Automazione industriale
dispense del corso

8. Reti di Petri: rappresentazione algebrica

Luigi Piroddi
piroddi@elet.polimi.it

Rappresentazione matriciale o algebrica

E’ possibile analizzare le reti di Petri attraverso una rappresentazione algebrica relativamente semplice, basata sulla definizione di

- matrice di ingresso I (archi (p,t))
- matrice di uscita O (archi (t,p))
- vettore marcatura M
- vettore delle occorrenze s

Tale rappresentazione è utile per eseguire analisi automatiche della rete su proprietà strutturali, al fine di verificare il soddisfacimento delle proprietà comportamentali fondamentali (limitatezza, reversibilità, vivezza)

La rappresentazione algebrica descrive:

- la *topologia* della rete, attraverso I e O
- l’*evoluzione* della rete (comportamento dinamico), attraverso M e s

Matrici di ingresso (I) e *uscita* (O):

- riassumono la topologia della rete, riportando in forma tabellare gli archi che connettono posti a transizioni e viceversa

  I: $\bigcirc\!\!\rightarrow\!|$ (archi (p,t), entranti nelle transizioni)

  O: $|\!\!\rightarrow\!\bigcirc$ (archi (t,p), uscenti dalle transizioni)
- le righe sono associate ai posti, le colonne alle transizioni

  $I_{|P|\times|T|}$ con I_{kj} = peso dell’arco (p_k,t_j) (= 0 se l’arco non c’è, ovvero se $(p_k,t_j)\notin F$)

  $O_{|P|\times|T|}$ con O_{kj} = peso dell’arco (t_j,p_k) (= 0 se l’arco non c’è, ovvero se $(t_j,p_k)\notin F$)
- gli elementi di I e O sono interi non negativi

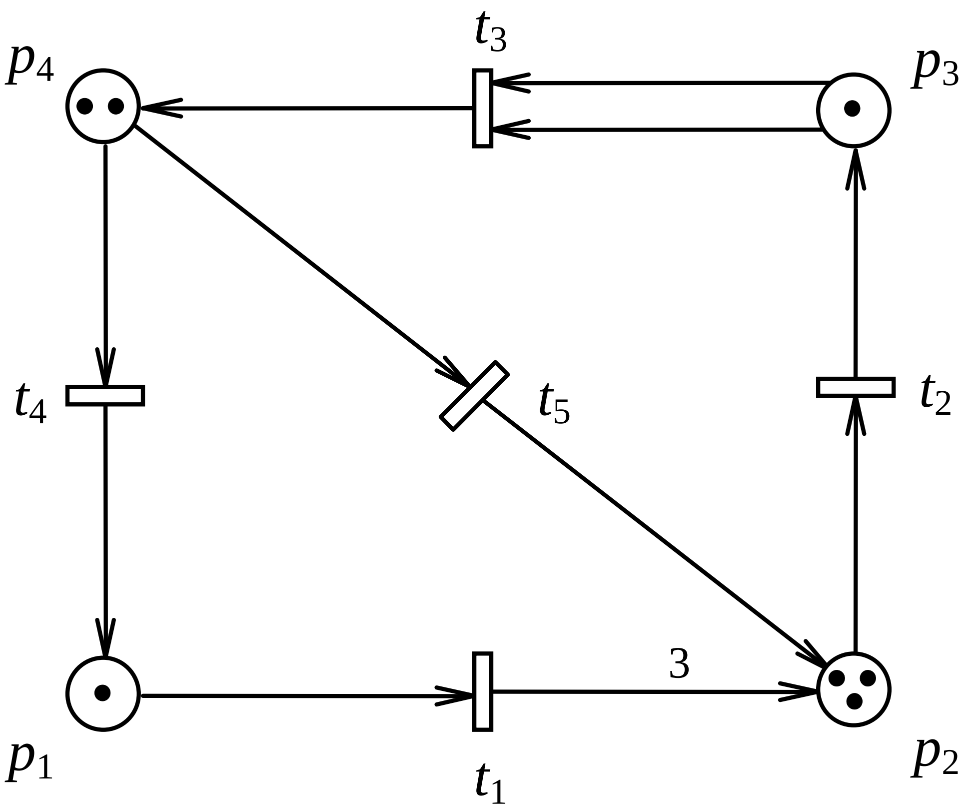
Matrice di incidenza ($C = O - I$):

- se non ci sono autoanelli, non esistono elementi omologhi di I e O entrambi diversi da 0 $\Rightarrow$ C contiene le stesse informazioni di I e O (gli elementi non nulli di I sono quelli negativi di C, mentre quelli positivi rappresentano gli elementi non nulli di O)
- una rete senza autoanelli si dice *pura*

Vettore marcatura:

- $M = [\ m_1\ \ m_2\ \ \ldots\ \ m_{|P|}\ ]^T$, dove m_i è il numero di gettoni del posto p_i

Esempio



Matrice I ($\bigcirc\!\rightarrow\!|$):

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
I = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \leftarrow p_1 \\ \leftarrow p_2 \\ \leftarrow p_3 \\ \leftarrow p_4 \end{array}
\end{array}
$$

Matrice O ($|\!\rightarrow\!\bigcirc$):

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
O = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \leftarrow p_1 \\ \leftarrow p_2 \\ \leftarrow p_3 \\ \leftarrow p_4 \end{array}
\end{array}
$$

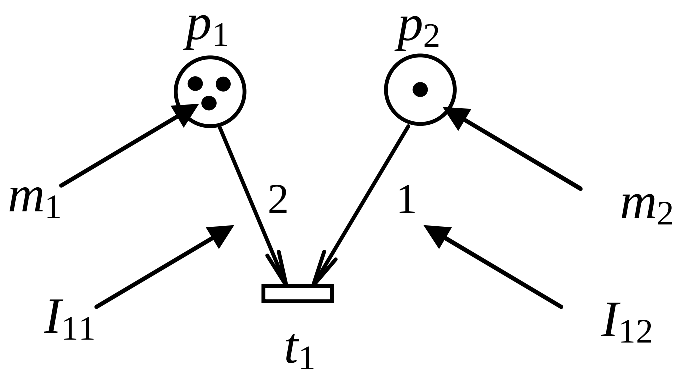
Matrice di incidenza:

$$C = O - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow p_1 \\ \leftarrow p_2 \\ \leftarrow p_3 \\ \leftarrow p_4 \end{array}$$

Marcatura iniziale:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Condizione di abilitazione di una transizione



t_i è abilitata se $M \geq I_i$ (dove I_i è la i-esima colonna di I)

Per reti pure, la condizione di abilitazione può essere espressa in termini della matrice di incidenza, osservando che, poiché gli elementi di M, I e O sono non negativi e un elemento di O può essere diverso da zero solo se è nullo l'elemento omologo di I, accade che:

$$M \geq I_i \;\Leftrightarrow\; M + O_i \geq I_i \;\leftrightarrow\; M + O_i - I_i \geq 0 \;\leftrightarrow\; M + C_i \geq 0$$

- se $I_{ki} > 0$, allora $O_{ki} = 0$ e quindi $m_k \geq I_{ki}$ è equivalente a $m_k + O_{ki} \geq I_{ki}$
- se $I_{ki} = 0$, allora $O_{ki} \geq 0$ e, poiché $m_k \geq 0$, sia $m_k \geq I_{ki}$ che $m_k + O_{ki} \geq I_{ki}$ sono automaticamente soddisfatte

Scatto di una transizione

Lo scatto della transizione t_i a partire dalla marcatura M produce una nuova marcatura M^* data da:

$$M^* = M + O_i - I_i = M + C_i$$

Similitudine tra reti di Petri e sistemi dinamici:

- marcatura ↔ stato
- $M^* = M + C_i$ ↔ equazione di stato

La *variazione* della marcatura dovuta allo scatto di una transizione non dipende dalla marcatura della rete (se scatta t_i, $\Delta M = C_i$), ma solo dalla topologia della rete stessa.

La marcatura raggiunta, invece, dipende dalla storia passata della rete.

NB. $C_i = C \cdot s_i$ dove $s_i = [\ 0\ \ \dots\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ \dots\ \ 0\ ]^T$ è il versore con un 1 nella i-esima posizione.

Sequenza di scatti

Una sequenza di scatti $S = t_{k_1}\ t_{k_2}\ \ldots\ t_{k_n}$ abilitata in una marcatura M_0 è una sequenza di transizioni $t_{k_j} \in T$, $\forall j = 1, \ldots, n$, tali che t_{k_1} è abilitata in M_0 e lo scatto di t_{k_i} porta in una marcatura M_i in cui è abilitata $t_{k_{i+1}}$:

$$M_0\,[\,t_{k_1} > M_1, \quad M_1\,[\,t_{k_2} > M_2, \quad \ldots, \quad M_{n-1}\,[\,t_{k_n} > M_n$$

$$\Downarrow$$

$$M_0\,[\,t_{k_1} \ldots t_{k_n} > M_n \quad \text{ovvero} \quad M_0\,[\,S > M_n$$

Una generica sequenza di transizioni non è necessariamente una sequenza di scatti: lo è solo se tutte le transizioni risultano a turno abilitate.

Se ciò accade essa prende il nome di sequenza *ammissibile* di transizioni.

L’effetto di una sequenza di scatti $S = t_{k_1}\ t_{k_2}\ \ldots\ t_{k_n}$ è pari a:

$M^* = M + C_{k_1} + \ldots + C_{k_n}$

dove C_i è la i-esima colonna di C.

L’effetto complessivo è indipendente dall’ordine delle transizioni nella sequenza (la somma non cambia se si cambia l’ordine degli addendi).

Il calcolo della marcatura M^* può essere fatto in maniera più rapida nel modo seguente:

$$\begin{aligned} M^* &= M + C_{k_1} + \ldots + C_{k_n} = \\ &= M + C \cdot s_{k_1} + \ldots + C \cdot s_{k_n} = \\ &= M + C \cdot (s_{k_1} + \ldots + s_{k_n}) \end{aligned}$$

dove s_i è il versore associato a t_i.

Il vettore delle occorrenze s, associato ad una sequenza di scatti $S = t_{k_1}\, t_{k_2} \ldots t_{k_n}$, è un vettore colonna di dimensioni $|T|$, il cui generico elemento i-esimo è pari al numero di *occorrenze* della transizione t_i nella sequenza S:

$$s = s_{k_1} + \ldots + s_{k_n}$$

Usando il vettore delle occorrenze si può riscrivere l’equazione precedente in modo sintetico:

$$M^* = M + Cs$$

Equazione di stato

L’equazione di stato per una sequenza di transizioni (abilitata) diventa:

$M\ [\ S > M^* \ \Rightarrow M^* = M + Cs$ (relazione lineare)

Non vale il ‘$\Leftarrow$’: non è detto che ad s corrisponda una sequenza di transizioni *abilitate* S.

L’equazione di stato non considera esplicitamente il problema dell’abilitazione delle transizioni: si può usare per simulare l’evoluzione della rete, a patto di verificare l’abilitazione delle transizioni.

Riassumendo:

❶ una transizione alla volta:
$S_i = t_i \rightarrow s_i = [\ 0\ \ \dots\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ \dots\ \ 0\ ]^T$ (versore)

❷ data una marcatura corrente M, verificare quali transizioni sono abilitate:
t_i è abilitata se $M + Cs_i \geq 0$ ($Cs_i = C_i$)

❸ scegliere a caso una transizione tra quelle abilitate e farla scattare:
$M^* = M + Cs_i$