Dipartimento di Elettronica e Informazione
POLITECNICO DI MILANO

Automazione industriale
dispense del corso

9. Reti di Petri: analisi dinamica e metodi di riduzione

Luigi Piroddi
piroddi@elet.polimi.it

Metodi di analisi di Reti di Petri

Ci sono 2 modi per analizzare una rete di Petri:

❶ analisi dinamica → *insieme* e *grafo di raggiungibilità*

- si studiano tutte le marcature raggiungibili con sequenze di scatto ammissibili a partire da una determinata condizione iniziale (metodo esaustivo)
- il grafo di raggiungibilità non è nient’altro che l’automa corrispondente alla rete di Petri marcata (ogni marcatura è associata ad uno stato dell’automa e ogni transizione della rete ad una transizione dell’automa)
- limiti (gli stessi che si hanno con gli automi):
  - il numero di stati può essere elevato e addirittura infinito (anche per reti di Petri molto semplici)
  - occorre ricalcolare l’insieme di raggiungibilità anche per piccole variazioni della rete di Petri
  - inoltre, l’analisi dipende dalla marcatura iniziale

❷ analisi strutturale → *strutture algebriche* (invarianti, sifoni, trappole)

- dipende solo dalla matrice di incidenza, cioè dalla topologia della rete

Grafo di raggiungibilità

Si definisce grafo di raggiungibilità di una rete N con marcatura iniziale M_0 il grafo in cui:

- i nodi sono associati agli elementi di $R(N,M_0)$
- esiste un arco tra un nodo M' e uno M'' se e solo se $\exists t \in T$ t.c. $M' [\, t > M''$
- tale arco sarà contrassegnato con la transizione t

Caratteristiche del grafo di raggiungibilità:

- il grafo di raggiungibilità è un automa
- tale automa non ha necessariamente un numero finito di stati, poiché qualche posto della rete può contenere un numero illimitato di gettoni
- ci possono essere nodi con più archi uscenti (*non determinismo*)

Le seguenti proprietà di una rete di Petri possono essere facilmente verificate per ispezione del grafo di raggiungibilità:

- limitatezza (*boundedness*)
  - il grafo ha un numero finito di stati
- rete binaria/sicura (*safeness*)
  - non esistono stati associati a marcature con più di un gettone per posto
- vivezza (*liveness*)
  - a partire da ciascun nodo del grafo esiste un cammino contenente un arco associato ad ogni transizione
- assenza di blocchi critici (*deadlock-freeness*)
  - se esiste un nodo senza archi uscenti, esso corrisponde ad una marcatura morta
- reversibilità (*reversibility*)
  - da ogni nodo del grafo esiste un cammino che lo congiunge con il nodo iniziale

In generale è possibile verificare:

- la raggiungibilità di una marcatura
- l’ammissibilità di una sequenza di scatti

Costruzione del grafo di raggiungibilità

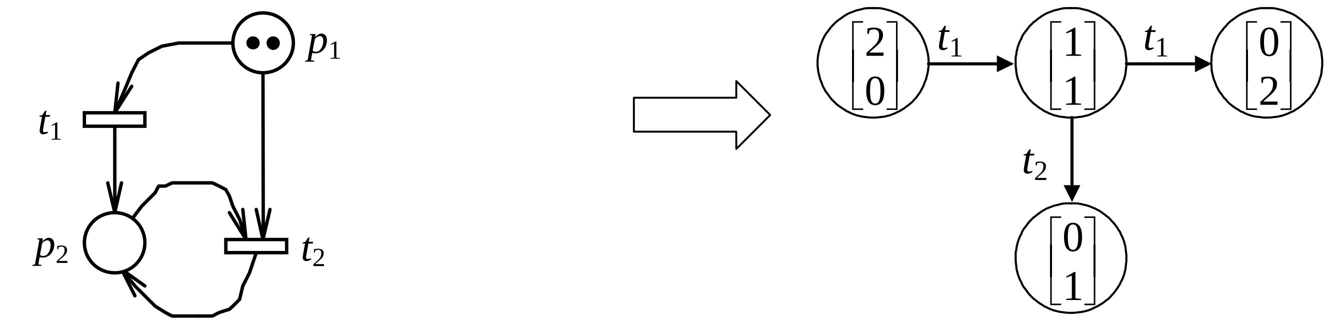
❶ Si disegni un nodo associato alla marcatura iniziale e lo si contrassegni con M_0. Tale nodo è il nodo corrente.

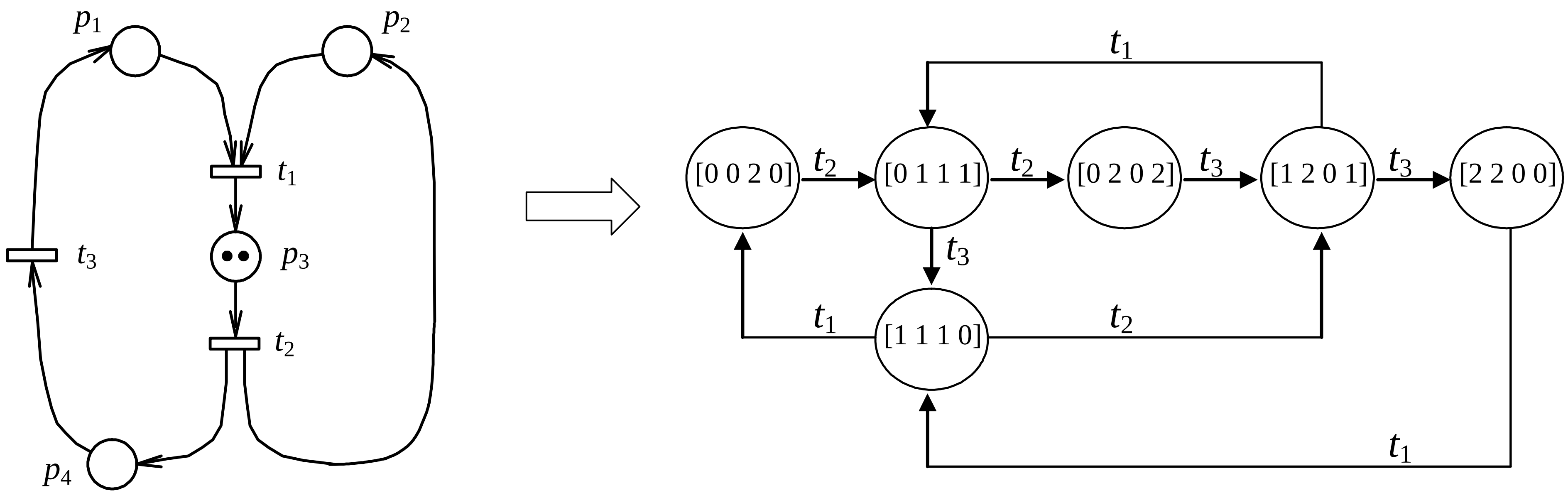
❷ Sia M_k la marcatura associata al nodo corrente. Se non ci sono più transizioni attivabili a partire da M_k e non considerate in precedenza con riferimento al medesimo nodo, allora se $k > 0$ (il nodo corrente non è associato a M_0), si definisce nodo corrente il nodo associato a M_{k-1}, altrimenti l’algoritmo termina.

❸ Sia M_k la marcatura associata al nodo corrente. Si faccia scattare la prima transizione (non considerata in precedenza con riferimento al nodo corrente) abilitata a partire da M_k, e si calcoli la marcatura raggiunta con il suo scatto.
Se tale marcatura non appartiene all’insieme $\{M_i, i = 0, 1, ..., k\}$, la si denoti M_{k+1} e si crei un nodo associato ad essa, che diventa il nuovo nodo corrente.
Si disegni un arco che va dal nodo associato a M_k al nodo corrispondente alla marcatura raggiunta con lo scatto della transizione e si contrassegni l’arco con l’etichetta della transizione.

❹ Si ripeta il procedimento a partire dall’operazione ❷.

Esempi:





In questi casi i due grafi sono di dimensioni comparabili: in generale ciò non accade (basti pensare a cosa succede se si aumenta la marcatura iniziale).

Grafo di copertura

Si può costruire un grafo di raggiungibilità con un numero finito di nodi per una rete non limitata?

- si introduce il simbolo ω per indicare un numero intero non limitato di gettoni in un posto
- si ottiene un grafo particolare che va sotto il nome di grafo di copertura

Significato del simbolo ω:

- Si consideri una sequenza ammissibile di scatti S che porti da M' a M'' (M' [S > M''), e sia $M'' \geq M'$, $M'' \neq M'$ (ovvero $\exists$ k tale che $m_k'' > m_k'$).

  Poiché $M'' \geq M'$, la medesima sequenza S è ancora abilitata in M''.

  Quindi, esiste una marcatura M''' tale che M'' [S > M''' con $M''' \geq M''$.

  Iterando l’applicazione della sequenza S, i posti che “guadagnano” gettoni ne possono acquisire un numero grande a piacere, ovvero sono non limitati.

  Nel grafo di copertura, la loro marcatura viene denotata con ω.

Costruzione del grafo di copertura

❶ A partire dal nodo iniziale M_0, si rappresentino tutte le transizioni abilitate e le corrispondenti marcature successive.

Se qualcuna di queste marcature è tale che $M_i \geq M_0$, $M_i \neq M_0$, si indichino con il simbolo ω le sue componenti strettamente maggiori delle corrispondenti di M_0.

❷ Per ogni nuova marcatura M_i si svolga il passo (a) o il (b):

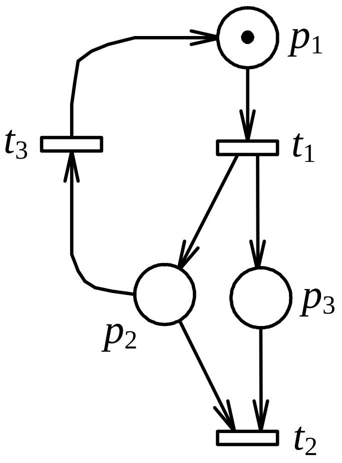
a) Se c’è già una marcatura uguale a M_i nel cammino tra M_0 e M_i allora M_i non ha nodi successori.

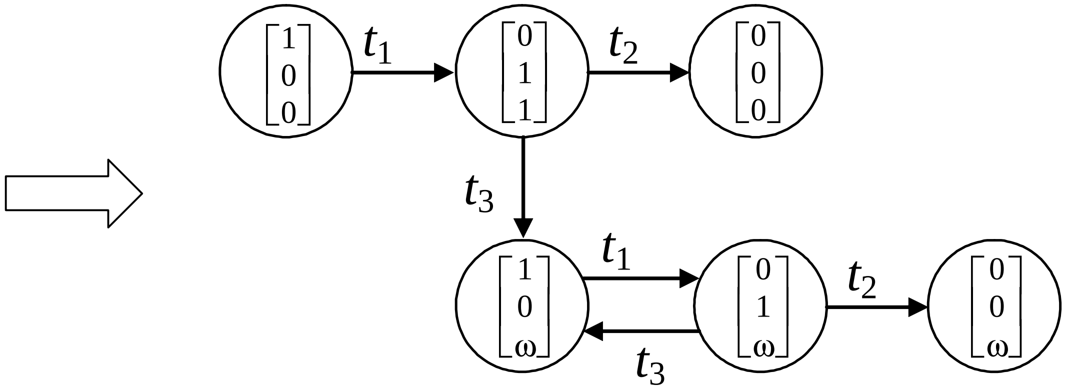
b) Se non c’è una marcatura uguale a M_i nel cammino tra M_0 e M_i allora l’albero è esteso aggiungendo tutti i nodi M_k successori di M_i.
Le componenti pari a ω di M_i sono riportate in ogni M_k.
Inoltre, se c’è una marcatura $M_j \leq M_k$ e con almeno una componente strettamente minore della corrispondente componente di M_k nel cammino tra M_0 e M_k, si indicano con ω le componenti di M_k strettamente maggiori di quelle di M_j.

❸ Quello ottenuto fino al passo ❷ è l’albero di copertura.

Il grafo di copertura si ottiene fondendo i nodi dell’albero di copertura associati a marcature uguali.

Esempio:





Per una rete non limitata, il problema della raggiungibilità di una marcatura e quello della vivezza non possono essere risolti con l’ausilio del solo grafo di copertura.

Modelli di processi produttivi e proprietà fondamentali

Nella costruzione di modelli di sistemi produttivi con reti di Petri è importante, di solito, accertare le proprietà fondamentali, che sono intimamente legate con la correttezza funzionale del modello:

❶ *limitatezza*
tutte le risorse del sistema (buffer, macchine, prodotti, ecc.) sono limitate

❷ *vivezza*
a) il processo produttivo non deve interrompersi (assenza di deadlock)
b) tutte le attività rappresentate nel modello devono poter essere eseguite (vivezza delle transizioni)

❸ *reversibilità*
il processo produttivo deve essere ripetibile

Metodi di riduzione

E’ relativamente agevole accertare queste proprietà su reti di piccole dimensioni, ma come si può fare l’analisi di reti complesse o di grosse dimensioni?

Si possono usare delle *regole di riduzione* della rete:

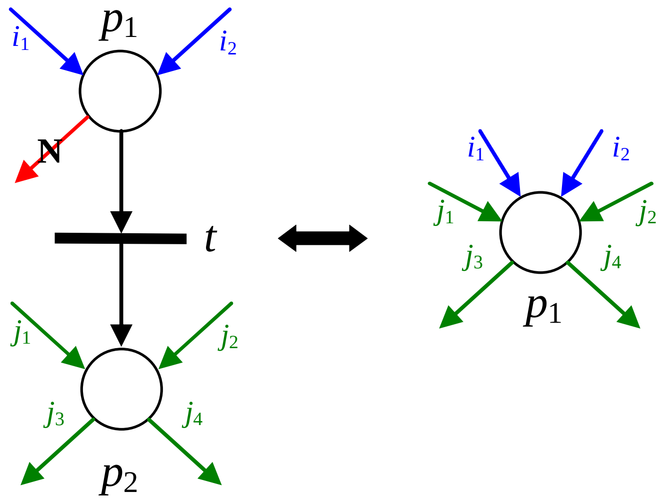
- semplificano la struttura
- non alterano le 3 proprietà fondamentali

Così si può ricondurre una rete complessa ad una più semplice ed accertare la limitatezza, la vivezza e la reversibilità della prima analizzando la seconda.

Regole di riduzione più usate:

- fusione di posti connessi in serie
- fusione di transizioni connesse in serie
- fusione di posti connessi in parallelo
- fusione di transizioni connesse in parallelo
- eliminazione di autoanelli di posti
- eliminazione di autoanelli di transizioni

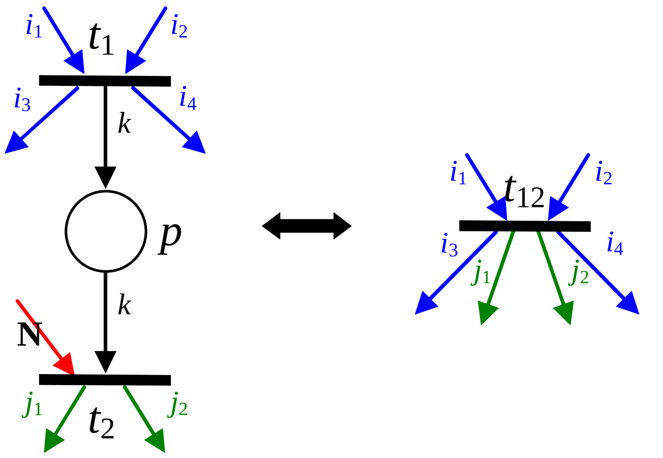
Fusione di posti connessi in serie:



Non cambiano le proprietà complessive di evoluzione della rete, perché tutte le volte che si marca p_1 è abilitato lo scatto di t e prima o poi si marcherà anche p_2 abilitando le transizioni in p_2•. A maggior ragione, l'andamento è equivalente se p_2 si marca per effetto dello scatto di altre transizioni.

Tutte le marcature uguali a meno dei gettoni in p_1 e p_2 e tali che $m_1 + m_2 = \overline{m}$ corrispondono ad una marcatura nella rete nuova (con $m_{12} = \overline{m}$). Per ogni sequenza di scatti contenente t, ce n'è una uguale nella rete nuova (in cui t è filtrata).

Fusione di transizioni connesse in serie:

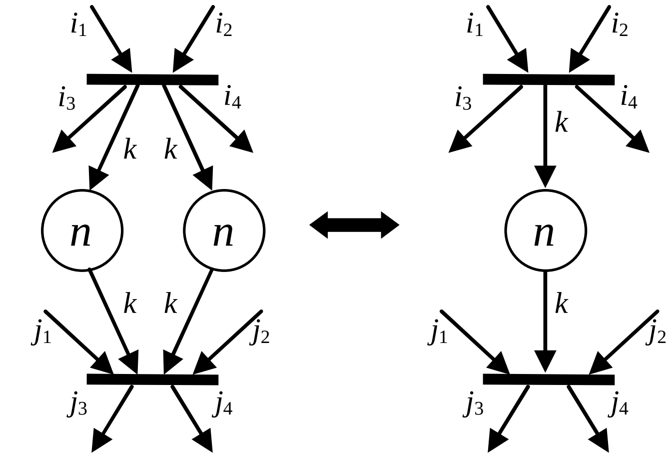


Anche in questo caso, lo scatto di t_1 abilita t_2 e l'effetto complessivo dello scatto di t_1 e t_2 è equivalente allo scatto di t_{12} nella rete ridotta.

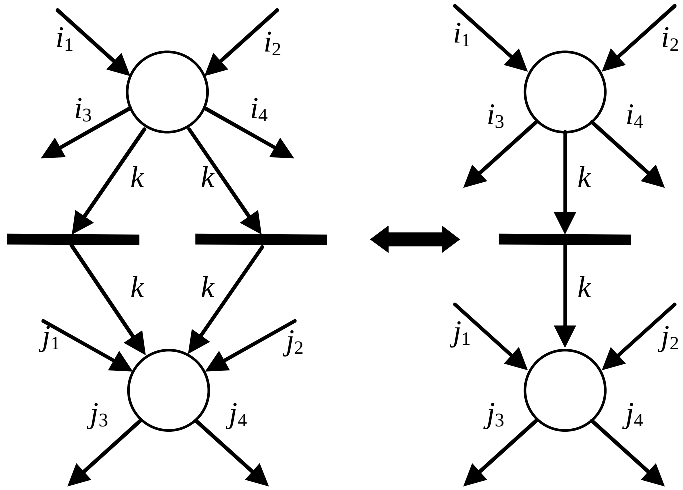
Tutte le marcature della rete originaria uguali a meno dei gettoni in p corrispondono ad una marcatura nella rete nuova.

Per ogni sequenza di scatti contenente t_1 (e t_2) della rete originaria, ce n'è una uguale nella rete nuova (in cui t_1 è sostituita da t_{12} e t_2 è filtrata).

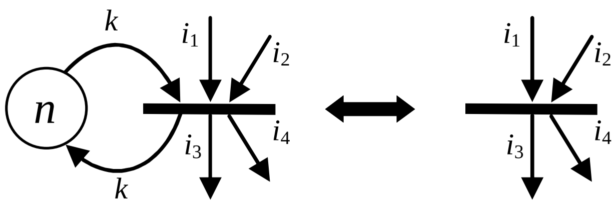
Fusione di posti connessi in parallelo:



Fusione di transizioni connesse in parallelo:

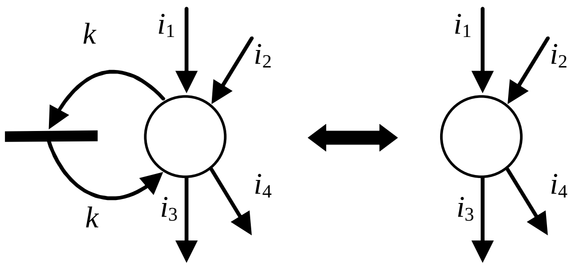


Eliminazione di autoanelli di posti:



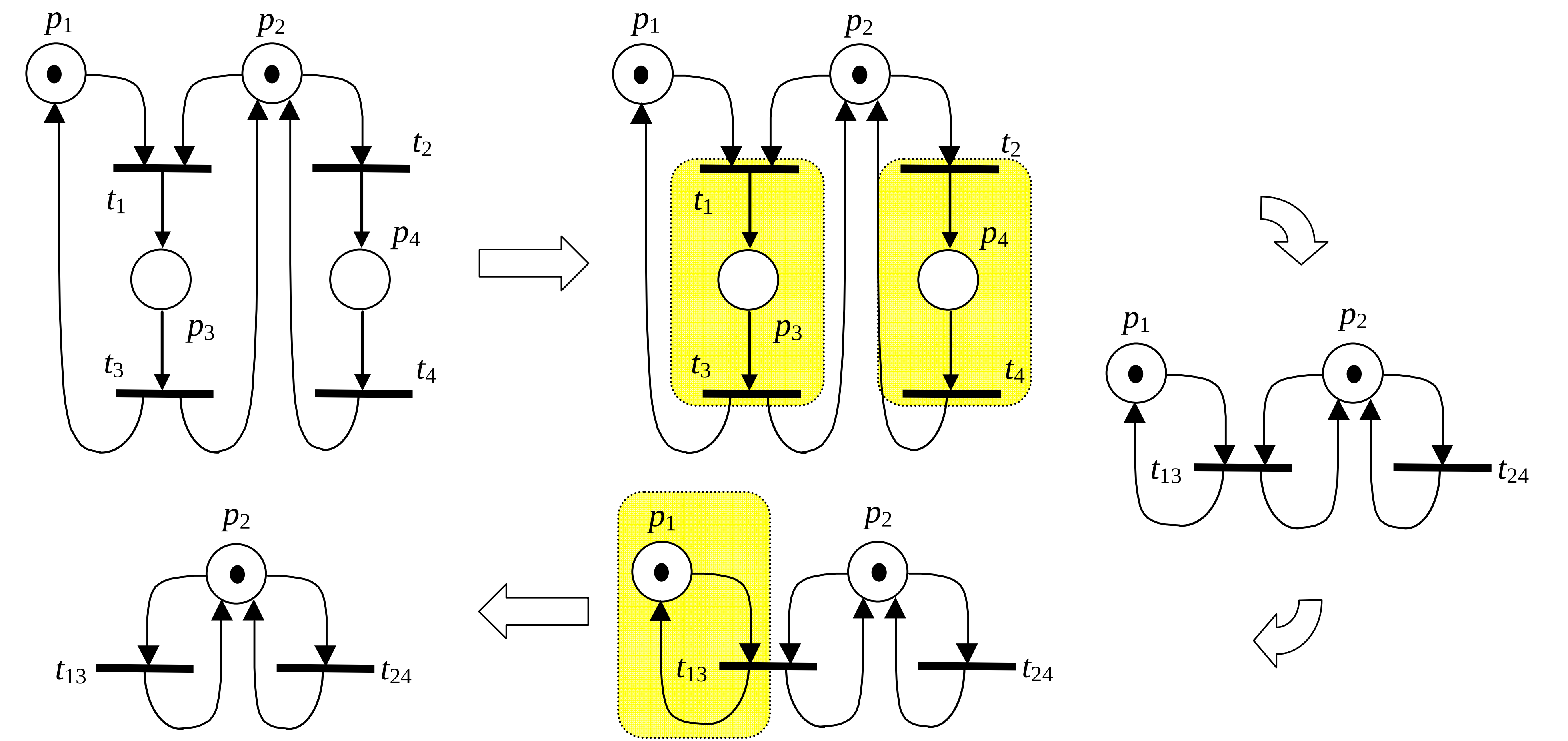
Se $n \geq k$, il posto abilita sempre la transizione (la cui effettiva abilitazione dipende dagli altri posti nel suo preset) e ogni volta che essa scatta mantiene lo stesso numero di gettoni.
Pertanto è ininfluente sull'evoluzione della rete e può essere eliminato.
Attenzione però che se $n < k$, la transizione è morta!

Eliminazione di autoanelli di transizioni:



Se esiste almeno una marcatura raggiungibile in cui il posto ha almeno k gettoni, la transizione non è morta. Peraltro, se la transizione scatta la marcatura della rete rimane invariata. In tal caso, quindi, la transizione è ininfluente e può essere eliminata.

Esempio



Poiché la rete ridotta è limitata, viva e reversibile, lo è anche la rete di partenza.