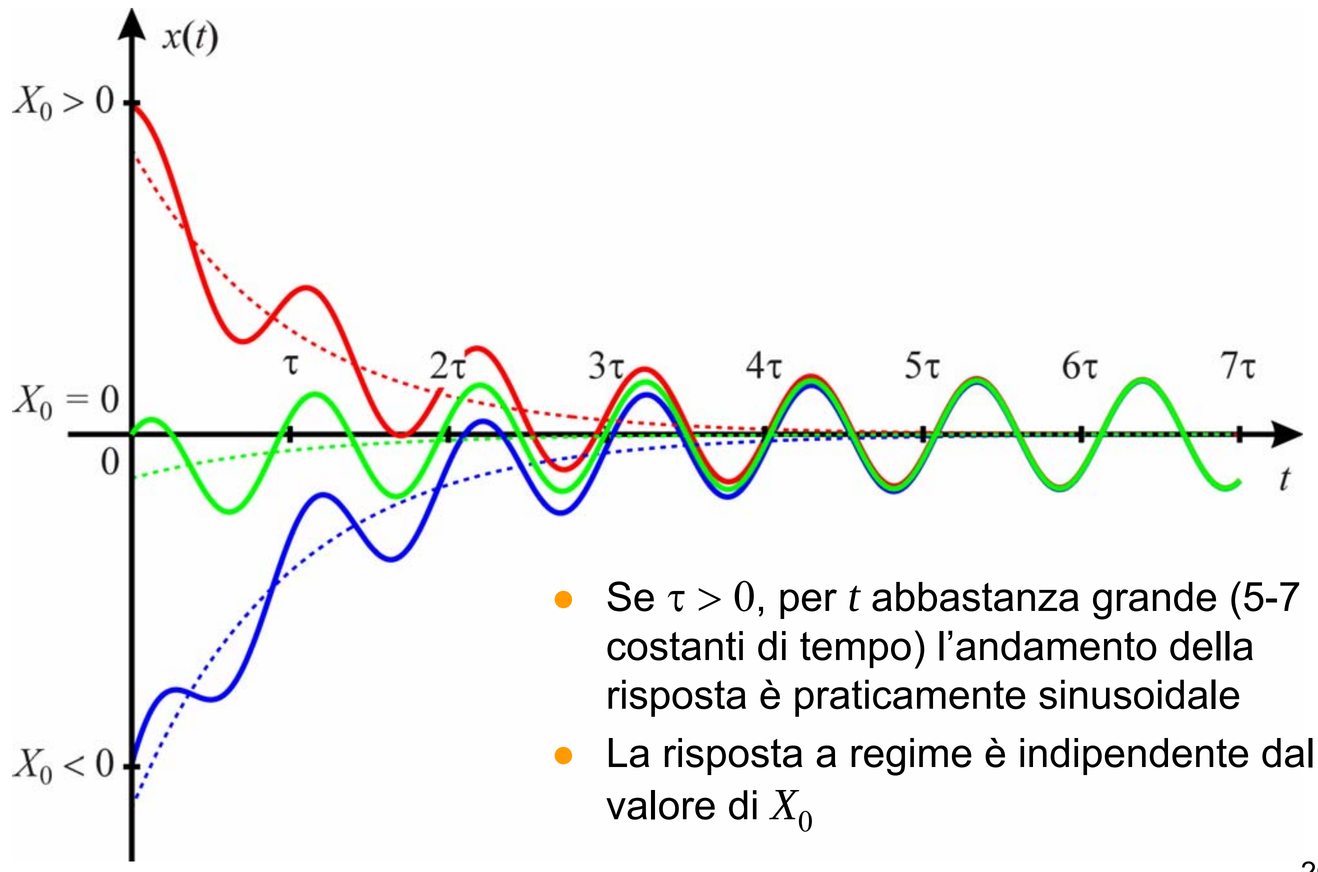
$$x(t) = (X_0 - F)\, e^{-\frac{t}{\tau}} + F$$

- L'equazione della retta tangente nel punto $(0, X_0)$ è

$$x_R(t) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} \cdot t + X_0 = -\frac{(X_0 - F)}{t} + X_0$$

➡ Quindi si ha $x_R(t) = F$ per $t = \tau$

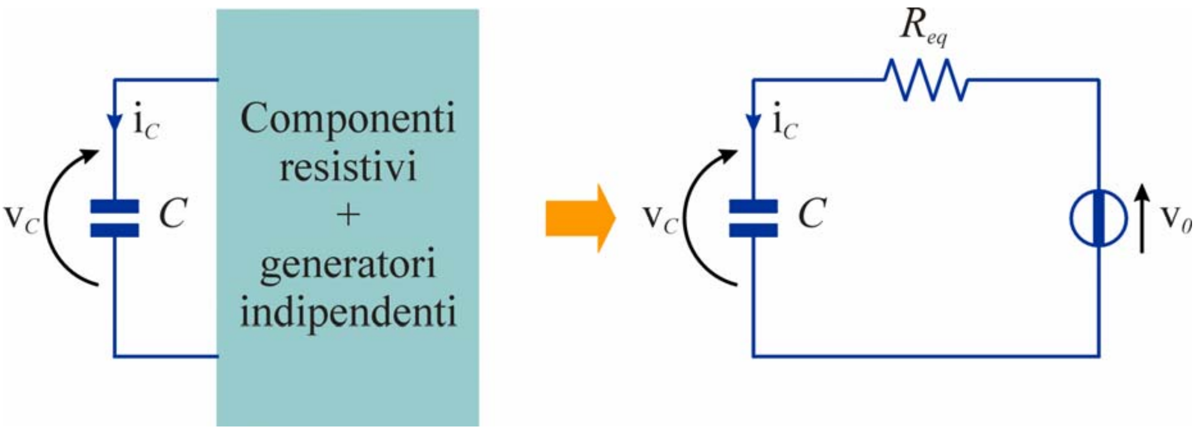
Risposta con ingresso sinusoidale



- Se $\tau > 0$, per t abbastanza grande (5-7 costanti di tempo) l'andamento della risposta è praticamente sinusoidale
- La risposta a regime è indipendente dal valore di X_0

Circuiti con un solo condensatore

- Normalmente un circuito formato da un condensatore e da componenti resistivi può essere ricondotto a un circuito RC elementare mediante il teorema di Thévenin



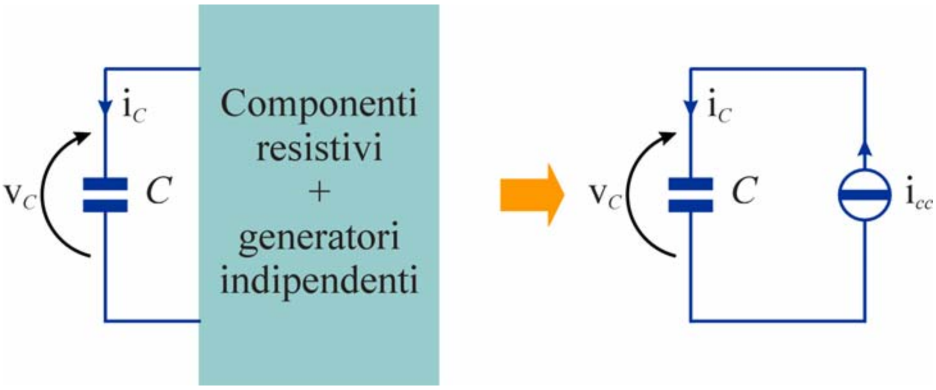
- Quindi l'espressione della tensione del condensatore per $t > 0$ è

$$v_C(t) = [V_{C0} - v_P(0)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v_P(t) \qquad \tau = R_{eq}C$$

Circuiti con un solo condensatore

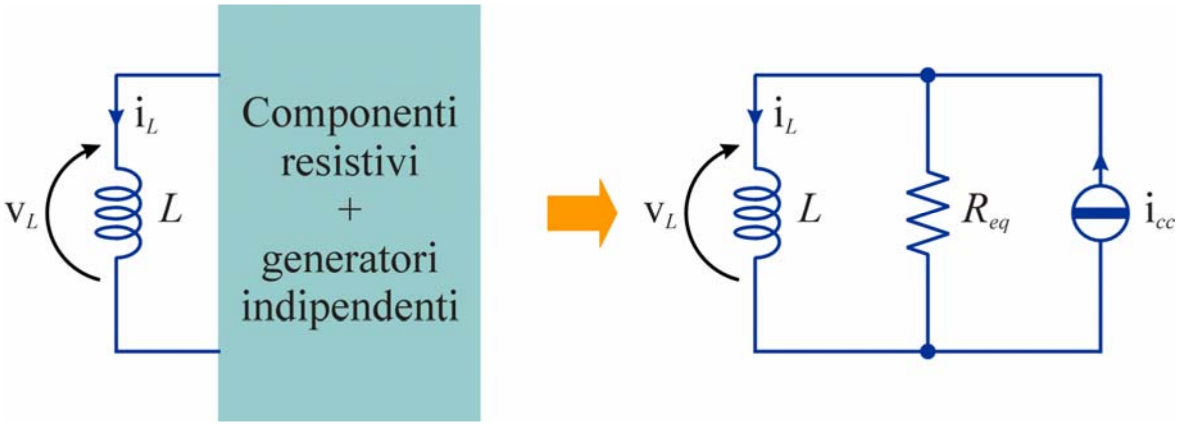
- Fa eccezione il caso particolare in cui il bipolo resistivo equivale a un generatore di corrente, e quindi non ammette la rappresentazione equivalente di Thévenin (ma solo quella di Norton con $G_{eq} = 0$)
- In questo caso la tensione del condensatore si può ottenere direttamente integrando la corrente del generatore

$$\begin{cases} C\dfrac{dv_C}{dt} = i_{cc}(t) \\ v_C(0) = V_{C0} \end{cases} \Rightarrow \quad v_C(t) = V_{C0} + \frac{1}{C}\int_0^t i_{cc}(x)dx$$



Circuiti con un solo induttore

- Normalmente un circuito formato da un induttore e da componenti resistivi può essere ricondotto a un circuito RL elementare mediante il teorema di Norton



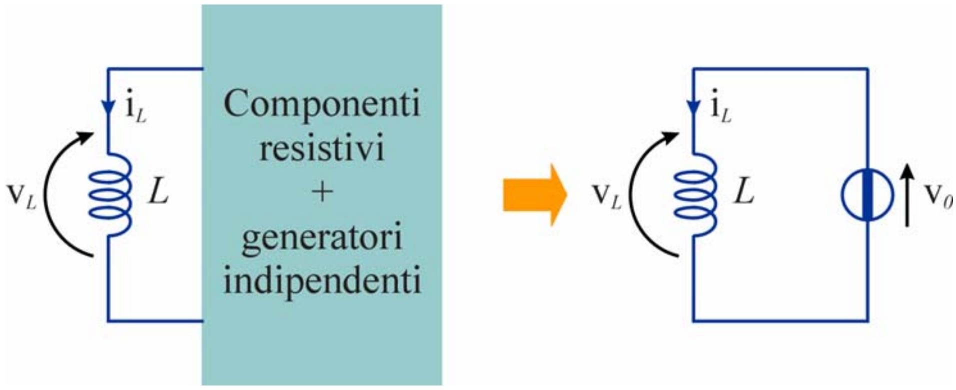
- Quindi l'espressione della corrente dell'induttore per $t > 0$ è

$$i_L(t) = \left[I_{L0} - i_P(0)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} + i_P(t) \qquad \tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

Circuiti con un solo induttore

- Fa eccezione il caso particolare in cui il bipolo resistivo equivale a un generatore di tensione, e quindi non ammette la rappresentazione equivalente di Norton (ma solo quella di Thévenin con $R_{eq} = 0$)
- In questo caso la corrente dell'induttore condensatore si può ottenere direttamente integrando la tensione del generatore

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = v_0(t) \\ i_L(0) = I_{L0} \end{cases} \Rightarrow \quad i_L(t) = I_{L0} + \frac{1}{L}\int_0^t v_0(x)dx$$



Espressioni delle altre risposte

- **Circuito RC**: essendo nota $v_C(t)$ si può sostituire il condensatore con un generatore di tensione
- **Circuito RL**: essendo nota $i_L(t)$ si può sostituire l'induttore con un generatore di corrente
- ⇒ Le altre tensioni e correnti possono essere determinate risolvendo un circuito resistivo
- Dato che il circuito è lineare, ogni risposta può essere scomposta in un termine proporzionale a $v_C(t)$ o $i_L(t)$ e in un termine proporzionale alle grandezze impresse dei generatori indipendenti
- Ogni risposta del circuito ha un'espressione (per $t > 0$) del tipo

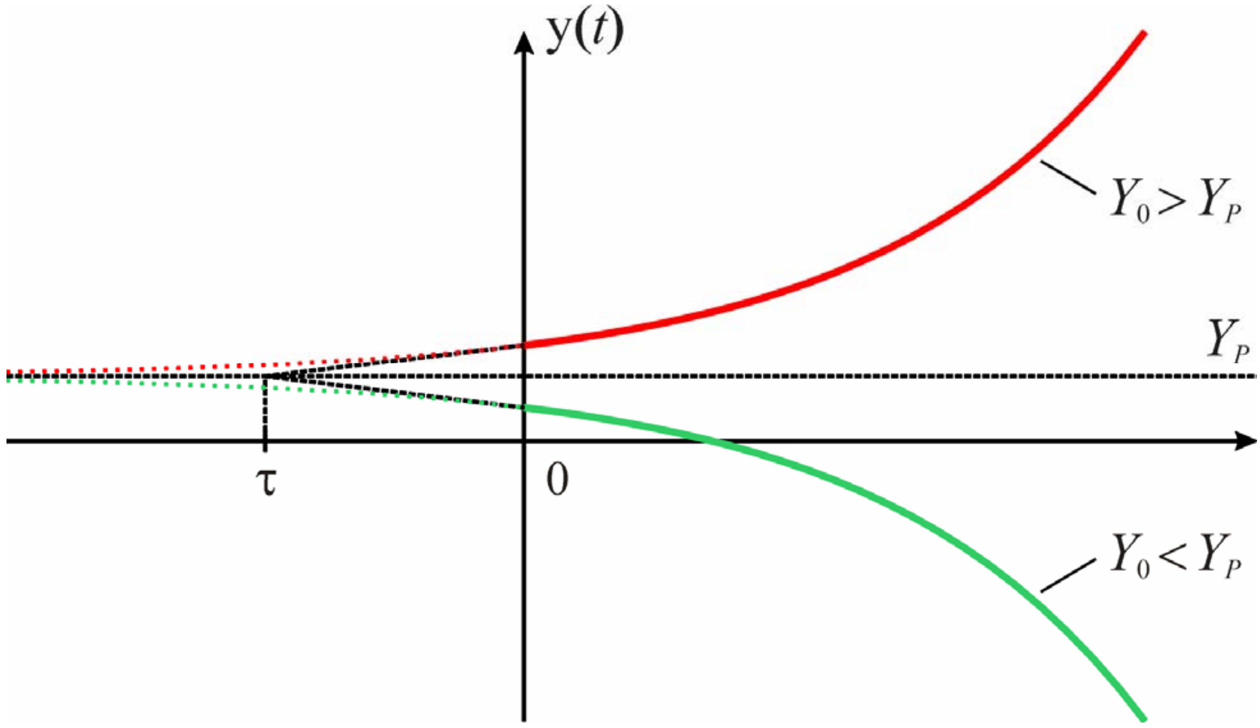
$$\boxed{y(t) = \left[Y_0 - y_P(0)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + y_P(t)}$$

con la stessa costante di tempo τ

Stabilità

- Se $\tau > 0$ il termine esponenziale tende a zero per $t \to \infty$
  - Il circuito è **asintoticamente stabile**
  - Per $t \to \infty$ tende ad una condizione di regime dipendente solo dagli ingressi
  - Questa situazione si verifica se i parametri R, L e C sono positivi (⇒ componenti passivi)
- Se $\tau < 0$ il termine esponenziale diverge per $t \to \infty$
  - Il circuito è **instabile**
  - Questa condizione si verifica, ad esempio, se $R < 0$, come può accadere se R rappresenta la resistenza equivalente di un bipolo che contiene generatori dipendenti

Esempio - risposta con ingressi costanti per $\tau < 0$

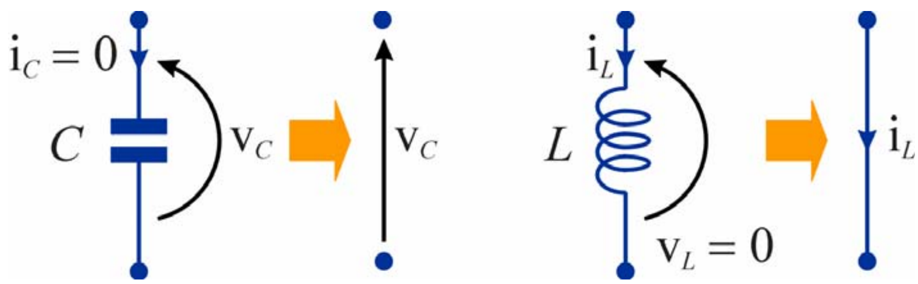


Regime stazionario

- Per $t \to \infty$, un circuito asintoticamente stabile con ingressi costanti tende ad una condizione di regime in cui le tensioni e le correnti di tutti i componenti sono costanti nel tempo (**regime stazionario**)
- In condizioni di regime stazionario, dalle relazioni costitutive del condensatore e dell'induttore, si ottiene

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = 0$$



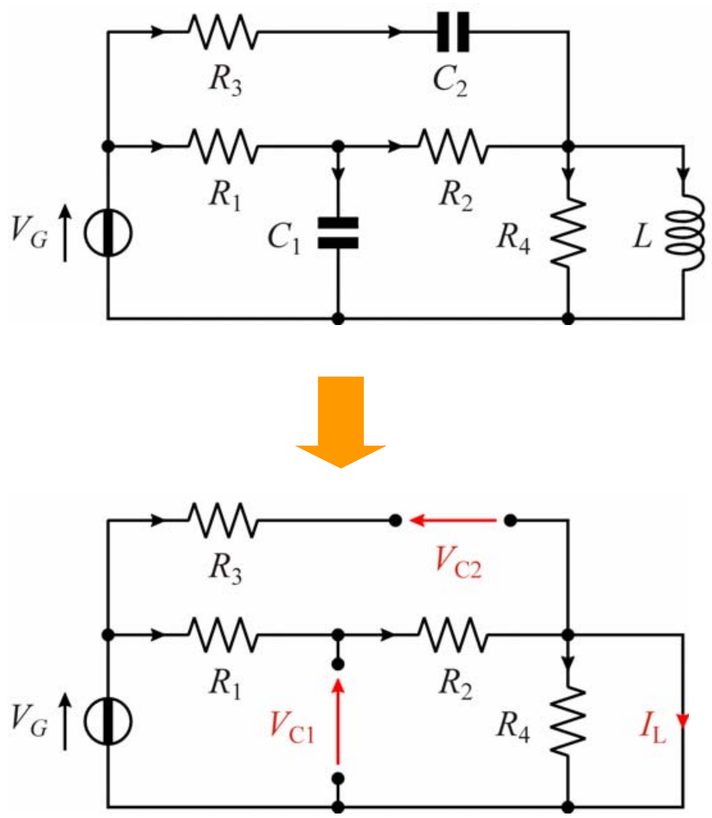
➡ i condensatori si comportano come circuiti aperti
➡ gli induttori si comportano come cortocircuiti

Regime stazionario

- La risposta a regime in condizioni stazionarie può essere ottenuta direttamente, senza utilizzare le equazioni differenziali, analizzando il circuito resistivo che si ottiene sostituendo i condensatori con circuiti aperti e gli induttori con cortocircuiti (➡ **analisi in continua**)
- In particolare si può notare che
  - in un circuito RC, la tensione a regime del condensatore coincide con la tensione a vuoto della sottorete resistiva (quindi con la tensione del generatore equivalente di Thévenin)
  - in un circuito RL, la corrente a regime dell'induttore coincide con la corrente di cortocircuito della sottorete resistiva (quindi con la corrente del generatore equivalente di Norton)

Analisi in continua - Esempio

- V_G = costante
- Determinare i valori a regime delle tensioni e delle correnti



- **Risoluzione**:

$$I_{R3} = I_{C2} = 0\text{ A} \quad \Rightarrow \quad V_{R3} = 0\text{ V}$$

$$V_{R4} = V_L = 0\text{ V} \quad \Rightarrow \quad I_{R4} = 0\text{ A}$$

$$I_{R1} = I_{R2} = I_L = \frac{V_G}{R_1 + R_2}$$

$$V_{R1} = R_1 I_{R1} = \frac{V_G R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_{C1} = V_{R2} = R_2 I_{R2} = \frac{V_G R_2}{R_1 + R_2}$$

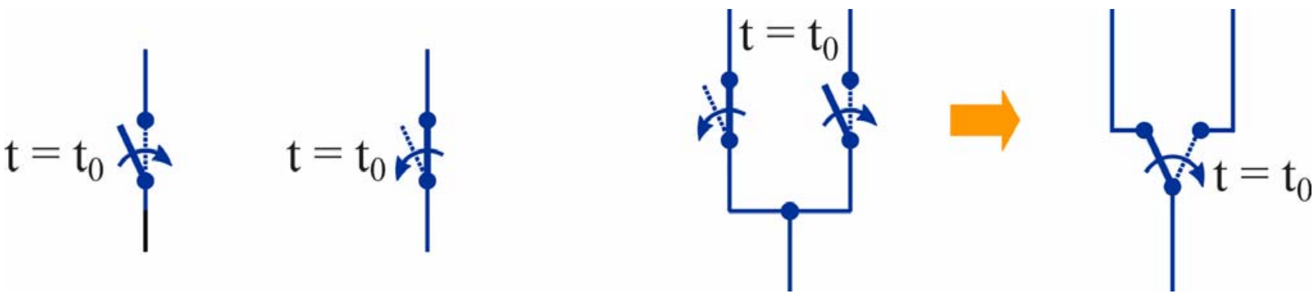
$$V_{C2} = V_G$$

Regime sinusoidale

- Per $t \to \infty$, un circuito asintoticamente stabile con ingressi sinusoidali isofrequenziali di pulsazione ω tende ad una condizione di regime in cui le tensioni e le correnti di tutti i componenti sono sinusoidali con la stessa pulsazione ω (**regime sinusoidale**)
- La risposta a regime sinusoidale di un circuito può essere ottenuta direttamente, senza utilizzare le equazioni differenziali, mediante il metodo simbolico basato sulla trasformata di Steinmetz

Condizioni iniziali

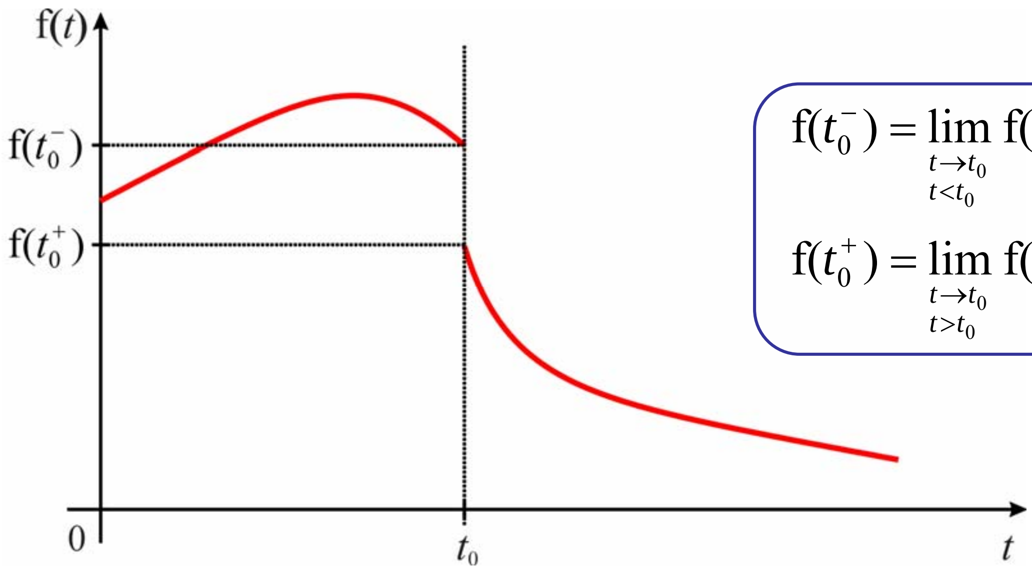
- In genere le condizioni iniziali non sono direttamente disponibili, ma devono essere determinate a partire da informazioni di tipo diverso
- Spesso è noto il comportamento del circuito prima di un istante iniziale t_0 in corrispondenza del quale si ha una perturbazione dovuta alla commutazione di uno o più interruttori o a discontinuità delle grandezze impresse dei generatori



Interruttori

Discontinuità

- All'istante t_0 alcune tensioni o correnti nel circuito possono presentare una **discontinuità di prima specie** (cioè un "salto")
  - ➡ il loro valore per $t = t_0$ non è definito
- In questo caso si definiscono i valori relativi agli istanti t_0^- e t_0^+



$$f(t_0^-) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t)$$

$$f(t_0^+) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t)$$

Dati iniziali e condizioni iniziali

- Spesso, nello studio dei circuiti dinamici in condizioni transitorie è noto il comportamento del circuito per $t < t_0$
  - ➡ sono noti i valori delle tensioni e delle correnti all'istante t_0^- (**dati iniziali**)
- Per determinare la risposta per $t > t_0$ occorrono i valori delle funzioni incognite e (delle loro derivate, per i circuiti di ordine superiore al primo) all'istante t_0^+ (**condizioni iniziali**)
- All'istante t_0 le tensioni e le correnti (e le loro derivate) possono essere discontinue
  - ➡ i valori a t_0^+ in genere non coincidono con quelli a t_0^-

➡ Occorre determinare la relazione tra i dati iniziali e le condizioni iniziali

Continuità delle variabili di stato

- **Proprietà di continuità**
  - Se la corrente di un condensatore è limitata, la tensione è una funzione continua del tempo
  - Se la tensione di un induttore è limitata, la corrente è una funzione continua del tempo
- Per un circuito non degenere si può dimostrare che, se le grandezze impresse dei generatori sono limitate, anche le tensioni e le correnti di tutti i lati sono limitate (tensioni o correnti non limitate sono incompatibili con le equazioni del circuito)

➡ *Se gli ingressi sono limitati, le variabili di stato di un circuito non degenere sono continue*

  ➡ i loro valori all'istante t_0^+ coincidono con quelli a t_0^-

  ➡ sono definiti i valori delle variabili di stato per $t = t_0$

Determinazione delle condizioni iniziali

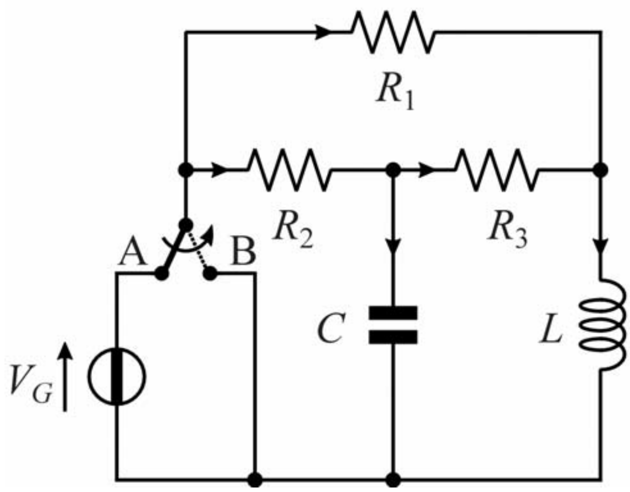
Calcolo dei valori a t_0^+ delle tensioni e correnti

- Studiando il circuito per $t = t_0^-$ si determinano i valori per $t = t_0$ delle variabili di stato
- All'istante t_0^+, essendo note le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori, si possono sostituire
  - i condensatori con generatori di tensione
  - gli induttori con generatori di corrente
- In questo modo si ottiene un circuito resistivo, studiando il quale si possono determinare i valori all'istante t_0^+ delle altre tensioni e correnti

Determinazione delle condizioni iniziali - Esempio

- Per $t < 0$ il circuito rappresentato in figura è in condizioni di regime
- All'istante $t = 0$ l'interruttore passa dalla posizione A alla posizione B
- Si vogliono determinare i valori negli istanti 0^- e 0^+ di:
  $i_{R1}(t), i_{R2}(t), i_{R3}(t), i_L(t), v_L(t), i_C(t), v_C(t)$

$$R_1 = 4\,\Omega$$
$$R_2 = 2\,\Omega$$
$$R_3 = 2\,\Omega$$
$$C = 0.5\,\mathrm{F}$$
$$L = 0.5\,\mathrm{H}$$
$$V_G = 12\,\mathrm{V}$$



Determinazione delle condizioni iniziali - Esempio

- **Determinazione dei valori all'istante $t = 0^-$**
  - Il circuito è in condizioni di regime stazionario
  - ➡ Si esegue un'analisi in continua

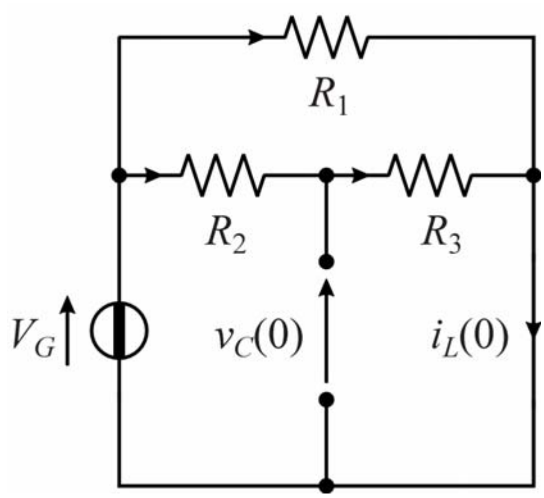
$$\boxed{i_C(0^-) = 0\,\mathrm{A} \quad v_L(0^-) = 0\,\mathrm{V}}$$

$$i_{R1}(0^-) = \frac{V_G}{R_1} = 3\,\mathrm{A}$$

$$i_{R2}(0^-) = i_{R3}(0^-) = \frac{V_G}{R_2 + R_3} = 3\,\mathrm{A}$$

$$i_L(0) = i_{R1}(0^-) + i_{R3}(0^-) = 6\,\mathrm{A}$$

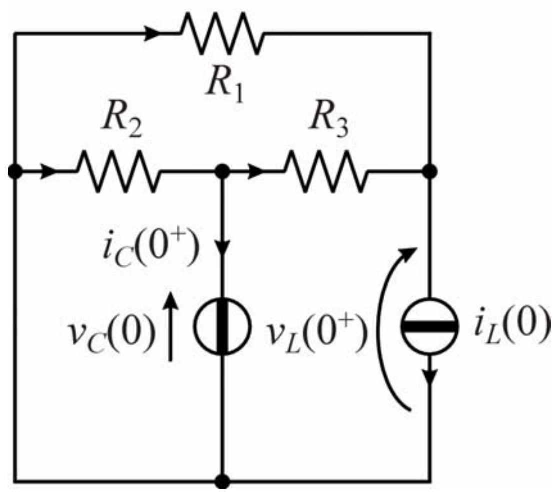
$$v_C(0) = \frac{V_G R_3}{R_2 + R_3} = 6\,\mathrm{V}$$



Determinazione delle condizioni iniziali - Esempio

- **Determinazione dei valori all'istante $t = 0^+$**

$$\boxed{v_C(0) = 6\ \text{V} \quad i_L(0) = 6\ \text{A}}$$



$$i_{R1}(0^+) = -\frac{v_C(0)}{R_1 + R_3} + \frac{i_L(0)R_3}{R_1 + R_3} = 1\ \text{A}$$

$$i_{R2}(0^+) = -\frac{v_C(0)}{R_2} = -3\ \text{A}$$

$$i_{R3}(0^+) = \frac{v_C(0)}{R_1 + R_3} + \frac{i_L(0)R_1}{R_1 + R_3} = 5\ \text{A}$$

$$i_C(0^+) = -\frac{v_C(0)(R_1 + R_2 + R_3)}{R_2(R_1 + R_3)} - \frac{i_L(0)R_1}{R_1 + R_3} = -8\ \text{A}$$

$$v_L(0^+) = -R_1 i_{R1}(0^+) = -4\ \text{V}$$

Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (1)

- La risposta di un circuito del primo ordine a partire da un istante iniziale $t_0 = 0$

$$y(t) = [Y_0 - y_P(0)]e^{-\frac{t}{\tau}} + y_P(t)$$

  è determinata da tre informazioni
  - il valore all'istante $t = 0^+$: Y_0
  - la costante di tempo: τ
  - la soluzione particolare: $y_P(t)$

- In molti casi di interesse pratico (es. circuiti con ingressi costanti o ingressi sinusoidali) queste informazioni possono essere ricavate direttamente, quindi la risposta può essere ottenuta senza fare uso delle equazioni differenziali

Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (2)

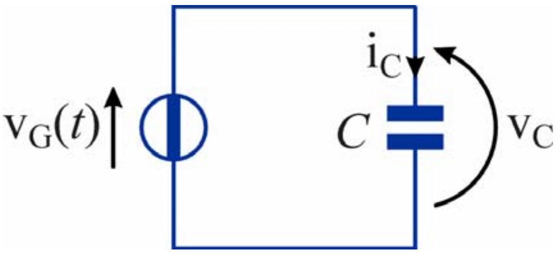
- **Determinazione di Y_0**
  - Mediante un'analisi per $t < 0$ si determina il valore iniziale della variabile di stato ($v_C(0)$ o $i_L(0)$)
  - Se la risposta $y(t)$ che si vuole determinare non coincide con la variabile di stato, si calcola $Y_0 = y(0^+)$ analizzando il circuito resistivo ottenuto sostituendo
    - il condensatore con un generatore di tensione $v_C(0)$
    - l'induttore con un generatore di corrente $i_L(0)$
- **Determinazione di τ**
  - Si calcola la resistenza equivalente della parte resistiva del circuito con i generatori indipendenti azzerati, quindi si pone
    - $\tau = R_{eq}C$ per i circuiti RC
    - $\tau = L/R_{eq}$ per i circuiti RL

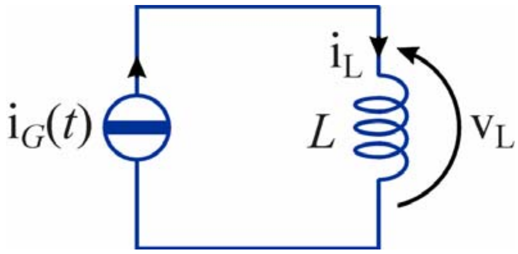
Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (3)

- **Determinazione della soluzione particolare**
  - **Ingressi costanti**
    - Si esegue un'analisi in continua del circuito (nella configurazione per $t > 0$, cioè con gli eventuali interruttori nella posizione successiva alla commutazione che avviene all'istante iniziale)
    - Nell'analisi in continua
      - il condensatore è sostituito da un circuito aperto
      - l'induttore è sostituito da un cortocircuito
  - **Ingressi sinusoidali**
    - Si analizza il circuito (nella configurazione per $t > 0$) con il metodo simbolico

Circuiti degeneri

- Si considerano i casi limite in cui
  - $R = 0$ nel circuito RC elementare
  - $G = 1/R = 0$ nel circuito RL elementare



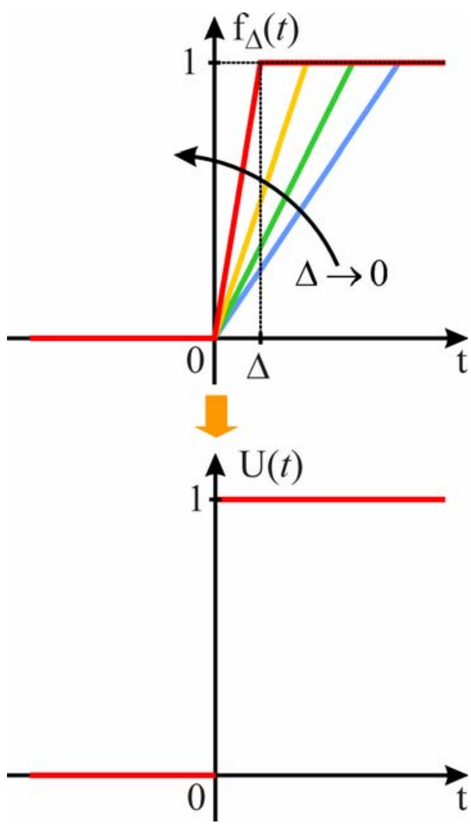


- In queste condizioni i circuiti sono degeneri e la variabile di stato (v_C o i_L) coincide con l'ingresso (v_G o i_G), quindi il circuito non ha variabili di stato indipendenti (ordine 0)

Gradino unitario

- Si considera il caso in cui l'ingresso è una funzione del tipo

$$f_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \dfrac{t}{\Delta} & \text{per } 0 < t < \Delta \\ 1 & \text{per } t > \Delta \end{cases}$$



- Per $\Delta \to 0$, la funzione $f_\Delta(t)$ tende alla funzione **gradino unitario** $U(t)$

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Impulso di Dirac

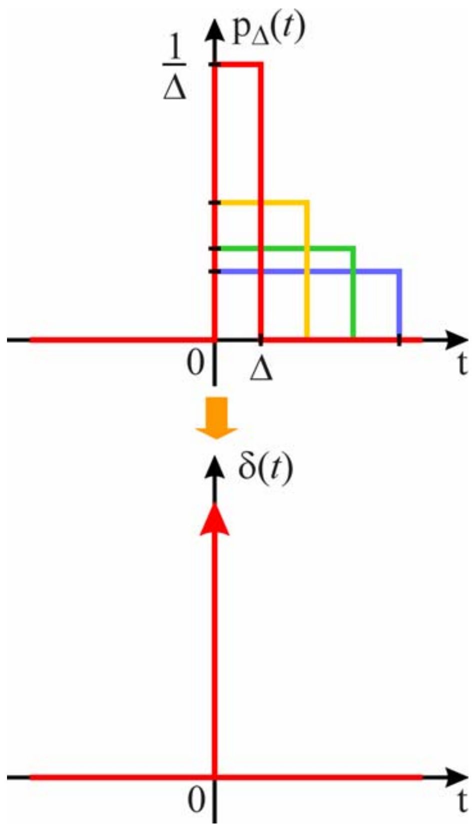
- La corrente nel condensatore e la tensione dell'induttore sono

$$i_C(t) = C\frac{d\,\mathrm{f}_\Delta(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L\frac{d\,\mathrm{f}_\Delta(t)}{dt}$$

- La derivata dell'ingresso è rappresentata da un impulso rettangolare di durata Δ e ampiezza $1/\Delta$ (e quindi area unitaria)

$$\frac{d\,\mathrm{f}_\Delta}{dt} = \mathrm{p}_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \dfrac{1}{\Delta} & \text{per } 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{per } t > \Delta \end{cases}$$



Impulso di Dirac

- Intuitivamente, il limite per $\Delta \to 0$ di $\mathrm{p}_\Delta(t)$ è un impulso di area unitaria avente durata nulla e ampiezza infinita
- Il limite è rappresentato dall'**impulso di Dirac**, $\delta(t)$, caratterizzato dalle seguenti proprietà

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \neq 0 \\ \text{singolare} & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$ (➡ "area" unitaria)

- Queste proprietà non possono essere soddisfatte da una funzione ordinaria (per una funzione ordinaria la prima proprietà implica che l'integrale su un qualunque intervallo sia nullo)
- $\delta(t)$ non è una funzione ordinaria ma è una **distribuzione** (o **funzione generalizzata**)

Impulso di Dirac

- L'integrale dell'impulso di Dirac è il gradino unitario

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)d\xi = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)d\xi = U(t)$$

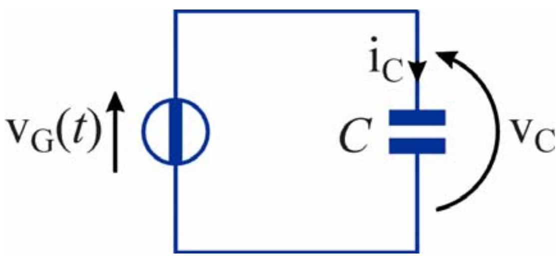
- Quindi, formalmente, si può porre

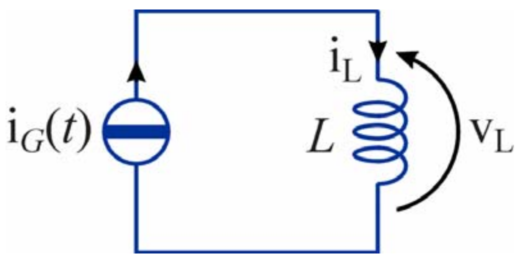
$$\frac{dU}{dt} = \delta(t)$$

➡ L'impulso di Dirac è la **derivata generalizzata** del gradino unitario
(non si può parlare semplicemente di derivata, perché $U(t)$ non è derivabile in senso ordinario, essendo discontinua)

Impulsi di corrente e di tensione

- In un condensatore a una discontinuità della tensione corrisponde un impulso di corrente (➡ corrente non limitata)
- In un induttore a una discontinuità della corrente corrisponde un impulso di tensione (➡ tensione non limitata)



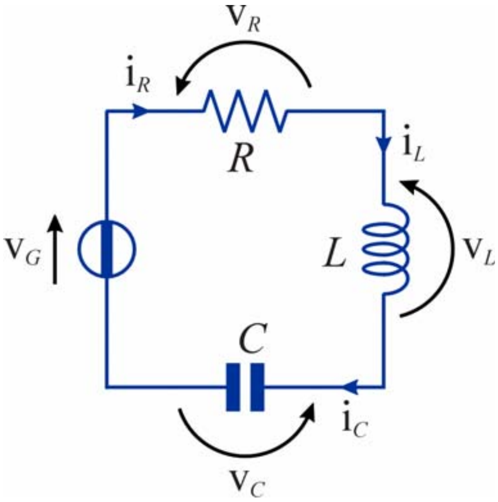


$$v_G(t) = U(t)$$
$$v_C(t) = v_G(t) = U(t)$$
$$i_C(t) = C\frac{d\,v_C}{dt} = C\delta(t)$$

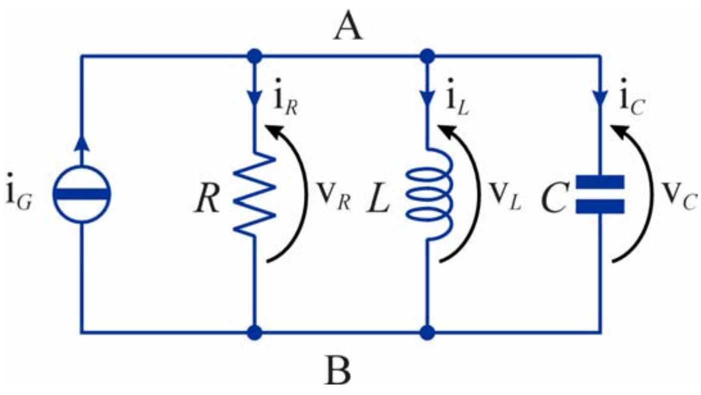
$$i_G(t) = U(t)$$
$$i_L(t) = i_G(t) = U(t)$$
$$v_L(t) = L\frac{d\,i_L}{dt} = L\delta(t)$$

Circuiti elementari del secondo ordine

Circuito RLC serie



Circuito RLC parallelo



- **Circuiti del secondo ordine**: circuiti contenenti due bipoli dinamici
  - ➡ La determinazione della risposta richiede la risoluzione di un’equazione differenziale del secondo ordine

Circuito RLC serie

- **LKI**: $\mathrm{i}_C(t) = \mathrm{i}_L(t) = \mathrm{i}_R(t)$
- **LKV**: $\mathrm{v}_R(t) + \mathrm{v}_L(t) + \mathrm{v}_C(t) = \mathrm{v}_G(t)$
- **Componenti**:

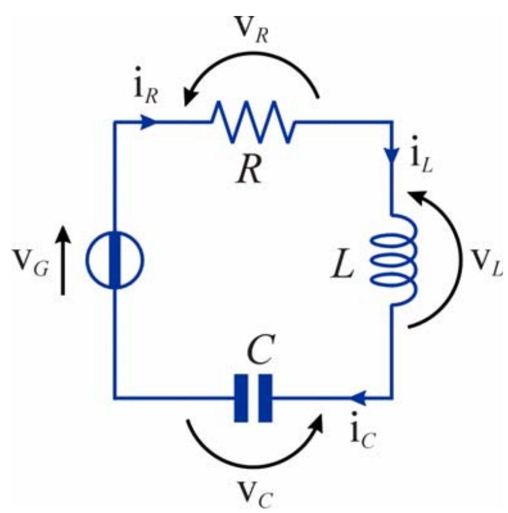
$$\mathrm{i}_C(t) = C\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt}$$

$$\mathrm{v}_R(t) = R\,\mathrm{i}_R(t) = RC\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt}$$

$$\mathrm{v}_L(t) = L\frac{d\,\mathrm{i}_L}{dt} = LC\frac{d^2\,\mathrm{v}_C}{dt^2}$$

⬇

$$LC\frac{d^2\,\mathrm{v}_C}{dt^2} + RC\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt} + \mathrm{v}_C(t) = \mathrm{v}_G(t)$$



Circuito RLC serie

- All'equazione si devono associare le condizioni iniziali relative al valore all'istante $t = 0$ della tensione v_C e della sua derivata
- Quest'ultima condizione può essere ottenuta a partire dai valori iniziali delle variabili di stato

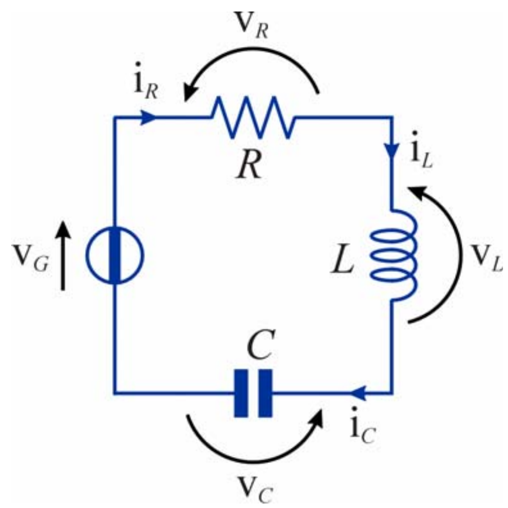
$$\mathrm{v}_C(0) = V_{C0}$$

$$\mathrm{i}_L(0) = I_{L0}$$

infatti si ha

$$\mathrm{i}_C(t) = C\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt}$$

$$\mathrm{i}_C(t) = \mathrm{i}_L(t)$$



$$\Rightarrow \left.\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{C}\mathrm{i}_C(0) = \frac{1}{C}\mathrm{i}_L(0) = \frac{I_{L0}}{C}$$

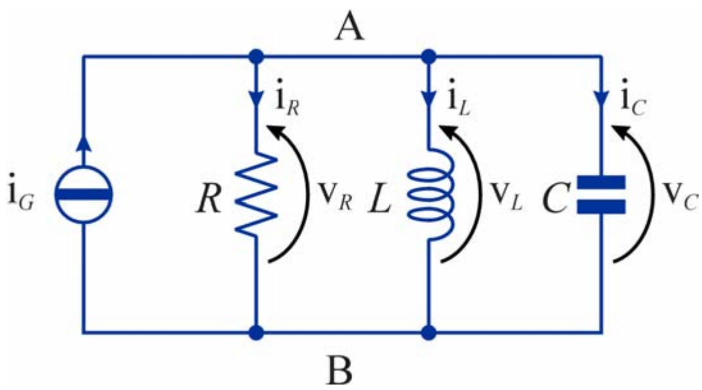
Circuito RLC parallelo

- **LKI**: $\mathrm{i}_R(t) + \mathrm{i}_L(t) + \mathrm{i}_C(t) = \mathrm{i}_G(t)$
- **LKV**: $\mathrm{v}_C(t) = \mathrm{v}_L(t) = \mathrm{v}_R(t)$
- **Componenti**:

$$\mathrm{v}_L(t) = L\frac{d\,\mathrm{i}_L}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{\mathrm{v}_R(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{d\,\mathrm{i}_L}{dt}$$

$$\mathrm{i}_C(t) = C\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt} = LC\frac{d^2\,\mathrm{i}_L}{dt^2}$$



$$\Downarrow$$

$$LC\frac{d^2\,\mathrm{i}_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{d\,\mathrm{i}_L}{dt} + \mathrm{i}_L(t) = \mathrm{i}_G(t)$$

Circuito RLC parallelo

- All'equazione si devono associare le condizioni iniziali relative al valore all'istante $t = 0$ della corrente i_L e della sua derivata
- Quest'ultima condizione può essere ottenuta a partire dai valori iniziali delle variabili di stato

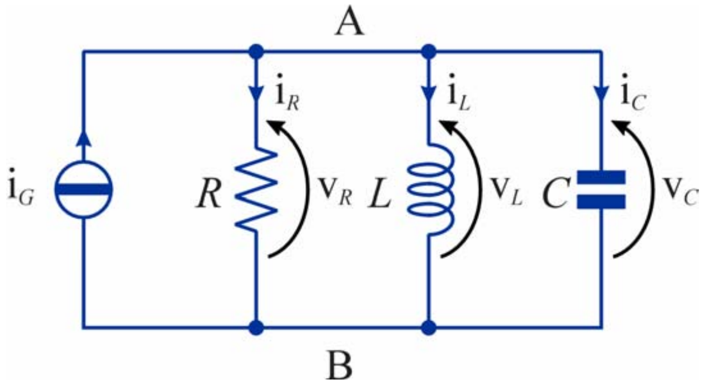
$$v_C(0) = V_{C0}$$

$$i_L(0) = I_{L0}$$

infatti si ha

$$v_L(t) = L\frac{d\,i_L}{dt}$$

$$v_L(t) = v_C(t)$$



$$\Rightarrow \left.\frac{d\,i_L}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{L}v_L(0) = \frac{1}{L}v_C(0) = \frac{V_{C0}}{L}$$

Circuiti del secondo ordine

- I circuiti del 2° ordine sono descritti da equazioni differenziali del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha\dfrac{d\,y}{dt} + \omega_0^2\,y(t) = f(t) \\ y(0^+) = Y_0 \\ \left.\dfrac{d\,y}{dt}\right|_{t=0} = Y_0' \end{cases}$$

- $\alpha =$ **coefficiente di smorzamento**
  - circuito RLC serie ⇒ $\alpha = \dfrac{R}{2L}$
  - circuito RLC parallelo ⇒ $\alpha = \dfrac{1}{2RC}$
- $\omega_0 =$ **pulsazione naturale**
  - circuito RLC serie e parallelo ⇒ $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

$$R > 0, L > 0, C > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha > 0, \omega_0^2 > 0$$

Risposta di un circuito del secondo ordine

- Integrale generale dell'equazione differenziale
  $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$
  - $y_H(t)$ = integrale generale dell'equazione omogenea associata
  - $y_P(t)$ = soluzione particolare dell'equazione differenziale
- Per determinare $y_H(t)$ si risolve l'equazione caratteristica
  $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$
- Si distinguono tre casi caratterizzati da valore positivo, nullo o negativo del discriminante $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$
  - **caso sovrasmorzato**: $\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > \omega_0^2$
  - **caso con smorzamento critico**: $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \omega_0^2$
  - **caso sottosmorzato**: $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < \omega_0^2$

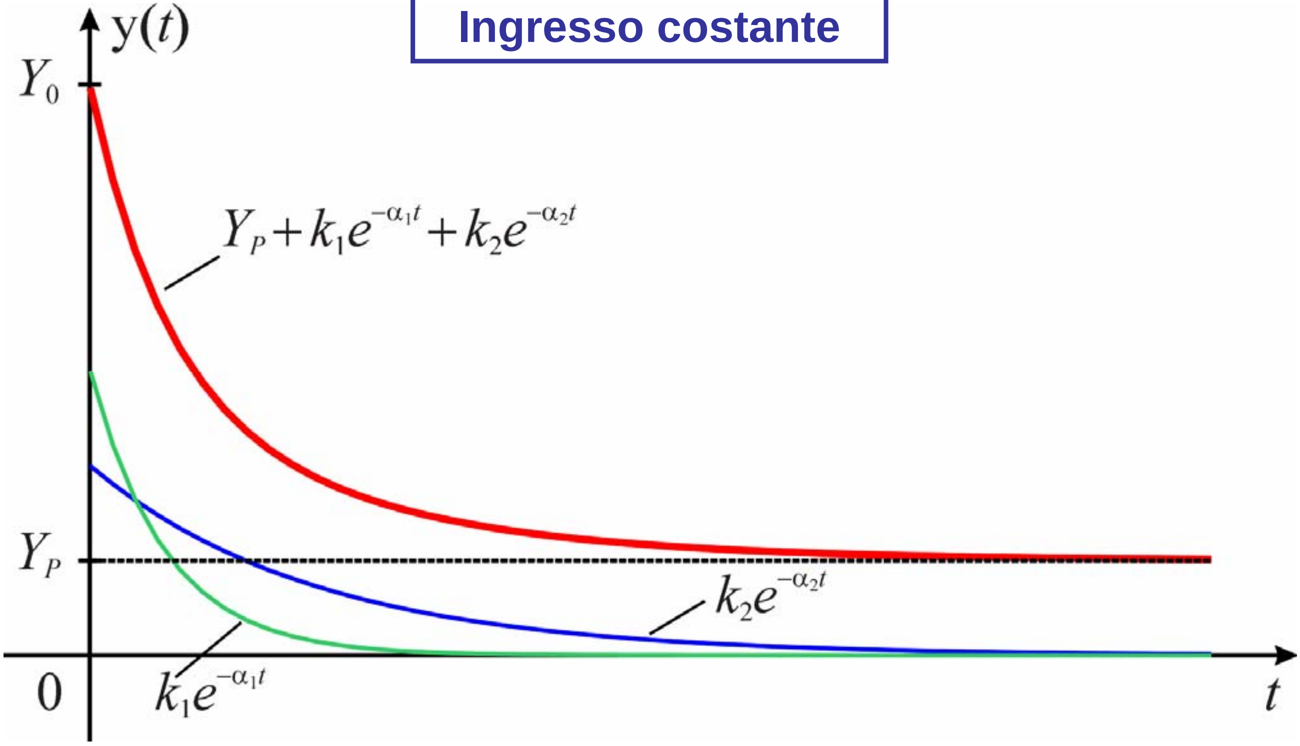
Caso sovrasmorzato

$$\boxed{\alpha^2 > \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta > 0}$$

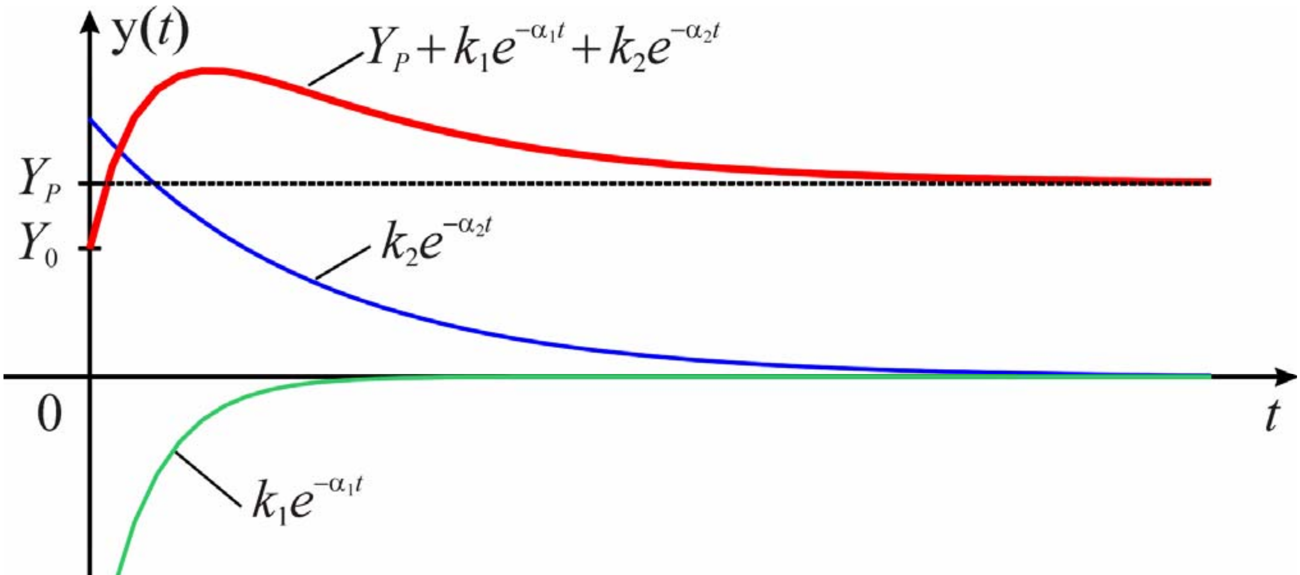
- L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte
  $$\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \alpha_d = \left\langle \begin{array}{l} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{array} \right.$$
  - Se $\alpha > 0, \omega_0^2 > 0$, dato che $\alpha_d < \alpha$, risulta $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
  - ➡ Il circuito è asintoticamente stabile
- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:
  $y_H(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 e^{-\alpha_2 t}$
- Espressione della risposta:
  $y(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 e^{-\alpha_2 t} + y_p(t)$
  - k_1 e k_2 si determinano imponendo le condizioni iniziali

Risposta di un circuito del secondo ordine

Caso sovrasmorzato
Ingresso costante



Risposta di un circuito del secondo ordine



Caso sovrasmorzato
Ingresso costante

Smorzamento critico

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta = 0$$

- L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali coincidenti

  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$

  - Anche in questo caso se $\alpha > 0$, le soluzioni sono negative

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:

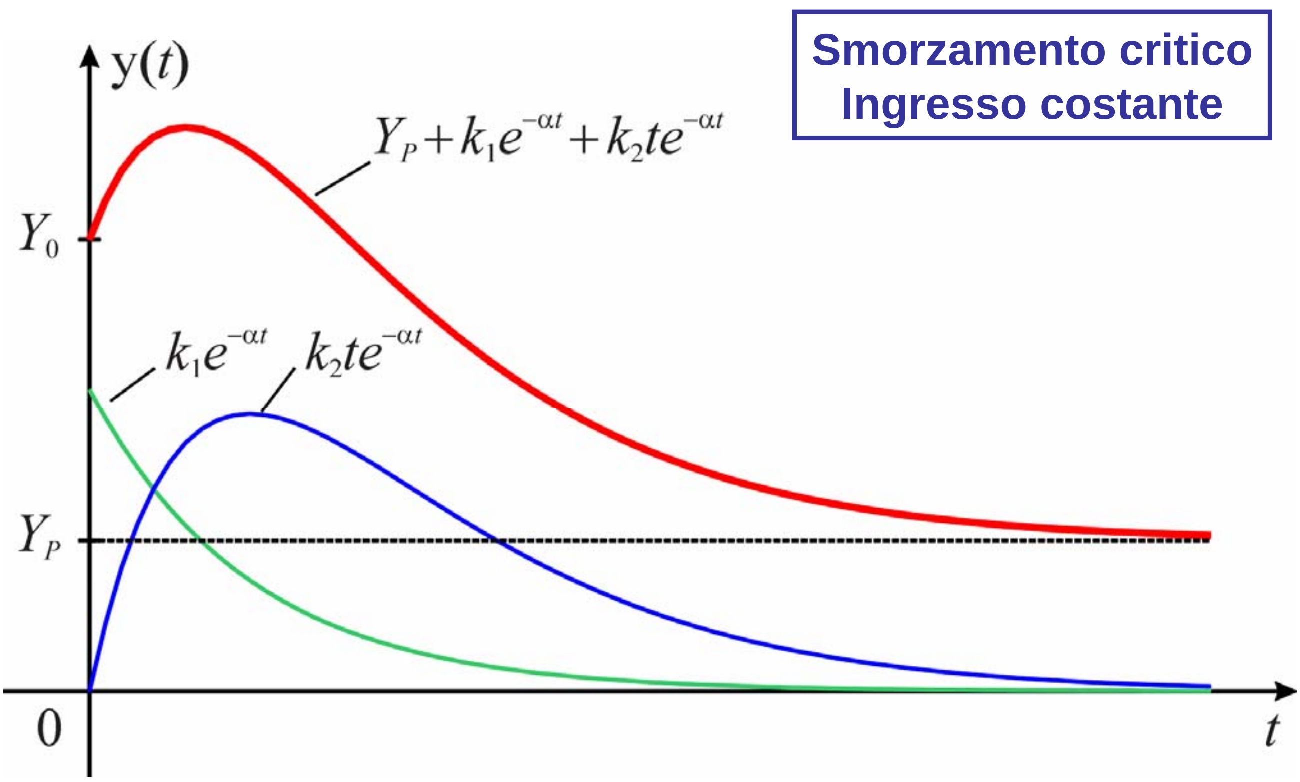
  $y_H(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}$

- Espressione della risposta:

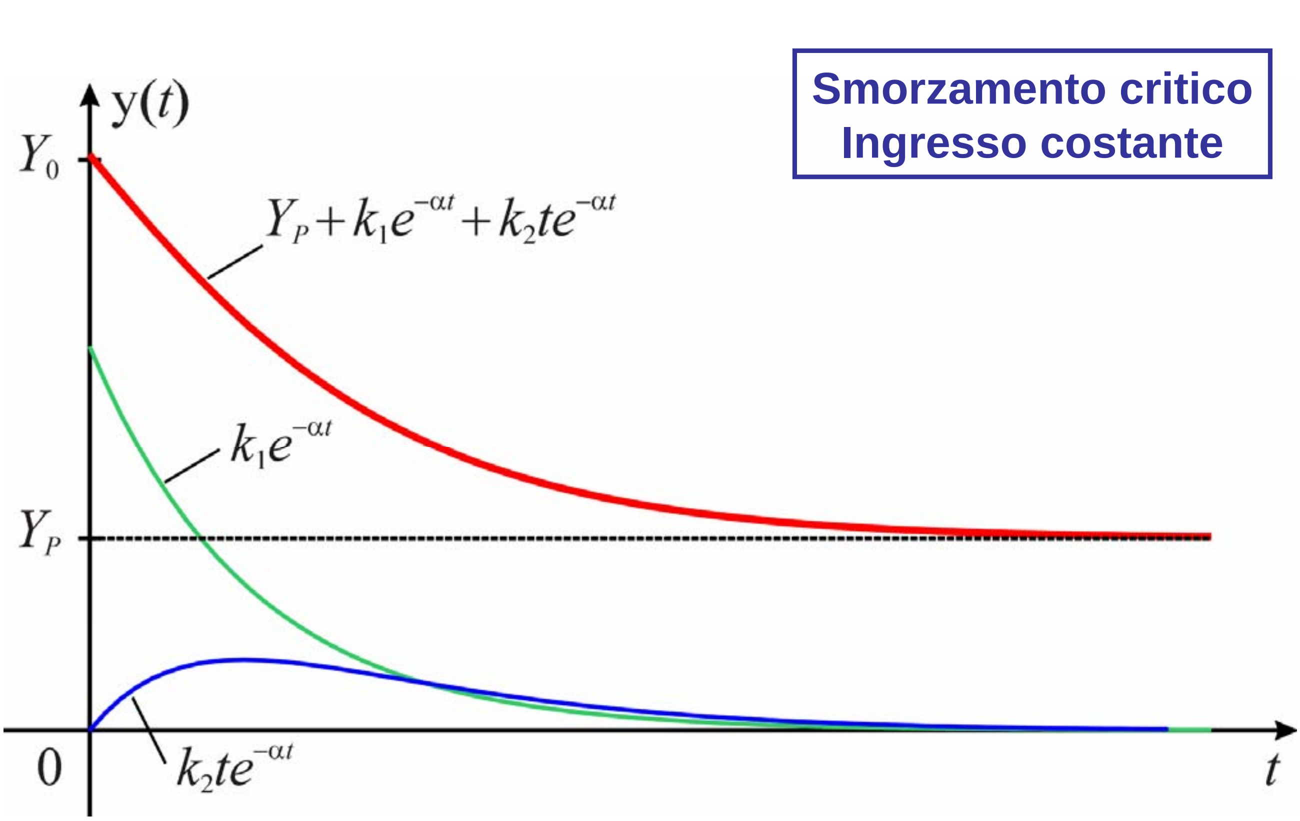
  $y(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t} + y_p(t)$

  - k_1 e k_2 si determinano imponendo le condizioni iniziali

Risposta di un circuito del secondo ordine



Risposta di un circuito del secondo ordine



Caso sottosmorzato

$$\boxed{\alpha^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta < 0}$$

- L'equazione ha due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$y_H(t) = k_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + k_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$

- Affinché $y_H(t)$ sia reale occorre che sia

$$k_2 = k_1^*$$

- Si pone

$$k_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \quad (A, \varphi \in R, \quad A \geq 0) \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$$

Caso sottosmorzato

- Utilizzando la formula di Eulero si ottiene

$$y_H(t) = k_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + k_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t} =$$

$$= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot e^{(-\alpha - j\omega_d)t} =$$

$$= Ae^{-\alpha t} \left[\frac{e^{j(\omega_d t + \varphi)} + e^{-j(\omega_d t + \varphi)}}{2} \right] =$$

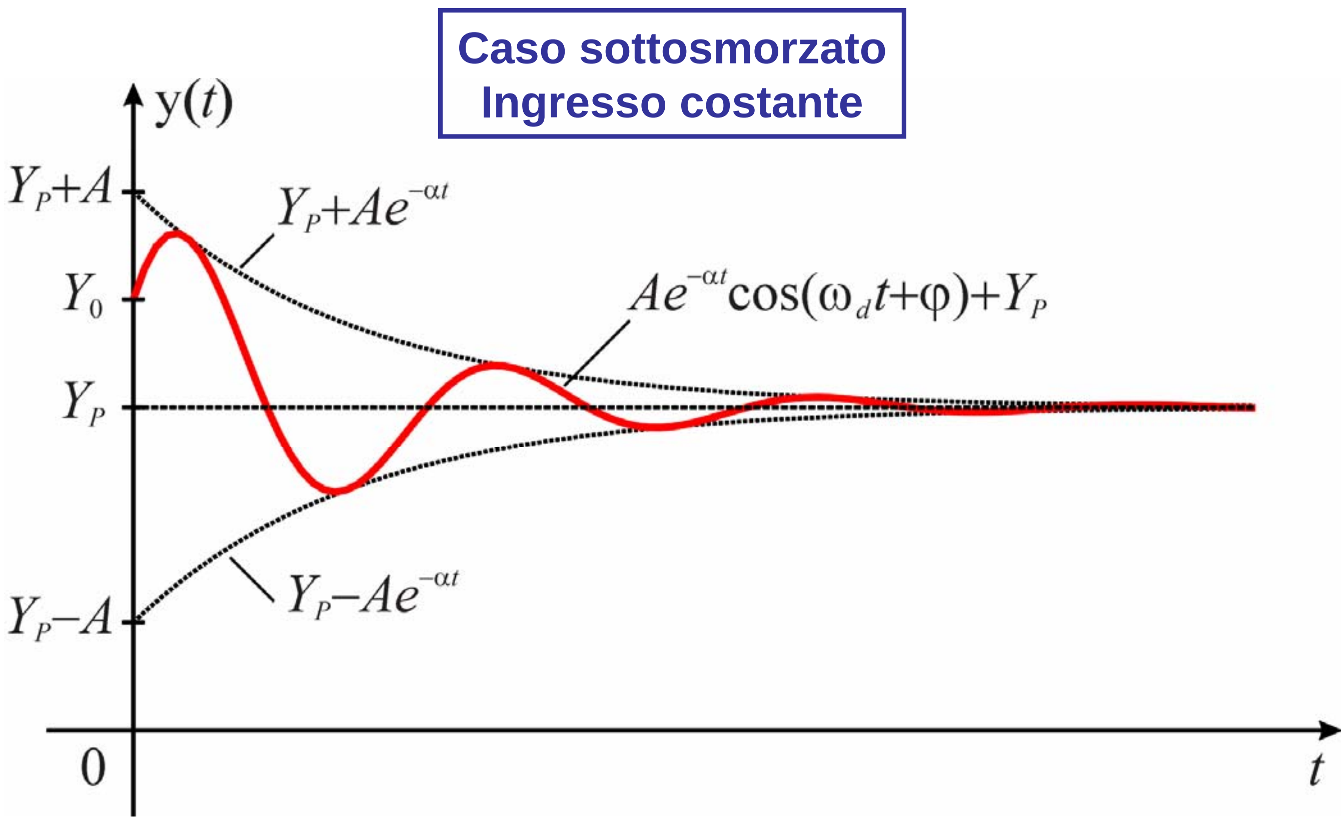
$$= Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

➡ Espressione della risposta:

$$\mathrm{y}(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi) + \mathrm{y}_p(t)$$

- Anche in questo caso si devono determinare due costanti reali (A e φ) imponendo le condizioni iniziali

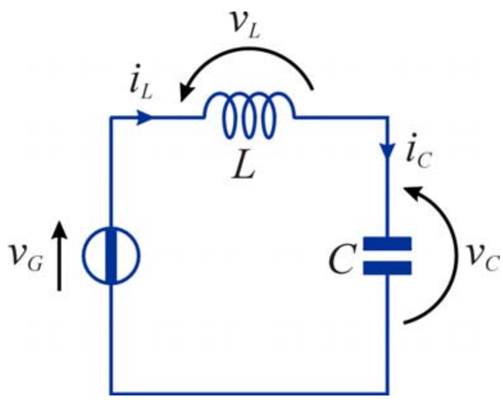
Risposta di un circuito del secondo ordine



Caso senza perdite

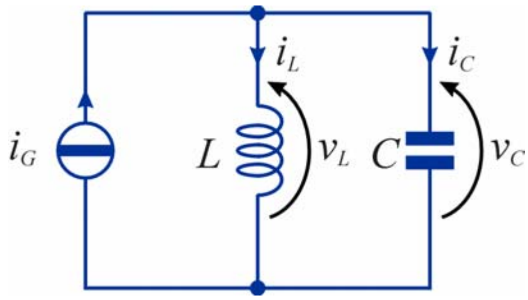
$$\alpha^2 = 0, \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

- Questo caso corrisponde all'assenza di componenti in grado di dissipare energia



RLC serie → LC serie

$$R \to 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{R}{2L} \to 0$$



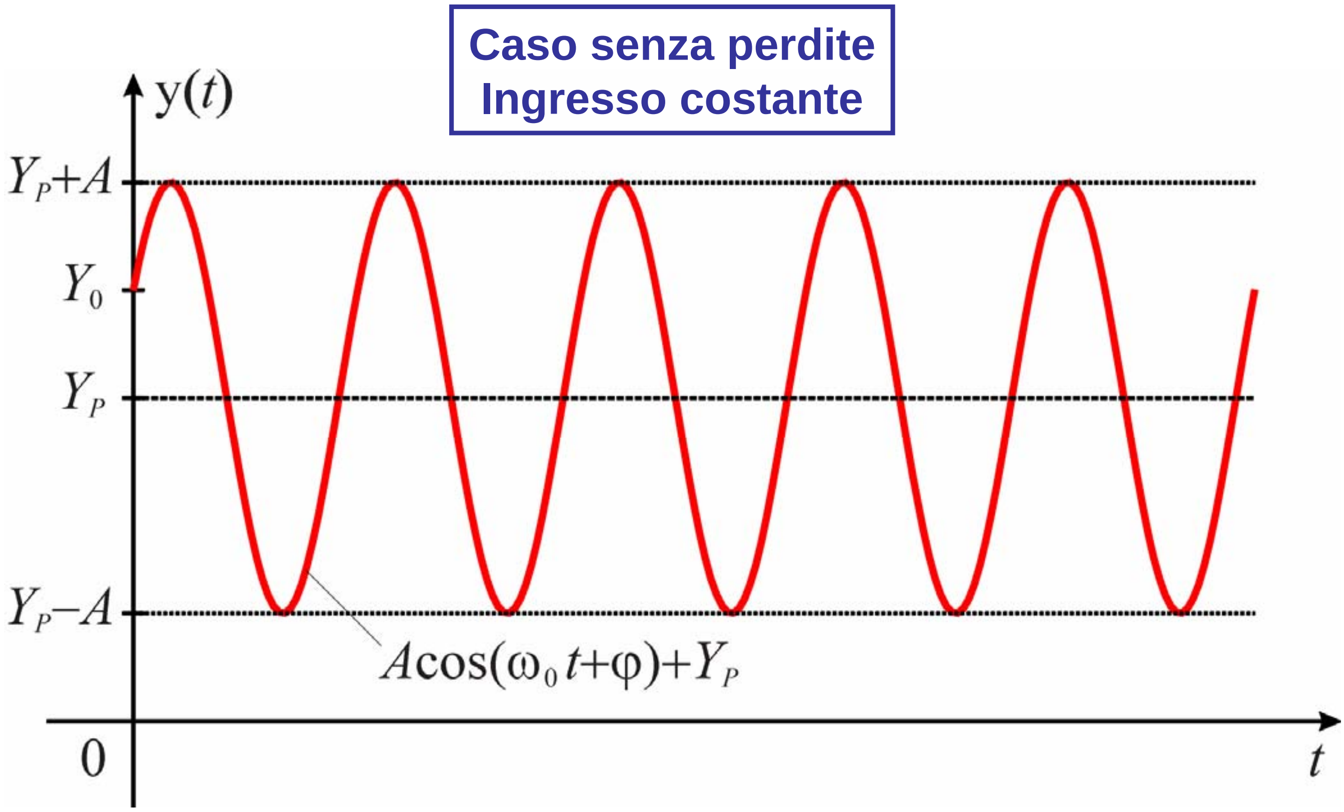
RLC parallelo → LC parallelo

$$R \to \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2RC} \to 0$$

Caso senza perdite

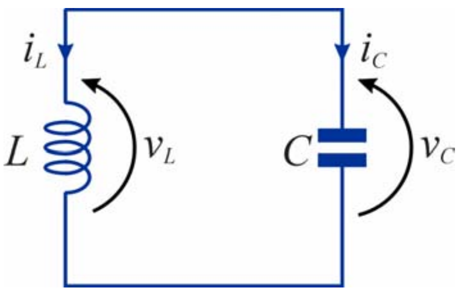
- In queste condizioni l'equazione differenziale è
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 \, y(t) = f(t)$$
- L'equazione caratteristica ha due soluzioni immaginarie coniugate
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm j\omega_0$$
- L'integrale generale dell'equazione omogenea è una funzione sinusoidale di pulsazione ω_0
$$y_H(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
  - non si annulla per $t \to \infty$ ma rimane limitata
  - in questo caso il circuito è **semplicemente stabile**
- L'espressione della risposta completa è
$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + y_P(t)$$

Risposta di un circuito del secondo ordine



Oscillatore armonico

- Se l'ingresso è nullo, i circuiti LC serie e parallelo si riducono al circuito seguente



- Considerando (per esempio) l'equazione in v_C si ottiene

$$v_C(t) = v_L(t) = V_M \cos(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- Quindi si ha anche

$$i_L(t) = -i_C(t) = -C\frac{d\,v_C}{dt} = \omega_0 C V_M \,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- La tensione e la corrente sono sinusoidali con pulsazione ω_0

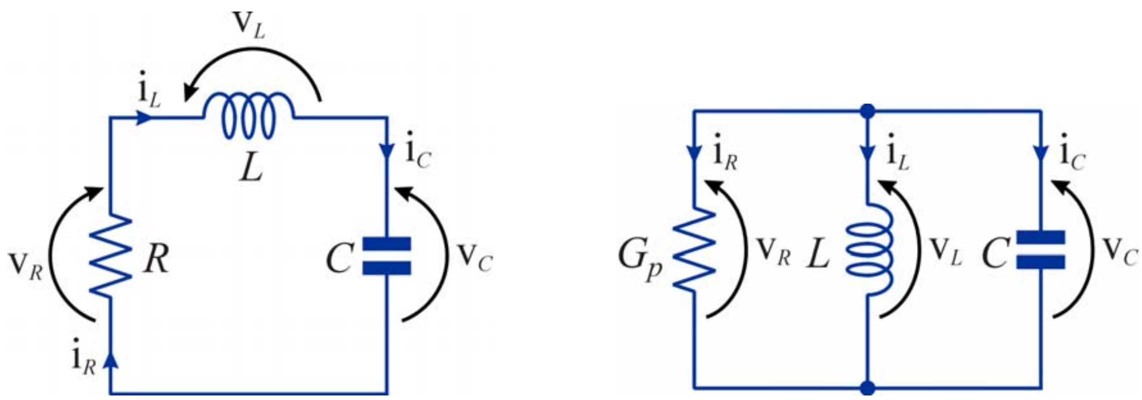
Oscillatore armonico

- Energia accumulata nel condensatore
$$\mathrm{w}_C(t) = \frac{1}{2} C\, \mathrm{v}_C^2(t) = \frac{1}{2} C V_M^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_V)$$
- Energia accumulata nell'induttore
$$\mathrm{w}_L(t) = \frac{1}{2} L\, \mathrm{i}_L^2(t) = \frac{1}{2} L \omega_0^2 C^2 V_M^2 \,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} C V_M^2 \,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi)$$
- Energia totale
$$\mathrm{w}_T = \mathrm{w}_C(t) + \mathrm{w}_L(t) = \frac{1}{2} C V_M^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 C^2 V_M^2 = \frac{1}{2} L I_M^2$$
- L'energia totale è costante e coincide con i valori massimi assunti da $\mathrm{w}_C(t)$ e da $\mathrm{w}_L(t)$
- $\mathrm{w}_C(t)$ è massima quando $\mathrm{w}_L(t)$ si annulla e viceversa

➡ Si ha uno scambio continuo di energia, senza perdite, tra il condensatore e l'induttore

Oscillatore smorzato

- Si inserisce un resistore di resistenza R_s in serie a L e C oppure un resistore di conduttanza G_p in parallelo a L e C



- A partire dalla condizione $R_s = 0$ oppure $G_p = 0$ si aumenta il valore di R_s o di G_p

➡ Aumenta il valore di α che nei due casi è $\alpha = \dfrac{R_s}{2L}$ o $\alpha = \dfrac{G_p}{2C}$

Oscillatore smorzato

- Inizialmente il circuito è sottosmorzato
  - a causa della dissipazione nel resistore l'energia accumulata nel circuito tende a zero per $t \to \infty$
  - l'ampiezza delle oscillazioni decresce come $e^{-\alpha t}$
  - la pulsazione $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ diminuisce all'aumentare di R_s o G_p
- Aumentando α si raggiunge la condizione di smorzamento critico per

$$\alpha = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad R_s = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad G_p = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

  - in queste condizioni la pulsazione ω_d è uguale a zero
  - ➡ a partire da questo punto le risposte del circuito non hanno più andamento oscillante
- Aumentando ulteriormente α il circuito diviene sovrasmorzato
  - al crescere di α una delle soluzioni dell'equazione caratteristica tende a $-\infty$ mentre l'altra tende a zero
  - ➡ per $t \to \infty$ la risposta tende a zero sempre più lentamente

Luogo delle soluzioni dell'equazione caratteristica